

数 联 天 地 网 站 地 图

小学数学

小学一年级数学 小学二年级数学 小学三年级数学
小学四年级数学 小学五年级数学 小学六年级数学

初中数学

初中七年级数学 初中八年级数学 初中九年级数学

高中数学

高一数学 高二数学 高三数学

高等数学

数学竞赛

平面几何 不等式 函数与方程 三角函数 排列与组合
数列 初等数论 其他竞赛类

数学试题库

地方数学竞赛 全国初中数学联赛 全国高中数学联赛
希望杯数学邀请赛 中国数学奥林匹克 国际数学奥林匹克
历届数学高考试题

数学论坛

小学数学论坛 初中数学论坛 高中数学论坛 高等数学论坛
小学奥数论坛 中学数学竞赛论坛 高等数学竞赛论坛 数列论坛
初等数论论坛 函数与方程论坛 三角函数论坛 不等式论坛
排列与组合论坛 几何论坛 趣味数学论坛

数学资讯

趣味数学

数学百科

目　录

第一部分　概念和定理 ……1

第二部分　题目 ……19

第一章　算术 ……19
§1　整除性、素数与合数 ……19
§2　方程的整数解和有理数解 ……21
§3　阶乘与二项式系数 ……23
§4　数集合 ……24
§5　数的各种性质 ……26
第二章　方程与不等式 ……29
§6　方程与方程组 ……29
§7　不等式 ……31
§8　含整数部分[x]的问题 ……33
第三章　平面几何 ……36
§9　三角形 ……36
§10　圆 ……38
§11　多边形 ……40
§12　点、线段与直线 ……42
§13　几何不等式 ……44
§14　几何极值问题 ……46
第四章　立体几何 ……49
§15　四面体 ……49
§16　多面体、球面和其他集合 ……51
第五章　分析 ……54
§17　数列 ……54
§18　极值 ……55
§19　函数的各种性质 ……58
§20　函数方程 ……59
第六章　多项式 ……63
§21　多项式的根 ……63

§22 多项式的整除性和相等 ……65
§23 多项式的各种性质 ……67
第七章 组合数学……70
§24 集合与子集 ……70
§25 利用图的题目 ……71
§26 各种组合问题 ……72
§27 初等概率论 ……75

第三部分 解答……77

第一章 算术……77
§1 整除性、素数与合数 ……77
§2 方程的整数解和有理数解……84
§3 阶乘与二项式系数……92
§4 数集合……97
§5 数的各种性质 ……107
第二章 方程与不等式 ……114
§6 方程与方程组 ……114
§7 不等式 ……120
§8 含整数部分[x]的问题……128
第三章 平面几何 ……135
§9 三角形 ……135
§10 圆……143
§11 多边形……153
§12 点、线段与直线 ……161
§13 几何不等式……168
§14 几何极值问题……179
第四章 立体几何 ……187
§15 四面体……187
§16 多面体、球面和其他集合 ……197
第五章 分析 ……210
§17 数列……210
§18 极值……218
§19 函数的各种性质……223
§20 函数方程……228
第六章 多项式 ……239
§21 多项式的根……239
§22 多项式的整除性和相等……245
§23 多项式的各种性质……253
第七章 组合数学 ……261
§24 集合和子集……261
§25 利用图的题目……264

§26　各种组合问题……257

§27　初等概率论……273

参考文献……277

第一部分　概念和定理

国内外数学竞赛试题涉及许多数学分支，如代数、几何、数论、初等微积分、初等概率论、组合数学和图论等．这一部分辑录了求解各类数学竞赛试题所必需的取自上述各分支的最重要的概念和定理．数学名词以及某些定理的名称沿用现行中学数学教科书，即参考文献[3]～[9]，或引用参考文献[1]与[2]．这一部分包含了100个定理，大部分都注明出处，从中可查到定理的证明．至于比较简单的定理，则不再指明参考文献．当然，如果能自行给出定理的证明，则不论对有关数学知识的理解与掌握，或者提高求解数学竞赛题的能力，都会有所裨益的．

关于集合的概念见[1]，[2]，[3]．

定义 1　如果集合A的每个元素都属于集合B，则集合A称为集合B的子集，记作$A\subset B$．

定义 2　集合A和B的并集$A\cup B$是由所有至少属于集合A和B中一个集合的元素组成的集合．集合A和B的交集$A\cap B$是由所有既属于A又属于B的元素组成的集合．

同样可以定义若干个集合的并集及交集．

定义 3　集合A和B的差集$A\backslash B$是集合A的子集，它由所有属于A但不属于B的元素组成．如果$B\subset A$，则差集$A\backslash B$称为集合B在集合A中的补集．

元素组由一些元素组成．如果元素组中的元素相同而只是元素的排列次序不同，不认为是不同的元素组(比如$\{1, 2, 3\}=\{2, 3, 1\}$)，则称为无序组；如果元素组中的元素排列次序不同，得到的元素组认为是不同的，则称为有序组．

定义 4　集合A和B的笛卡儿积$A\times B$是所有有序元素对(x, y)，$x\in A$，$y\in B$组成的集合．

同样可以定义若干个集合的笛卡儿积．

定理 1　(狄利克雷原理)([11]，[17])如果把n元集合表成它的k个子集的并集，则有某个子集至少含$\frac{n}{k}$个元素．

上述定理也称抽屉原理、鸽笼原理．

定理 2　(数学归纳法原理)([1]，[2]，[4]，[17])设对某个依赖于参数n的命题$U(n)$，有

(1)　命题$U(1)$成立；

(2) 如果对某个$n\in N$，命题$U(1), U(2), \cdots, U(n)$成立，则命题$U(n+1)$也成立，

则命题$U(n)$对每个$n\in N$都成立。

关于函数的概念见[1]，[2]，[3]，[9]，[10]。用$f: A\to B$表示定义域为A而值域为B的函数。

定义 5 给定函数$f:A\to B$。如果函数$g:B\to A$满足

$$g(f(x))=x,\ f(g(y))=y,\ x\in A,\ y\in B,$$

则函数g称为函数f的反函数，记作$g=f^{-1}$。

定理 3 函数$f:A\to B$具有反函数的必要且充分条件是，对任意的$y\in B$，存在$x\in A$，使得$f(x)=y$，并且对任意两个不同的$x_1, x_2\in A$，$f(x_1)\neq f(x_2)$。

定义 6 两个函数$f:A\to B$和$g:B\to C$的复合函数是函数$h:A\to C$，其定义如下：

$$h(x)\equiv g(f(x)),\ x\in A.$$

若干个函数

$$f_1:A_1\to A_2,\ f_2:A_2\to A_3,\ \cdots,\ f_n:A_n\to A_{n+1}$$

的复合函数类似地定义。

函数$f:A\to A$的n次复合函数记作f^n。当给定函数$f:R\to R$时，函数f的n次复合函数$f^n(x)=\underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n\text{个}}(x)\cdots)))$与反函数$f^{-1}(x)$分别和$(f(x))^n$与$(f(x))^{-1}$不相同。只有对数函数和三角函数例外。例如，$\sin^2 x$表示$\sin x\cdot\sin x$，而不表示$\sin(\sin x)$。

定义 7 函数$f:A\to R$称为

上有界的，如果存在某个$M\in R$，使得对所有的$x\in A$，都有$f(x)<M$；

下有界的，如果存在某个$m\in R$，使得对所有的$x\in A$，都有$f(x)>m$。

既上有界又下有界的函数$f:A\to R$称为有界函数。

定义 8 设$A\subset R$，函数$f:A\to R$称为

递增的，如果$f(x_1)<f(x_2)$；

递减的，如果$f(x_1)>f(x_2)$；

不增的，如果$f(x_1)\geqslant f(x_2)$；

不减的，如果$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，

其中每个条件都对所有满足不等式$x_1<x_2$的数x_1、$x_2\in A$成立。具有上述4个性质之一的函数$f:A\to R$称为单调的。递增或者递减的函数称为严格单调的。

数列是函数$f:A\to R$的特例，它的定义域是集合R的子集，或是映射$a:N\to R$，或是映射$a:Z^+\to R$，它的值记作a_n。和定义7、8相对应，可以定义上有界、下有界、有界、递增、递减、不增、不减、单调和严格单调数列。([4])

定理 4 对任意a、$b\in R$和$n\in N$，有

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n),$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}),$$

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+\cdots+ab^{2n-2}-b^{2n-1}),$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})},$$

最后一个等式中设$b>0$且$a\geqslant\sqrt{b}$。

定理 5 （贝努利不等式）([14])对所有满足条件 $a>-1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b\neq 1$ 的 a、$b\in R$, 有

$$(1+a)^b<1+ab, \quad 当 0<b<1 时,$$
$$(1+a)^b>1+ab, \quad 当 b\notin[0, 1]时.$$

关于平均数的概念见[1],[2],[14].

定义 9 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R$ 的算术平均数是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的几何平均数是

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均数是

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R$ 的二次平均数是

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

定理 6 （关于平均数的定理）([14])对任意的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

而且，如果这 4 个平均数不全相等时，则所有不等式都是严格的。

最常用的是几何平均数与算术平均数之间的不等式，它对非负实数也成立。

定理 7 ([9],[10])数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$ 是递增的，并且有极限，其极限记作 e, 则对每一个 $n\in N$, 都有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

以 e 为底的对数称为自然对数，记作 ln, 即 $\log_e x=\ln x$, $x>0$. ([1], [9], [10])

定义 10 符号函数定义为

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, & 当 x>0 时,\\ 0, & 当 x=0 时,\\ -1, & 当 x<0 时.\end{cases}$$

定义 11 数 $x\in R$ 的整数部分$[x]$是不超过 x 的最大整数。数$\{x\}=x-[x]$称为数 $x\in R$ 的分数部分。

定理 8 整数部分$[x]$是不减函数，分数部分$\{x\}$是周期函数，其周期为 1.

关于整除性的概念见[1],[2],[11],[12].

定义 12 给定数 $a, b\in Z$, $b\neq 0$. 如果 $q\in Z$, $r\in\{0, 1, \cdots, |b|-1\}$满足

$$a=qb+r,$$

则 q 和 r 分别称为 a 除以 b 的商和余数。如果 $r=0$, 则说 a 被 b 整除，记作 $b|a$, 或者说 a 是 b 的倍数，而 b 是 a 的因数。

定义 13 非零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Z$ 的最小公倍数是能被其中每一个整数 $a_i(1\leqslant i\leqslant$

n)所整除的最小自然数,记作$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$。

定义 14 设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in Z$中至少有一个数不等于零,这$n$个数的最大公因数是能够整除其中每一个整数的最大自然数,记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

定理 9 ([11],[12])对任意$a, b \in N$,有

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab.$$

定义 15 如果$a, b \in Z$且满足$(a, b)=1$,则称a和b是互素的,也称为互质的。

定义 16 给定$a, b, c \in Z$,且$c \neq 0$。如果$c \mid (a-b)$,则称a和b模c同余,记作$a \equiv b \pmod c$,否则称a和b模c不同余,记作$a \not\equiv b \pmod c$。

定理 10 ([11]、[12])给定$a, b, c, d, m, k \in Z$,且$m \neq 0$, $k \neq 0$,则有

(1) 如果$a \equiv b \pmod m$且$b \equiv c \pmod m$,则$a \equiv c \pmod m$;

(2) 如果$a \equiv b \pmod m$且$c \equiv d \pmod m$,则$a+c \equiv b+d \pmod m$且$ac \equiv bd \pmod m$;

(3) 如果$a \equiv b \pmod m$,则对任意的$n \in N$,有$a^n \equiv b^n \pmod m$;

(4) 如果$a \equiv b \pmod m$,则$ak \equiv bk \pmod{mk}$;

(5) 如果$a \equiv b \pmod m$,且$k \mid a$, $k \mid b$, $k \mid m$,则

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \left(\bmod \frac{m}{k}\right).$$

定理 11 对任意$a, b \in Z$和$n \in N$,有

(1) 如果$a \neq b$,则$(a-b) \mid (a^n - b^n)$;

(2) 如果$a \neq -b$,则$(a+b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1})$;

(3) 如果$a \neq -b$,则$(a+b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$。

这个定理由定理4或定理10(3)即得。

定理 12 整数的n次幂 $(2 \leqslant n \leqslant 5)$ 除以整数 $m(3 \leqslant m \leqslant 10)$,所能得到的余数如下表:

m	n			
	2	3	4	5
3	0, 1	0, 1, 2	0, 1	0, 1, 2
4	0, 1	0, 1, 3	0, 1	0, 1, 3
5	0, 1, 4	0, 1, 2, 3, 4	0, 1	0, 1, 2, 3, 4
6	0, 1, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5	0, 1, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	0, 1, 2, 4	0, 1, 6	0, 1, 2, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	0, 1, 4	0, 1, 3, 5, 7	0, 1	0, 1, 3, 5, 7
9	0, 1, 4, 7	0, 1, 8	0, 1, 4, 7	0, 1, 2, 4, 5, 7, 8
10	0, 1, 4, 5, 6, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

整数的表示,有常用的十进制。用十进制表示的数叫做十进数。另外,还有二进数、八进数等([1],[2])。一般地,可以引进下面的

定义 17 如果$n \in N$可以表为

$$n = a_1 k^{m-1} + a_2 k^{m-2} + \cdots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0,$$

其中整数 $k\geqslant 2$，而 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是非负整数，并且 $a_i<k(1\leqslant i\leqslant m)$，$a_1>0$，则称 $\overline{a_1a_2\cdots a_m}$ 是 n 的 k 进制表示，而 $\overline{a_1a_2\cdots a_m}$ 称为 k 进数。

定理 13 给定整数 $k\geqslant 2$。对任意 $n\in N$，都有唯一的 k 进制表示。

定理 14 ([11]) 任意一个自然数 n 与它的十进制表示中的所有数字之和模 9 同余。

关于二项式和二项式系数的概念和公式见[1]，[2]，[5]，[17]。

定义 18 设 $m, n\in Z$，$n\geqslant m\geqslant 0$。二项式系数是指下面的数

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

其中记

$$n!=\begin{cases}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n, & \text{当 } n\in N \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } n=0 \text{ 时},\end{cases}$$

定理 15 ([5]，[17])对任意 $m, n\in Z^+$，有

(1) $C_n^0=C_n^n=1$；

(2) $C_n^m=C_n^{n-m}$，其中 $n\geqslant m\geqslant 0$；

(3) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$，其中 $n>m>0$。

定理 16 (牛顿二项式定理)([5]，[17])对任意 $a, b\in R$ 和 $n\in N$，有

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.$$

当取 $a=b=1$ 或 $a=-b=1$ 时，即得下面定理中的(1)、(2)。

定理 17 ([5]，[17])所有二项式系数都是自然数，并且有

(1) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$；

(2) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$。

关于素数的概念和定理见[1]，[2]，[11]，[12]。

定义 19 大于 1 并且除 1 及其自身外没有别的整数因子的自然数称为素数或质数。其他大于 1 的自然数称为合数。数 1 既不是素数也不是合数。

定理 18 (算术基本定理) ([11]，[12]) 每个大于 1 的整数都可分解为一些素数的乘积，而且，如果不计因子的书写顺序，这种分解是唯一的。

定理 19 ([11]，[12])素数有无穷多个。

定理 20 (勒让德定理)([11]，[12])在整数 $n!$ 的素因子分解式中，素数 p 作为因子出现的次数是

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots.$$

下面三个定理是关于互素的数的性质的。

定理 21 ([11]，[12])设 $a, b, c\in Z$，$c\neq 0$。如果 $c\mid ab$ 且 $(b, c)=1$，则有 $c\mid a$。

定理 22 设 $a, b, c, m\in N$。如果 $ab=c^m$ 且 $(a, b)=1$，则 $a=a_1^m$，$b=b_1^m$，其中 $a_1b_1=c$ 且 $(a_1, b_1)=1$。

定理 23 (中国剩余定理或孙子定理) ([11]，[12]) 如果整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 都不为零，而且两两互素，则对任意整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，在任意一个长为 $m_1m_2\cdots m_k$ 的左开右闭区间中，都有整数 x，使得对每个 i，$i=1, 2, \cdots, k$，有 $x\equiv a_i(\bmod m_i)$。

定理 24 ([11]，[12])对任意两个不全为 0 的 $a, b\in Z$，存在 $p, q\in Z$，使得 $pa+qb$

$=(a, b)$.

定理 25 (费马小定理)([11], [12])如果素数 p 不能整除 $a\in Z$, 则 $p\mid(a^{p-1}-1)$.

由此即得

定理 26 ([11], [12])设 p 是素数,则对任意 $a\in Z$, 有

$$a^p\equiv a(\mathrm{mod}\ p).$$

关于连续函数的概念和性质见[1], [2], [9], [10].

定理 27 (介值定理)([10])设函数 $f:[a, b]\to R$ 在$[a, b]$上连续,且 $A=f(a)<f(b)=B$, 则对任意 $C\in(A, B)$, 存在 $c\in(a, b)$, 使得 $f(c)=C$.

由此即有下面的特例.

定理 28 (零点存在定理)([10])如果函数 $f:[a, b]\to R$ 在$[a, b]$上连续, 并且在区间的两个端点处都取非零值,但符号相反,则存在 $c\in(a, b)$, 使得 $f(c)=0$.

定理 29 ([10]) 如果函数 $f:[a, b]\to R$ 在$[a, b]$上连续, 则存在 $c\in[a, b]$, $d\in[a, b]$, 对所有 $x\in[a, b]$, 都有 $f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$.

由此即得下面的

定理 30 任意一个在有限闭区间上的连续函数,都是有界函数.

关于函数的导数的概念和定理见[9], [10].

用 I 表示直线R上的某个区间. 考虑函数 $f:I\to R$, 设 f 在每个点 $x\in I$ 处是可导的, 即有导数 $f'(x)$. 于是, 有新的函数 $f':I\to R$, 它在点 $x\in I$ 的函数值是 $f'(x)$. $f':I\to R$ 称为函数 f 的一阶导数. 如果函数 f' 在每个点 $x\in I$ 处可导, 则它的导数称为函数 f 的二阶导数. 同样可定义函数 f 的 n 阶导数,并记作 $f^{(n)}$, $n=3, 4, 5, \cdots$. 函数 f 的一阶、二阶和三阶导数通常依次记作 f'、f''、f'''.

定义 20 函数 $f:I\to R$ 称为

n 次可导的,如果 $n\in N$, 并且函数 f 在区间 I 的每个点处具有 n 阶导数;

n 次连续可导的,如果函数 f 是 n 次可导的,并且函数 $f^{(n)}$ 在区间 I 上连续;

无限可导的,如果对任意 $n\in N$, f 有 n 阶导数.

定理 31 (单调性的判定)([9], [10]) 设函数 $f:I\to R$ 在区间 I 上可导, 则函数 f 是不减(或者不增)的必要且充分条件是,对每个 $x\in I$, $f'(x)\geqslant 0$(或者 $f'(x)\leqslant 0$). 如果对每个 $x\in I$, 都有 $f'(x)>0$(或者 $f'(x)<0$), 则函数 f 是递增(或者递减)的.

定义 21 如果函数 $f:I\to R$ 满足:对任意 $x, y\in I$, 和 $\alpha\in[0, 1]$, 有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

则函数 f 称为在区间 I 上是下凸的. 如果 $g(x)=-f(x)$ 在区间 I 上是下凸的, 则 $f:I\to R$ 称为在区间 I 上是上凸的.

定理 32 (凸性的判定)([9], [10])设函数 $f:I\to R$ 在区间$[a, b]\subseteq I$ 上二次可导, 则函数 f 在该区间上是下凸(或者上凸) 的必要且充分条件是, 对每个点 $x\in I$, 有 $f''(x)\geqslant 0$(或者 $f''(x)\leqslant 0$).

定理 33 (拉格朗日中值定理)([9], [10])设函数 $f:[a, b]\to R$ 在区间$[a, b]$上连续, 并且在区间(a, b)上可导,则存在点 $c\in(a, b)$, 适合

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

下面的定理是拉格朗日中值定理的特例。

定理 34 （罗尔中值定理）（[9]，[10]）设函数 $f:[a, b]\to R$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，并且 $f(a)=f(b)$，则存在点 $c\in(a, b)$，使得 $f'(c)=0$。

关于复数的概念见[1]，[2]，[4]。

定义 22 复数集合 C 是有序实数对集合，并在其上如下定义加法及乘法运算：

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc),$$

其中 $a, b, c, d\in R$。

因为 $(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0)$，$(a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$，因此形如 $(a, 0)$ 的复数可以看成与实数 a 是相同的。复数 $(0, 1)$ 称为虚数单位，记作 i。虚数单位 i 满足

$$i^2=-1.$$

对任意复数 (a, b)，有

$$(a, b)=(a, 0)+(b, 0)(0, 1),$$

所以复数 (a, b) 通常写成为 $a+bi$。

定义 23 数 $a\in R$ 称为复数 $z=a+bi$ 的实部，记作 $a=\mathrm{Re}z$，$b\in R$ 称为复数 $z=a+bi$ 的虚部，记作 $b=I_mz$。实部为 0 的复数，即形如 bi 的数称为纯虚数。

复数的加法运算和乘法运算，与实数有相同的运算规则，即满足加法、乘法的交换律、结合律，以及乘法对加法的分配律。

复数可以用坐标平面上的点表示：以复数的实部作为横坐标，虚部作为纵坐标。

定义 24 数 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 $z=a+bi$ 的模。

定理 35 对任意复数 $z\in C$，恒有 $|z|\geqslant 0$，并且当且仅当 $z=0$ 时 $|z|=0$。对任意 $z, w\in C$，有

$$|zw|=|z|\cdot|w|.$$

定理 36 （三角形不等式）对任意 $z, w\in C$，有

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|,$$

并且等式当且仅当 $z=0$ 或者 $w=kz$，$k\geqslant 0$ 时成立。

定义 25 设 $z=a+bi$ 是非零复数。满足

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}, \sin\varphi=\frac{b}{r}$$

的角 φ 称为复数 z 的辐角（或幅角），其中 $r=|z|$。设 φ 是复数 z 的辐角，而且 $\varphi\in(-\pi, \pi]$，则称 φ 为辐角的主值，记作 $\varphi=\arg z$。

显然，辐角的主值是唯一确定的。

复数的模和辐角可以在坐标平面上表示出来，如图1.1所示。

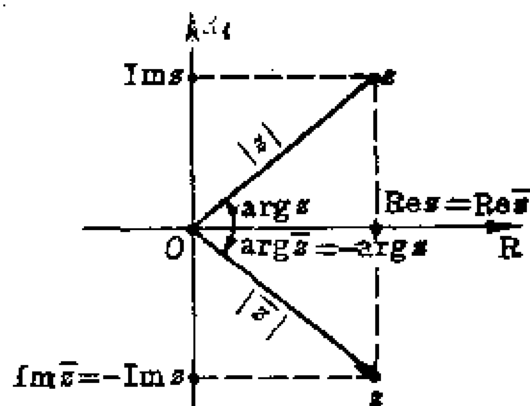


图 1.1

定理 37 （复数的三角形式）（[4]）任意非零复数 $z\in C$，都可以表为

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

其中 $r=|z|$，$\varphi=\arg z$。

定义 26 复数 $\bar{z}=a-bi$ 称为复数 $z=a+bi$ 的共轭，而 z 和 $\bar{z}$ 称为共轭复数。

定理 38 对任意复数 $z\in C$, 有

$$\mathrm{Re}\bar{z}=\mathrm{Re}z,\ \mathrm{Im}\bar{z}=-\mathrm{Im}z,\ \overline{(\bar{z})}=z.$$

而 z 为

(1) 实数当且仅当 $\bar{z}=z$ 时;

(2) 纯虚数当且仅当 $\bar{z}=-z$ 时。

在坐标平面上,复数 z 与它的共轭 $\bar{z}$ 关于实轴对称。

定理 39 ([4])对任意复数 $z, w\in C$, 有

$$|\bar{z}|=|z|,\ z\bar{z}=|z|^2,$$
$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\ \overline{zw}=\bar{z}\bar{w},$$

而且当 $z\neq 0$ 时, $\arg\bar{z}=-\arg z$; 当 $z<0$ 时, $\arg\bar{z}=\arg z=\pi$。

复数的减法及除法分别作为加法及乘法的逆运算定义的。

定理 40 ([4])如果 $z=a+bi$, $w=c+di$ 是任意两个复数, 则方程 $z+x=w$ 有唯一的复数解

$$x=(c-a)+(d-b)i,$$

它称为复数 w 和 z 的差。

定理 41 ([4])如果 $z=a+bi$, $w=c+di$ 是任意两个复数, 且 $z\neq 0$, 则方程 $zx=w$ 有唯一的复数解

$$x=\frac{w\cdot\bar{z}}{|z|^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i,$$

x 称为复数 w 除以复数 z 的商。

定理 42 ([4])对用三角形式表示的复数,有

$$(r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2))$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

由此可以得到下面两个定理。

定理 43 (棣莫佛定理)([4])对复数的 n 次幂, $n\in N$, 有

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

定理 44 ([4])对任意非零的复数 $z\in C$ 和任意的 $n\in N$, 方程 $x^n=z$ 恰有 n 个复数解,它们称为复数 z 的 n 次方根。数 1 的 n 次方根叫做 n 次单位根,它们是

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k\in\{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

定义 27 如果实变数或复变数 x 的数值函数 f 在其定义域上满足 $f(-x)=f(x)$ (或者 $f(-x)=-f(x)$), 则函数 f 称为偶函数(或者奇函数)。

关于多项式的概念和定理见[1], [2], [5], [15], [16]。

定义 28 一元多项式是一个实变数或者复变数 x 的函数,它具有如下的形式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $n\in Z^+$, $a_0, a_1, \cdots, a_n\in C$, 并且当 $n\geq 1$ 时, $a_n\neq 0$。

定理 45 两个多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$Q(x)=b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0$$

当且仅当 $n=m$ 并且 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\cdots$, $a_n=b_n$ 时相等(即作为函数是相重合的)。

定义 29 数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 称为多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数。a_0 称为常数项，a_n 称为首项系数或最高次项系数。如果 $n\geqslant1$，则 n 称为多项式 $P(x)$ 的次数；如果多项式 $P(x)=a_0$，则当 $a_0\neq0$ 时，$P(x)$ 的次数为 0，而当 $a_0=0$ 时，$P(x)$ 的次数为 -1。多项式 $P(x)$ 的次数记作 $\deg P$。

定理 46 ([15], [16])设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是任意的多项式，则

(1) 函数 $T(x)=P(x)+Q(x)$ 仍是多项式，并且

$$\deg T\leqslant\max(\deg P, \deg Q),$$

当 $\deg P\neq\deg Q$ 时，

$$\deg T=\max(\deg P, \deg Q).$$

(2) 函数 $W(z)=P(x)\cdot Q(x)$ 仍是多项式，如果 $P(x)\neq0$, $Q(x)\neq0$，则 $w(x)\neq0$，而且

$$\deg W=\deg P+\deg Q.$$

定义 30 方程 $P(x)=0$ 的解，称为多项式 $P(x)$ 的根。

多项式和整数一样可以进行带余除法，并由此可以引出下面的定义和定理。

定理 47 ([15], [16])任意给定两个多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，并且 $Q(x)\neq0$，则存在唯一的一对多项式 $S(x)$ 和 $R(x)$，适合

(1) $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$;

(2) $\deg R<\deg Q$.

定义 31 在定理 47 中，多项式 $R(x)$ 称为多项式 $P(x)$ 除以多项式 $Q(x)$ 的余式。如果 $R(x)\equiv0$，则称多项式 $P(x)$ 被多项式 $Q(x)$ 整除。

定理 48 在定理 47 中，如果多项式 P 和 Q 的系数都是实数，则多项式 S 和 R 的系数同样都是实数；如果 P 和 Q 的系数都是有理数，则 S 和 R 的系数同样都是有理数；如果 P 和 Q 的系数都是整数，而且多项式 Q 的首项系数等于 1 或者 -1，则 S 和 R 的系数同样都是整数。

定理 49 (裴蜀定理)([16])多项式 $P(x)$ 除以多项式 $x-x_0$ 的余式等于 $P(x_0)$。

裴蜀定理也称为余式定理。

由裴蜀定理可得下面的

定理 50 (因式定理)([15]) 多项式 $P(x)$ 被多项式 $x-x_0$ 整除的必要且充分条件是：数 x_0 是 $P(x)$ 的根。

定义 32 如果多项式 $P(x)$ 被多项式 $(x-x_0)^k$ 整除，但多项式 $(x-x_0)^{k+1}$ 不能整除 $P(x)$, $k\in N$，则 x_0 称为 $P(x)$ 的 k 重根。

如果多项式 $P(x)$ 的每个根都在数组(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)中出现，而且重根按重数计算，而不出现在这个数组中的任意一个数都不是 $P(x)$ 的根，则称多项式 $P(x)$ 具有根 x_1, x_2, $\cdots$, x_n。

定理 51 (代数基本定理)([5], [15], [16]) 任意一个次数为 $n\geqslant1$ 的多项式恰有 n 个复数根。

由此得到下面的特例，即定理 52、53、54。

定理 52 ([15]) 如果两个次数都不大于 n 的多项式在 $n+1$ 个点处的值是相同的，则这两个多项式相等。

定理 53 ([5], [15])任意一个次数为 $n\geqslant 0$ 的多项式 $P(x)$ 都可以表为

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

如果不计因式书写的顺序，这种表示是唯一的，其中 a_n 是 $P(x)$ 的首项系数，而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $P(x)$ 的根。

定理 54 多项式 $P(x)$ 被多项式 $Q(x)$ 整除的必要且充分条件是，多项式 $Q(x)$ 的每个根都是 $P(x)$ 的根，而且重数不增加。

定理 55 (韦达定理)([5], [15])设多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

具有根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

定理 55 的逆定理也成立，即有

定理 56 ([5])设数 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in C$ 满足定理 55 的方程组，则它们是多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

的根。

定理 57 ([5], [16])设 $P(x)$ 是实系数多项式。如果 $z=a+bi\,(b\neq 0)$ 是 $P(x)$ 的 k 重根，则复数 $\bar{z}=a-bi$ 也是 $P(x)$ 的 k 重根，而且多项式 $P(x)$ 被多项式

$$(x-z)^k(x-\bar{z})^k=(x^2-2x\mathrm{Re}z+|z|^2)^k$$

整除。

对实系数多项式，有与定理 53 类似的结论。

定理 58 (实系数多项式因式分解定理)([15])任意一个 n 次实系数多项式 $P(x)$ 都可以表为

$$P(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_m)(x^2+2b_1x+c_1)\cdots(x^2+2b_lx+c_l),$$

如果不计因式书写的顺序，这种表示是唯一的，其中 $m, l\geqslant 0$, $m+2l=n$, a_n 是多项式 $P(x)$ 的首项系数，$x_1, x_2, \cdots, x_m\in R$ 是 $P(x)$ 的全部实根，重根按重数计算，而 $b_1, \cdots, b_l, c_1, \cdots, c_l\in R$, 并且二次三项式

$$x^2+2b_1x+c_1, \cdots, x^2+2b_lx+c_l$$

都没有实根，即有 $b_1^2<c_1, \cdots, b_l^2<c_l$。

定理 59 ([5], [15]) 如果既约分数 $\dfrac{p}{q}$, $(p, q)=1$, 是整系数多项式 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 的根，则 $p\,|\,a_0$, $q\,|\,a_n$。

由此有下面两个结论。

定理 60 整系数多项式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
的每一个根，要么是整数，要么是无理数。

定理 61 如果 $a, n\in N$，则数 $\sqrt[n]{a}$ 要么是整数，要么是无理数。

定理 62 （拉格朗日插值多项式）（[16]）给定两两不同的数 $b_0, b_1, \cdots, b_n\in C$ 以及任意的 $c_0, c_1, \cdots, c_n\in C$，$n\in Z^+$，则存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $P(x)$，使得
$$P(b_0)=c_0,\ P(b_1)=c_1,\ \cdots,\ P(b_n)=c_n.$$
而且 $P(x)$ 具有如下形式
$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\frac{x-b_j}{b_i-b_j}.$$
应用导数公式（[5]，[10]），可得下面的多项式与它的导数之间的联系。

定理 63 给定多项式
$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$
则有
$$P(0)=a_0,\ P'(0)=a_1,\ P''(0)=2a_2,\ \cdots,\ P^{(n)}(0)=n!a_n,$$
并且原多项式可以写成
$$P(x)=\frac{P(0)}{0!}+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

定义 33 设 $n\in N$。n 元多项式是有限多个形如
$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$
的实变数或者复变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数之和，其中 $a\in C$，$k_1, k_2, \cdots, k_n\in Z^+$。

有关平面几何的概念和定理见[1]，[2]，[6]，[7]。

定理 64 （三角形不等式）（[6]）对任意三个点 A, B, C，有
$$AB\leqslant AC+BC,$$
等式当且仅当点 C 落在线段 AB 上或者这三个点重合时成立。

在下面两个定义中，所说的集合都指平面上或空间中点的集合。

定义 34 集合的直径是指两个端点都属于这个集合且长度达到最大值的线段。

一个集合，可能有几条的直径，也可能没有直径。

定义 35 如果对集合 A 中的任意两点，以这两点为端点的线段包含在 A 里，则集合 A 称为是凸的。

本书提到多边形时，通常指任意的多边形，而未必是凸多边形。如果所考虑的是凸多边形，将特别说明。多边形也叫多角形。

定理 65 （内角和定理）（[6]）任意一个 n 边形（$n\geqslant3$）的 n 个内角和等于 $(n-2)\cdot180°$。

定义 36 设 A，B，C 是凸多边形上 3 个连续的顶点。在边 AB、CB 的延长线上各任取点 D、E，如图 1.2，则 $\angle ABE$、$\angle CBD$ 称为这个多边形在顶点 B 处的外角。它们都与多边形的内角 $\angle ABC$ 互补。

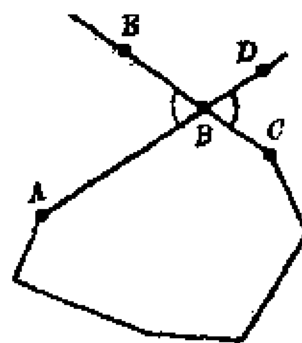


图 1.2

由内角和定理可以得到下面的

定理 66 凸多边形的所有外角之和等于 360°。这里，在每个顶点处只计算一个外角。

定义 37 设 $M, M_1, M_2, \cdots, M_n$ 是多边形。如果 $M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n$，并且当 $i\neq j$ 时，多边形 M_i 和 M_j 没有公共内点，则称多边形M分解为多边形 $M_1, M_2, \cdots, M_n$。

定义 38 如果多边形m的所有顶点都在多边形M的边上，则称多边形m内接于多边形M。

定理 67 （[7]）凸四边形 $ABCD$ 内接于圆的必要且充分条件是

$$\angle ABC+\angle CDA=\angle BAD+\angle DCB=180°.$$

定理 68 （[7]）凸四边形 $ABCD$ 外切于圆的必要且充分条件是

$$AB+CD=BC+AD.$$

定理 69 （托勒致定理）如果四边形 $ABCD$ 内接于圆，则有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

设A和B是内接于圆的多边形的两个相邻顶点，如果没有其他的说明，则弧 $\widehat{AB}$ 是指圆周上端点为A和B而且不含多边形其他的顶点的那一条弧。

定理 70 （圆周角定理）（[7]）对内接于圆的 $\triangle ABC$，有

$$\angle ABC=\frac{\widehat{AC}}{2}.$$

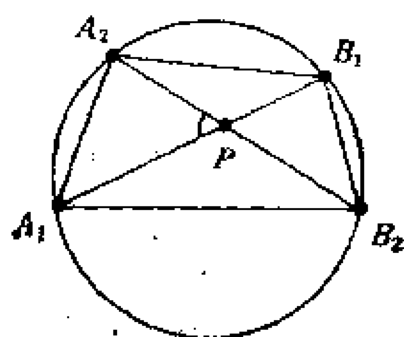


图 1.3

定理 71 设圆内接四边形 $A_1A_2B_1B_2$ 的对角线交于点 P，如图 1.3，则有

(1) $A_1P\cdot B_1P=A_2P\cdot B_2P$（相交弦定理）（[7]）；

(2) $\angle A_1PA_2=\frac{1}{2}(\widehat{A_1A_2}+\widehat{B_1B_2})$。

定理 72 设四边形 $A_1B_1B_2A_2$ 内接于圆，则

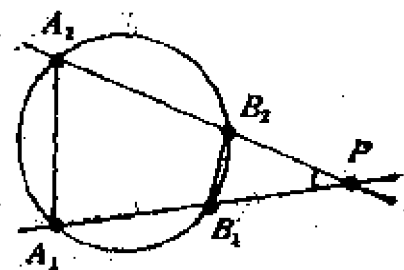


图 1.4

(1) 当且仅当 $\widehat{A_1A_2}=\widehat{B_1B_2}$ 时，直线 A_1B_1 平行直线 A_2B_2；

(2) 直线 A_1B_1 和 A_2B_2 交于点 P，并且点P位于由直线 A_1A_2 引出且含线段 B_1B_2 的那个半平面上的必要且充分条件是 $\widehat{A_1A_2}>\widehat{B_1B_2}$。此时（见图 1.4）有

1) $A_1P\cdot B_1P=A_2P\cdot B_2P$（割线定理）（[7]）；

2) $\angle A_1PA_2=\frac{1}{2}(\widehat{A_1A_2}-\widehat{B_1B_2})$。

从点P到圆的切线长是指点P到切点的距离。可以将切线看成割线的极限位置，当割线和圆的两个交点汇合成一个点时，割线即成为切线。因此，由定理 72 可以推出下面的

定理 73 设$\triangle ABC$ 内接于圆，直线 l 切圆于点 C，则

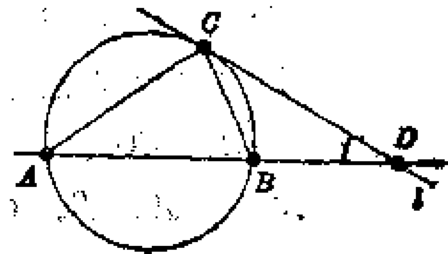


图 1.5

(1) 当且仅当 $AC=BC$ 时，直线 l 平行 AB；

(2) 直线 l 和 AB 交于点 P，并且点P位于由直线 AC 引出的且含点B的那个半平面上的必要且充分条件是 $\widehat{AC}>\widehat{BC}$。此时有（见图 1.5）

1) $AP\cdot BP=CP^2$（切割线定理）（[7]）；

2) $\angle APC=\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BC})$。

从定理 70，71(2)，72(б)(2)，73(б)(2)，可以得出下面的结论。

定理 74 给定线段 AB，α 是由直线 AB 引出的一个半平面．设 $\varphi\in(0°, 180°)$，则半平面 α 中满足 $\angle AMB=\varphi$ 的点M组成的集合是某个圆周上以 A 和 B 为端点的圆弧．而且，当点 $N\in\alpha$ 位于该圆的内部时，$\angle ANB>\varphi$；当 N 位于外部时，$\angle ANB<\varphi$．

定理 75 设在 $\triangle ABC$ 中，

$$a=BC,\ b=AC,\ c=AB$$

是三边的长，而

$$\alpha=\angle BAC,\ \beta=\angle ABC,\ \gamma=\angle ACB$$

是三个角，

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

是半周长，r 是内切圆的半径，R 是外接圆半径，h_a 是边 BC 上的高，r_a 是和边 BC 以及边 AB、AC 的延长线相切的旁切圆的半径，则 $\triangle ABC$ 的面积 S 可以用下列公式计算：

(1) $S=\frac{1}{2}ah_a$([6])；

(2) $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$；

(3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$(海仑公式)；

(4) $S=\frac{abc}{4R}$；

(5) $S=rp$；

(6) $S=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$；

(7) $S=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$；

(8) $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$．

其中公式(5)对于任何半周长为 p 且具有半径为 r 的内切圆的多边形都成立．

应用外公切线定理([7])，可得

定理 76 设 a 和 b 是直角三角形的两条直角边，c 是它的斜边，r 是内切圆半径，R 是外接圆半径，则

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c),\quad R=\frac{c}{2}.$$

定理 77 (三角形内角平分线性质定理)([7])设 AL 是 $\triangle ABC$ 角 A 的平分线，则

$$\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}.$$

应用熟知的余弦定理可得

定理 78 (平行四边形等式)设 $ABCD$ 是平行四边形，则

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2.$$

利用勾股定理([6])可得

定理 79 对任意的点P和任意的矩形 $ABCD$，都有

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

有关向量的概念见[1]、[2]、[10]．在直线上的射影(也称投影)都指直交投影，见[8]，

[10]。

定理 80 设线段 AB 与直线 l 的交角为 φ，则线段 AB 在 l 上的射影

$$A_1B_1 = AB\cos\varphi.$$

设 $\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$ 是两个向量，以 $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}$ 表示 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 和 $\overrightarrow{A_2B_2}$ 的数量积（[1]，[2]，[10]）。

定理 81 设 $\boldsymbol{a}$ 是平面上的非零向量，O 是该平面上一个点，则对任意的 $k\in R$，该平面上所有满足 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OX}=k$ 的点 X 组成的集合是一条垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线。

定理 82 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是任意一组点，而 $k_1, k_2, \cdots, k_n\in R$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_n\neq 0$，则存在唯一的点 O，使得

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0},$$

而且对任意一点 P，都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\overrightarrow{PO}=\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{PA_i}.$$

如果点 A_i 在空间直角坐标系中的坐标为 (a_i, b_i, c_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，则点 O 的坐标 (x_1, x_2, x_3) 是

$$x_1=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_ik_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i},\quad x_2=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_ik_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i},\quad x_3=\frac{\sum_{i=1}^{n} c_ik_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}.$$

基于这个定理，可以给出下面三个定义。

定义 39 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0}$$

的点 O 称为点组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的重心。

定义 40 满足

$$\sum_{i=1}^{n} l_i\overrightarrow{OM_i}=\mathbf{0}$$

的点 O 称为一组线段 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_nB_n$ 的重心，其中 l_i 是线段 A_iB_i 的长，而 M_i 是它的中点，$i=1, 2, \cdots, n$。

定义 41 满足

$$\sum_{i=1}^{n} S_i\overrightarrow{OM_i}=\mathbf{0}$$

的点 O 称为一组三角形 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \cdots, \triangle A_nB_nC_n$ 的重心，其中 S_i 是 $\triangle A_iB_iC_i$ 的面积，而 M_i 是它的三条中线的交点。

利用定理 82 和定义 40，可以导出下面的

定理 83 设 M 是三角形 ABC 的中线的交点，则对空间中的任意一个点 P，都有

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}).$$

关于立体几何的概念和定理见[1]，[2]，[8]，[13]。

对于二面角的平面角，有与三角形不等式类似的结论，即

定理 84 （[8]）任意一个三面角的三个平面角 φ, ψ, χ，满足 $\varphi<\psi+\chi$。

定理 85 ([8])任意一个凸多面体的平面角之和小于 360°。

定义 42 如果多面体 m 的所有顶点都在多面体 M 的面上，则称 m 为内接于多面体 M 的多面体。

定理 86 ([13]第366题)设三条不共面的直线都过点 A，而 B_1 和 B_2、C_1 和 C_2、D_1 和 D_2 分别是这三条直线上 A 之外的点。以 V_1 和 V_2 分别记四面体 $AB_1C_1D_1$ 和 $AB_2C_2D_2$ 的体积，则有

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1}{AB_2\cdot AC_2\cdot AD_2}.$$

利用四面体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}hS$$

(S 是底面面积，h 是它的高)可以得到

定理 87 设 S_1 和 S_2 是四面体 $ABCD$ 的两个面的面积，φ 是它们之间的二面角的大小，a 是它们的公共棱的长，则四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3a}.$$

又设点 E, F, G, H 依次是棱 AB, BC, CD, DA 的中点，S 是平行四边形 $EFGH$ 的面积，a、b 是两条对棱 AC、BD 的长，d、ψ 是两条对棱 AC 和 BD 的距离、夹角，则有([13]第360题)

$$V=\frac{2}{3}Sd=\frac{1}{6}abd\sin\psi。$$

定理 88 ([8], [13])棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}hS_0,$$

其中 S_0 是棱锥底面的面积，h 是它的高。如果存在一个球，它和棱锥的底面以及其他每个侧面延伸到棱锥外的部分都相切，则这个棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}r_0(Q-S_0),$$

其中 r_0 是该球的半径，Q 是棱锥的表面积。

应用棱锥体积公式，并以球心为公共顶点分割多面体，可以得到

定理 89 ([13]第611题)外切于半径为 r 的球的多面体的体积为

$$V=\frac{1}{3}rS,$$

其中 S 是多面体的表面积。

定理 88 和 89 的所有公式对四面体成立。

关于在平面上的射影(也称投影)的概念，见[1], [2], [8], [10]。凡提到在平面上的投影，都指正投影。

应用定理 80，有

定理 90 设平面 α 和 β 相交，其二面角为 φ。在平面 α 上取面积为 S 的图形，则这个图形在平面 β 上的投影的面积为 $S\cos\varphi$。

与定理 81 比较，在空间中有下面的结论。

定理 91 设a是空间中的非零向量，O是任意一个点，则对每个$k\in R$，空间中满足$a\cdot\overrightarrow{OX}=k$的点$X$组成的集合是与$a$垂直的平面。

定理 92 ([13]第329题)在四面体$ABCD$中，联结三对对棱的中点，得到三条线段，它们交于一点，设为点M，则点M是这三条线段的每一条线段的中点，并且对任意的点P，有

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}).$$

定理 93 ([8]，[18])(欧拉定理)设l是某凸多面体顶点的个数，m是它的棱的条数，n是它的面的个数，则有

$$l-m+n=2.$$

关于图论的概念和定理见[18]。

定义 43 给定一个图，是指：首先给定一个集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，集合中的元素叫做顶点，其次给定一个由集合$A$的元素构成的元素对的集合，这个集合的元素称为棱或边。如果元素对是有序的，这种图就叫有向图；如果元素对是无序的，这种图就叫无向图。

下面是无向图的一个例子：图的顶点集合由某些人组成，它的棱是彼此认识的两个人组成的无序对。在这里，认识关系看成是对称的，即如果a认识b，则b也认识a。

图可以用几何方法表示：图的每个顶点可以用平面上或者空间中的点表示，而每条棱用联结相应的两点的线段表示，如果是有向图，则在线段上添加箭头表示方向。

定义 44 在顶点为$a_1, a_2, \cdots, a_n$的图中，形如

$$(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), \cdots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_1})$$

的k条不同的棱组成的序列，叫做长为k的圈。

定理 94 ([18])在恰含n个顶点和n条棱的图中至少有一个圈。

有关排列与组合的概念和公式见[1]，[2]，[5]，[17]。

定义 45 如果两个元素组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$由相同的元素组成，不同的只能是元素的书写顺序，则其中之一称为另一个的排列。

定理 95 (全排列公式)([5]，[17])由n个不同元素作成的元素组的排列数等于$n!$。

定理 96 (组合数公式)([5]，[17])n元集合的m元子集的个数等于C_n^m，其中$0\leqslant m\leqslant n$。

数C_n^m也叫做从n个不同的物品中取出m个的组合数。

由定理17(1)和定理96可以得到下面的结论。

定理 97 n元集合的所有子集的个数等于2^n。

关于初等概率的概念见[1]，[2]，[5]，[19]，[20]。

定义 46 假定进行一种试验E，这种试验可以重复进行。如果试验的结果相当于随机地从集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中取出某一个元素$a_i$(此时说出现结果$a_i$)，则把这种试验叫做随机试验。集合$A$的任意一个子集$B\subseteq A$，称为这种随机试验$E$下的随机事件，简称为事件。称在随机试验$E$下发生事件$B$，即指试验出现的结果$a\in B$。如果对$A$中任意两个元素$a_i$和$a_j$，在随机试验$E$下出现结果$a_i$与出现结果$a_j$是等可能的，那么，事件$B\subseteq A$发生的概率用下面的公式计算

$$P(B)=\frac{m}{n},$$

其中 n、m 分别是集合 A、B 中元素的个数。

例如，随机地投掷一枚硬币的结果相当于随机地从集合 $A=\{$"国徽"，"文字"$\}$ 中取出一个元素，并且出现"国徽"与出现"文字"是等可能的，因此，$P(\{\text{"国徽"}\})=\frac{1}{2}$。还可以举出别的例子：从箱子中随机取球，从给定的点集的全部三点组中随机取出三点组，对给定的元素组进行随机排列，等等。

定理 98 ([5], [19], [20]) 任意一个事件 B 发生的概率都满足 $0\leqslant P(B)\leqslant 1$；事件 B 不发生的概率为 $1-P(B)$。如果事件 B 和 C 不可能同时发生(称 B 与 C 互斥)，则事件 B 或 C 发生的概率为 $P(B)+P(C)$；如果事件 B 是否发生并不影响事件 C 发生的概率，事件 C 是否发生也不影响事件 B 发生的概率(此时事件 B 与 C 相互独立)，则事件 B 和 C 同时发生的概率为 $P(B)P(C)$。

定义 46 中所说的随机试验 E 可以和定义在 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的某个函数 $X: A\to R$ 相联系。这个函数的取值，依赖于在随机试验 E 下出现的结果。因为出现的结果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是随机的，所以 $X: A\to R$ 的取值，对于随机试验 E 来说，也是随机的。因此，这种函数称为随机的，而数 $X(a_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 的算术平均值称为这个函数的平均，或者称为数学期望。例如，如果投掷一枚硬币 k 次，则出现"国徽"的次数是随机函数，它取值为 $0, 1, 2, \cdots, k$。究竟取什么数值，则依赖于随机投掷所出现的结果。

定义 47 随机变量是指这样的变量，它的所有可能的取值组成一个有限的数集合或一个无限多个数的数集合，而且从这数集中取任何一个值，都是一个具有确定概率的随机事件。

定义 48 设随机变量 X 依次以概率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，而且

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1,$$

则数

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n}p_kx_k$$

称为随机变量 X 的平均或数学期望。

定义 49 设随机变量 X 取无数多个值 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，并且取值 x_k 的概率为 $p_k(k=1, 2, 3, \cdots)$，$p_1+p_2+p_3+\cdots=1$。则当极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p_kx_k$$

存在时，这个极限值称为随机变量 X 的平均或数学期望，记作 $M(X)$。

定理 99 ([19], [20]) 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的和的数学期望等于它们的数学期望之和，即有

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}M(X_i).$$

定义 50 设 B、C 是两个随机事件。在事件 B 发生的条件下，发生事件 C 的概率记作 $P(C|B)$，称为条件概率。设 X 是随机变量，B 是随机事件。在随机事件 B 发生的条件下，随机变量 X 的取值仍然是随机的，因而仍然是一个随机变量，记为 X_B。随机变量 X_B 取值为 x 的概率是条件概率，即

$$P(X_B=x)=P(X=x|B).$$

在事件B发生的条件下发生事件C的概率$P(C|B)$不同于事件C发生的概率$P(C)$。比如，在一个盒子里有l个白球和m个黑球，从中随机地取一球，取出黑球(记作C)的概率

$$P(C)=\frac{m}{l+m}.$$

如果从盒子里已经取出一个球，是黑球，再从中取出一球是黑球的概率是$\frac{m-1}{l+m-1}$。

应用条件概率的计算公式([19]，[20])和数学期望的定义，可以得出下面的结论。

定理 100 设两个事件B和C不能同时发生，但其中之一必发生（称B与C为对立事件)，则对任意的随机变量X，有

$$M(X)=P(B)M(X_B)+P(C)M(X_C).$$

第二部分　题　目

第一章　算　术

§1　整除性、素数与合数

(见第一部分,定义 11～16, 19;定理 1,4,9～12,14,18,19,21,23,25)

1.1 (英国，1968)．设 $a_1, a_2, \cdots, a_7$ 是整数，$b_1, b_2, \cdots, b_7$ 是它们的一个排列．证明,数 $(a_1-b_1)\cdot(a_2-b_2)\cdots(a_7-b_7)$ 是偶数．

1.2 (美国纽约,1976)．设 $a, a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是任意整数．试问:整数

$$\sum_{k=0}^{n}(a^2+1)^{3k}a_k$$

被 a^2+a+1(或被 a^2-a+1)整除的必要且充分条件是数

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

被 a^2+a+1(或被 a^2-a+1)整除,对否?

1.3 (捷克,1952;英国,1965)．在无限的"三角形"表

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{1,0} & & & \\ & & a_{2,-1} & a_{2,0} & a_{2,1} & & \\ & a_{3,-2} & a_{3,-1} & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & \\ a_{4,-3} & a_{4,-2} & a_{4,-1} & a_{4,0} & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

中,$a_{1,0}=1$, 位于第 n 行($n\in N$, $n>1$)第 k 列($k\in Z$, $|k|<n$) 的数 $a_{n,k}$ 等于上一行三个数之和 $a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}$(如果这些数中有的不在表内,则在和式令它为 0)．证明,从第三行起的每一行中都至少含有一个偶数．

1.4 (中国安徽省,1978)．证明,在任意五个整数中,必有三个数，它们的和能被 3 整除．

1.5 (捷克,1971)．对任意素数 $p>2$, 分数

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

$(m, n\in N)$的分子 m 被 p 整除．

1.6 (美国纽约,1975)．证明,对每个整数 $n>1$, 数 n^n-n^2+n-1 被 $(n-1)^2$ 整除．

1.7 (苏联,1987)．证明,对任意 $n\in N$,

$$1^{1987}+2^{1987}+\cdots+n^{1987}$$

都不被 $n+2$ 整除。

1.8 (保加利亚,1965)。证明，仅有一个由大于1的自然数组成的三数组具有下列性质，即其中任意二数之积再加1被第三数整除。

1.9 (苏联,1982)。是否存在这样的自然数，它被 $\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}=a_m$ 整除，而且各位数字之和小于 m？

1.10 (英国,1976)。证明，对任意 $n\in Z^+$，$19\cdot8^n+17$ 是合数。

1.11 (加拿大,1983)。证明，对任意素数 p，存在无限多个形如 2^n-n 的数(其中 $n\in N$)被 p 整除。

1.12 (捷克,1973)。证明，存在无限多个 $n\in N$，使得任意形如 m^4+n 的数是合数，其中 $m\in N$。

1.13 (捷克, 1979)。求出所有不超过 10 000 000 且具有下述性质的自然数 $n>2$：任何与 n 互素且满足 $1<m<n$ 的数 m 都是素数。

1.14 (联邦德国,1977)。设 $a>1$ 是自然数。试求所有这样的数，它至少整除一个

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}a^k,\ n\in N.$$

1.15 (美国纽约,1974)。对给定的自然数 m 与 n，$m<n$，试确定：是否任意一个由 n 个连续整数组成的集合都含有两个不同的数，它们之积被 mn 整除。

1.16 (美国纽约, 1976)。设 $f(n)\in N$ 是使和 $\sum\limits_{k=1}^{f(n)}k$ 能被 n 整除的最小数。证明，当且仅当 $n=2^m$ 时 $f(n)=2n-1$，其中 $m\in Z^+$。

1.17 (评委会,联邦德国,1979；保加利亚,1981)。证明，如果 $1+2^n+4^n$ 是素数，$n\in N$，则 $n=3^k$，其中 $k\in Z^+$。

1.18 (罗马尼亚, 1978)。设 $m, n\in N$ 满足：对任意 $k\in N$，$11k-1$ 与 m 和 $11k-1$ 与 n 具有相同的最大公因数。证明，存在某个 $l\in Z$，使 $m=11^l n$。

1.19 (美国纽约,1975)。设 $a, b, c, d\in Z$ 的最大公因数为1。试问：$ad-bc$ 的任何素因数都是 a 与 c 的因数的必要且充分条件为，对每个 $n\in Z$，$an+b$ 与 $cn+d$ 都互素，对否？

1.20* (美国,1982)。证明，存在 $k\in N$，使得对每个 $n\in N$，$k\cdot2^n+1$ 都是合数。

1.21* (罗马尼亚,1978)。证明，对大于2的任意 $a\in N$，存在无限多个 $n\in N$，使得 a^n-1 被 n 整除，当 $a=2$ 时结论仍成立否？

1.22* (评委会,比利时,1983)。证明，存在无限多个 $n\in N$，使得对 $k=1, 2, \cdots, n-1$，有

$$\frac{\sigma(n)}{n}>\frac{\sigma(k)}{k},$$

其中 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有因数之和。

1.23* (匈牙利, 1982)。对给定的自然数 $k>1$，$n, n+1, \cdots, n+k$ 的最小公倍数记作 $Q(n)$，$n\in N$。证明，存在无限多个 $n\in N$，使得 $Q(n)>Q(n+1)$。

1.24* (奥地利,1973)。证明，对任意 $n\in N$，有

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{k}-\frac{2n}{3}<\frac{2}{3},$$

其中 $g(k)$ 表示 k 的最大奇因数。

1.25* （评委会，南斯拉夫，1979）。设 $h(n)$ 表示 $n\in N$ 的最大素因数。是否有无限多个 n，使得 $h(n)<h(n+1)<h(n+2)$？

1.26* （评委会，南斯拉夫，1979）。设 $\omega(n)$ 表示自然数 n 的素因数的个数，$n>1$。证明，有无限多个 n，使得

$$\omega(n)<\omega(n+1)<\omega(n+2).$$

§2 方程的整数解和有理数解

（见第一部分，定义 11, 12, 14～16, 45，定理 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 18, 21～23, 25, 60, 61, 96）

2.1 （美国纽约，1977）。求方程 $2^x+1=y^2$ 的自然数解。

2.2 （英国，1972）。证明，对任意 $a, b, c, d\in Z$，$a\neq b$，方程

$$(x+ay+c)(x+by+d)=2$$

至多有四个整数解。再确定 a, b, c, d，使得方程恰有四个不同的解。

2.3 （民主德国，1973）。求方程 $x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2$ 的整数解。

2.4 （罗马尼亚，1981）。求方程 $x^6+3x^3+1=y^4$ 的整数解。

2.5 （南斯拉夫，1974）。求方程 $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ 的整数解。

2.6 （民主德国，1974）。求方程 $(x+2)^4-x^4=y^3$ 的整数解。

2.7 （美国，1979）。求方程 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ 的整数解。

2.8 （中国北京，1978）。设 a 与 b 是任意给定的整数。证明，方程

$$x^2+10ax+5b+3=0$$

和

$$x^2+10ax+5b-3=0$$

都没有整数解。

2.9 （民主德国，1970；罗马尼亚，1980）。证明，对任意奇数 $a, b, c\in Z$，方程

$$ax^2+bx+c=0$$

没有有理数解。

2.10 （英国，1970）。求方程 $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$ 的有理数解。

2.11 （巴西，1983）。证明，方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1983}$$

只有有限多个自然数解。

2.12 （南斯拉夫，1981）。证明，对任意 $a, b\in Z$，$5a\geqslant 7b\geqslant 0$，方程组

$$\begin{cases}x+2y+3z+7u=a\\ \quad\ \ y+2z+5u=b\end{cases}$$

有非负整数解。

2.13 （中国，1978）。求方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x^3+y^3-z^3=-18\end{cases}$$

的整数解。

2.14 （民主德国，1977）。有多少对不超过 100 的数 $p, q\in N$，使得方程 $x^5+px+q=0$ 有有理数解？

2.15 （捷克，1976）。求方程 $x^2+y^2=3z^2$ 的整数解。

2.16 （匈牙利，1983）。证明，方程 $x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$ 有唯一有理数解。

2.17 （美国，1976）。求方程 $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ 的整数解。

2.18 （英国，1970）。对给定的 $n\in N$，用 $a_n\in Z^+$ 表示方程 $n^2+x^2=y^2$ 的大于 n 的自然数解的个数。

(1) 证明，对任意给定的数 M，至少有一个 $n\in N$，使得 $a_n>M$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，对否？

2.19 （匈牙利，1977）。证明，对任意素数 $p>5$，方程 $x^4+4^x=p$ 没有整数解。

2.20 （民主德国，1980）。证明，方程 $(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$ 没有自然数解。

2.21 （民主德国，1981）。证明，对任意 $n\in N$，方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y^2$ 都有自然数解。

2.22 （中国，1985）。方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 有多少个非负整数解？

2.23 （评委会，罗马尼亚，1977）。设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\in N$，且 a_i 与 a_{n+1} 互素，$i=1, 2, \cdots, n$。证明，方程 $x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\cdots+x_n^{a_n}=x_{n+1}^{a_{n+1}}$ 有无限多个自然数解。

2.24 （评委会，法国，1979）。证明，对任意 $a, b, c\in N$，$(a, b)=1$，且 $c\geqslant(a-1)(b-1)$，方程 $c=ax+by$ 有非负整数解。

2.25 （苏联，1988）。证明，方程 $x-y+z=1$ 具有无限多个正整数解 x, y, z，其中 x, y, z 两两不同，并且任意两个之积都被第三个整除。

2.26 （匈牙利，1978）。证明，对任意 $a, b\in Q$，方程 $ax^2+by^2=1$ 在有理数范围内要么无解，要么有无限多个解。

2.27 （评委会，罗马尼亚，1979）。证明，对任意互素的 $a, b\in Z$，方程 $ax^2+by^2=z^3$ 有无限多个整数解满足条件 $(x, y)=1$。

2.28 （英国，1980）。证明，对任意大于 1 的 $n\in N$，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有适合条件 $x\leqslant n, y\leqslant n$ 的自然数解。

2.29* （奥地利，1972）。证明，对任意大于 2 的 $n\in N$，方程 $x^n+(x+1)^n=(x+2)^n$ 没有自然数解。

2.30* （美国纽约，1981）。求方程 $x^{x+y}=(x+y)^y$ 的正有理数解。

2.31 （苏联，1988）。求方程

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$$

的整数解。

2.32* （匈牙利，1980，保加利亚，1981）。证明，如果 $n\in N$ 是奇数，则当且仅当 $n=m(4k-1)$ 时方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$$

有自然数解，其中 $m, k\in N$。

2.33* （评委会，加拿大，1982）。证明，所有使方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{n}$$

没有自然数解的 $n\in N$ 的集合不能表成有限个算术级数(不论有限或无限)之集合的并集。

2.34* （保加利亚，1979）。证明，方程 $x^2+5=y^3$ 没有整数解。

§3 阶乘与二项式系数

（见第一部分，定义 11, 12, 14～18；定理 2, 4, 8, 12, 13, 15～17, 20, 21, 96）

3.1 （荷兰，1982）。$(17091982!)^2$ 与 $17091982^{17091982}$ 哪一个大？

3.2 （南斯拉夫，1974）。求所有的 $n\in N$，使得对某个 $k\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，有 $2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$。

3.3 （加拿大，1983）。求方程 $x!+y!+z!=u!$ 的自然数解。

3.4 （评委会，美国，1982）。证明，对任意 $n\in N$，均有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}=(C_{2n}^n)^2.$$

3.5 （评委会，澳大利亚，1982）。给定 $m\in N$。

(1) 证明，$\frac{1}{m+1}C_{2m}^m$ 是自然数。

(2) 求最小的 $k\in N$，使得对每个自然数 $n\geqslant m$，$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}$ 为自然数。

3.6 （美国纽约，1974）。证明，对任意自然数 $n\geqslant k$，$C_n^k, C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k}^k$ 的最大公因数等于1。

3.7 （英国，1981）。证明，对任意 $m, n\in N$，

$$S_{m,n}=1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$$

都被 $m!$ 整除。但对某些 $m, n\in N$，$S_{m,n}$ 不被 $m!(n+1)$ 整除。

3.8 （南斯拉夫，1970）。证明，如果 p 是素数，则 C_{2p}^p-2 被 p^2 整除。

3.9 （南斯拉夫，1975），求方程

$$1!+2!+\cdots+(x+1)!=y^{z+1}$$

的自然数解。

3.10 （保加利亚，1982；澳大利亚，1983）。求方程 $(y+1)^x-1=y!$ 的自然数解。

3.11 （奥地利，1973；南斯拉夫，1977；民主德国，1979）。对给定的 $n\in N$，$n>1$，记 $m_k=n!+k$，$k\in N$。证明，对任意 $k\in\{1, 2, \cdots, n\}$，都有一个素数 p，它整除 m_k，但不整除 $m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}, m_{k+1}, \cdots, m_n$。

3.12* （保加利亚，1968）。证明，C_n^k 为奇数的必要且充分条件是，在 $n, k\in N$ 的二进制写法中，当 k 的某个位数上的数字为1时，n 在同一位数上的数字也为1。

3.13* （国际数学竞赛，卢森堡，1980）。证明，对任意 $n\in N$ 与素数 p，下述条件是等价的。

(1) 当 $k=0, 1, 2, \cdots, n$ 时，C_n^k 都不被 p 整除。

(2) $n=p^s m-1$，其中 $s\in Z^+$，$m\in N$，$m<p$。

3.14* （评委会，苏联，1983）。设 h_n 是 $n!$ 的十进制写法中最后一个非零数字。证明，无限小数 $0, h_1h_2h_3\cdots$ 是无理数。

3.15 （中国，1986）。设实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足

$$a_0\neq a_1,\quad a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i,\quad i=1, 2, 3, \cdots,$$

证明，对任意 $n\in N$，

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

是 x 的一次多项式。

3.16 （中国北京，1963）求

$$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$$

展开式里 x^2 的系数。

§4 数 集 合

（见第一部分，定义 1, 2, 11, 12；定理 1, 2, 10, 13, 18, 23, 55, 95, 96）

4.1 （罗马尼亚，1978）。证明，将集合 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 任意划分为两个子集，至少有一个子集，含有三个数，其中两数之和为第三数的两倍。

4.2 （比利时，1979）。对 1234567 的数字进行排列，得到 $7!$ 个数。求这些数的和。

4.3 （英国，1966）。证明，在任意 52 个整数中，必有两个数，它们之和或差被 100 整除。

4.4 （英国，1970）。证明，在任意 n 个自然数构成的集合中，总有一个非空子集，它所含的数之和被 n 整除。

4.5 （波兰，1979）。设自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被某个 $m\in N$ 除的余数各不相同，且 $n>\frac{m}{2}$，证明，对每个 $k\in Z$，存在下标 $i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$，使得 a_i+a_j-k 被 m 整除。

4.6 （南斯拉夫，1977）。给定 20 个不超过 70 的自然数 $a_1<a_2<\cdots<a_{20}$。证明，在差 a_j-a_k，$j>k$ 中至少有 4 个相同。

4.7 （南斯拉夫，1981）。把集合 $\{1, 2, \cdots, 100\}$ 分成七个子集。证明，至少有一个子集，要么含有四个数 a, b, c, d，使得 $a+b=c+d$，要么含有三个数 e, f, g，使得 $e+f=2g$。

4.8 （美国，1983）。在数轴上取长为 $\frac{1}{n}$ 的开区间 $I(n\in N)$。证明，I 至多含有 $\frac{n+1}{2}$ 个形如 $\frac{p}{q}$ 的既约分数，其中 $p, q\in Z$，$1\leqslant q\leqslant n$。

4.9 （南斯拉夫，1977）。对给定的 $n\in N$，有多少个三元自然数组（无序组），其和为 $6n$。

4.10 （保加利亚，1980）。证明，从 1, 2, …, 49 中取出六个不同的数，其中至少有两个是相邻的，共有 $C_{49}^6-C_{44}^6$ 种取法。

4.11 （奥地利-波兰，1978）。设 $c\neq1$ 是给定的正有理数。证明，自然数集合可以表为两个不交的子集 A 与 B 之并，使得 A 中任意两数之比与 B 中任意两数之比都不等于 c。

4.12 （评委会，西班牙，1977）．整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之和为1．证明，在数

$$b_i = a_i + 2a_{i+1} + 3a_{i+2} + \cdots + (n-i+1)a_n + (n-i+2)a_1$$
$$+ (n-i+3)a_2 + \cdots + na_{i-1},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

中没有相同的．

4.13 （中国，1978）．证明，当给定的正整数 n 与 k 适合 $n>2$, $k>2$ 时，$n(n-1)^{k-1}$ 可以表为 n 个连续偶数之和．

4.14 （评委会，苏联，1982）．求所有具有下述性质的 $n\in N$，能够把 $2n$ 个数 1, 1, 2, 2, 3, 3, $\cdots$, n, n 排成一行，使得当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时，在两个 k 之间恰有 k 个数．

4.15 （苏联，1988）．在第一行写有 19 个不超过 88 的自然数，在第二行写有 88 个不超过 19 的自然数．将一行中的一个数或几个相连的数称为一段．证明，可以从上述两行数中各选出一段，使得这两段数字之和相等．

4.16 （奥地利，1975）．设非空集合 $M\subset Q$ 满足下述两个条件：

(1) 如果 $a\in M$, $b\in M$, 则 $a+b\in M$, 且 $ab\in M$;

(2) 如果 $r\in Q$, 则 $r\in M$, $-r\in M$, $r=0$ 这三者恰有一个成立．

证明，集合 M 与所有正有理数集合相等．

4.17 （美国纽约，1973）．设有限集合 $B\subset R$ 和集合 $M\subset R$．如果集合 M 中每个数都可唯一地表为集合 B 中的数的整数次幂的乘积，则 B 称为 M 的基．试问，任意有限的正数集合都具有基，对否？

4.18 （奥地利-波兰，1980）．证明，对任意 $n\in N$，都有

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{1}{i_1 i_2\cdots i_k}=n,$$

其中求和是对所有取自集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的数组 $i_1<i_2<\cdots<i_k$, $k=1, 2, \cdots, n$ 进行的．

4.19* （保加利亚，1983）．求所有具有下述性质的 $n\in N$，存在 $0, 1, \cdots, n-1$ 的排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，使得

$$a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_2a_3,\ \cdots,\ a_1a_2\cdots a_n$$

被 n 除的余数各不相同．

4.20* （评委会，瑞典，1983）．证明，如果 $n\in N$ 不是素数的整数次幂，则存在 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，使得

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2\pi i_k}{n}=0.$$

4.21* （苏联，1988）．设 n, m, k 是自然数，且 $m\geqslant n$．证明，如果 $1+2+\cdots+n=mk$，则可将 $1, 2, \cdots, n$ 分成 k 个组，使得每一组数之和都等于 m．

4.22* （评委会，芬兰，1982）．求所有这样的自然数的和，它们在十进制写法中的数字组成递增或递减数列．

4.23* （评委会，芬兰，1979）．满足

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=1979$$

的 n 元自然数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 当 n 为偶数时称为偶的，当 n 为奇数时称为奇的．证明，奇组与偶组一样多．

4.24* （评委会，波兰，1979）．证明，对任意 $a_1, a_2, \cdots, a_m\in N$，

(1) 存在 n 个数的集合，$n<2^m$，它的所有非空子集具有不同的和，而且这些和中包含所有的 $a_1, a_2, \cdots, a_m$。

(2) 存在 n 个数的集合，$n\leqslant m$，它的所有非空子集具有不同的和，而且这些和中包含所有的 $a_1, a_2, \cdots, a_m$。

4.25* (评委会，波兰，1983)。设集合 $M\subset N$ 满足

(1) 任意大于1的 $n\in N$ 都可表为 $n=a+b$，其中 $a, b\in M$；

(2) 如果 $a, b, c, d\in M$ 都大于10，则仅当 $a=c$ 或 $a=d$ 时 $a+b=c+d$。

集合 M 存在否？

4.26 (匈牙利，1916)。证明，把集合 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 任意分为两组，总有某个组，它含有两个数及它们的差。

4.27 (中国，集训班，1988)。设 $n\in N$ 大于3，且具有下列性质：把集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ 任意分为两组，总有某个组，它含有三个数 a, b, c，允许 $a=b$，使得 $ab=c$。求这种 n 的最小值。

4.28* (匈牙利，1986)。证明，可以用两种颜色给正整数 $1, 2, \cdots, 1986$ 染色，使它不含有18个项的单色算术级数。

4.29* (评委会，罗马尼亚，1987)。证明，可以用四种颜色给正整数 $1, 2, \cdots, 1987$ 染色，使它不含有10个项的单色算术级数。

§5 数的各种性质

(见第一部分，定义11～19，定理1, 2, 4, 10, 13, 18, 23, 55, 95, 96)

5.1 (捷克，1952)。证明，如果正数 $a, b, c\in Q$ 满足 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$，则 $\sqrt{a}, \sqrt{b}\in Q$。

5.2 (罗马尼亚，1975)。证明，存在正无理数 a 与 b，使得 a^b 为有理数。

5.3 (巴西，1983)。证明，对任意 $n\in N, n>1$，和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不是整数。

5.4 (苏联，1986)。证明，设 $m, n\in N$，被3的正整数次幂整除，且 $1\leqslant m<n<1986$，则所有形如 $\frac{1}{mn}$ 的数之和不是整数。

5.5 (美国，1978)。证明，任意大于32的 $n\in N$ 都可以表为若干个自然数之和，而且这些自然数的倒数之和为1。

5.6 (英国，1982)。设 $n\in N$ 为17的倍数，且在二进制写法中恰有三个数字为1。证明，n 的二进制写法中至少有六个数字为0，且若恰有7个数字为0，则 n 是偶数。

5.7 (南斯拉夫，1983)。求所有具有下述性质的 $n\in N$：如果并排写出十进制记数法中的数 n^3 与 n^4，则其中十个数字 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 各恰好出现一次。

5.8 (南斯拉夫，1977)。求所有具有下述性质的 $n\in N$，它的十进制写法中数字之和的5次幂等于 n^2。

5.9 (英国，1978)。证明，如果真分数的分母不超过100，则在这个分数的十进制写法

中不可能从左到右依次连续出现1，6，7 这三个数。

5.10 （中国成都，1978）考试用百分制记分，得分为整数。证明，

(1) 如果 201 人的总分为 9999，则至少有 3 人的分数相同；

(2) 如果 201 人的总分为 10101，则至少有 3 人的分数相同；

(3) 如果 201 人的总分为 10000，且无 3 人的分数相同，则必有 1 人得 100 分，2 人得 0 分；

(4) 如果 201 人的总分为 10100，且无 3 人的分数相同，则必有 1 人得 0 分，2 人得 100 分。

5.11 （美国纽约，1978）．证明，任意形如 $2^{2^n}+1$ 的素数不能表成两个自然数的 5 次幂之差，其中 $n\in N$。

5.12 （美国纽约，1977）．是否存在 $n\in N$，使得 $2^{n+1}-1$ 与 $2^{n-1}(2^n-1)$ 都是整数的立方？

5.13 （罗马尼亚，1978）．证明，如果 $m, n\in N$ 满足

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0,$$

则

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}.$$

5.14 （国际数学竞赛，芬兰，1980）．求 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}$ 的十进制写法中位于小数点前后相连的两个数字。

5.15 （罗马尼亚，1980）．证明，对任意 $m, n\in N$，存在 $k\in N$，使得

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}.$$

5.16 （评委会，波兰，1977）．证明，对任意 $a, b\in R$，$\varepsilon>0$，存在 $k, m\in Z$ 与 $n\in N$，使得

$$|na-k|<\varepsilon, \quad 且 \quad |nb-m|<\varepsilon.$$

5.17 （评委会，越南，1976）．证明，有无限多个形如 5^n 的数，$n\in N$，在它们的十进制写法中至少接连出现 1976 个 0。

5.18* （评委会，英国，1977）．证明，对任意 $m\in N$，有无限多个形如 5^n 的数，$n\in N$，使得在它们的十进制写法中，末尾 m 个数字的每一个都与其相邻的数有不同的奇偶性。

5.19* （中国，1984）．设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n\in N$，证明，$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数。

5.20* （南斯拉夫，1973）．证明，如果一矩形的边长为奇数，则其内部不含这样的点，它到四个顶点的距离都是整数。

5.21* （评委会，匈牙利，1979）．证明，不存在这样的正四棱锥，它的所有棱长、表面积和体积都是整数。

5.22* （英国，1981）．对给定的 n 个不同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in N$，$n>1$，记

$$p_i=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(a_i-a_j),\ i=1, 2, \cdots, n.$$

证明，对任意 $k\in N$，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i}$$

是整数。

5.23 （评委会，瑞典，1989）。设$n \in N$。证明，存在n个连续的自然数，每一个都不是素数的整数幂。

第二章　方程与不等式

§6　方程与方程组

（见第一部分，定义 2, 19；定理 6, 7, 18, 55, 56）

6.1　（美国纽约，1978）．解方程

$$8^x(3x+1)=4.$$

6.2　（奥地利，1974）．证明，对任意 a, b, $c\in R$, 方程

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

至少有一个解．

6.3　（民主德国，1983）．证明，方程

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$$

恰有两个实数解．

6.4　（美国纽约，1980）．求所有的数对 (a, b), $a>1$, $b>0$, 使得方程

$$a^x=x^b$$

恰有一个正数解，并对每个所求的数对 a, b, 求出这个解．

6.5　（南斯拉夫，1972）．对每个 $a\in R$, 解方程

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=2.$$

6.6　（美国纽约，1973）．求满足方程

$$\cos^8 x+\sin^8 x=\frac{97}{128}$$

的所有 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6.7　（美国纽约，1978）．求所有自然数对 $A\neq B$, 使得方程组

$$\begin{cases}\cos Ax+\cos Bx=0\\ A\sin Ax+B\sin Bx=0\end{cases}$$

有解．

6.8　（捷克，1956）．求所有满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=2\cos^2 y\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2\sin^2 y\end{cases}$$

的数对 $x, y\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

6.9 (民主德国,1956). 解方程

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1)=6.$$

6.10 (罗马尼亚,1978). 对每个 $n\in N$, 解方程

$$\sin x\sin 2x\cdots\sin nx+\cos x\cos 2x\cdots\cos nx=1.$$

6.11 (中国天津,1978). 设 x, y 和 θ 满足方程组:

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=x,\\ \sin\theta-\cos\theta=y,\\ \sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta=-y^2.\end{cases}$$

求 x, y 的值.

6.12 (民主德国,1966). 对每个 $n\in N$, 解方程

$$(x+y)^n=x^n+y^n.$$

6.13 (民主德国,1978). 解方程组

$$\begin{cases}x+xy+y=2+3\sqrt{2},\\ x^2+y^2=6.\end{cases}$$

6.14 (中国上海,1978). 解方程组

$$\begin{cases}(x+2y-8)^2+(2-x)^2=0,\\ xz^2+yz-5\sqrt{xz^2+yz+9}+3=0.\end{cases}$$

6.15 (英国,1975). 证明,对任意 $n\in N$, 恰有一组数 x_1, $\cdots$, x_n 满足方程

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2=\frac{1}{n+1}.$$

6.16 (波兰,1968). 求所有的 $n\in N$, 使得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=9,\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=1.\end{cases}$$

具有正数解 x_1, x_2, $\cdots$, x_n. 并对求得的 n, 给出相应的解.

6.17* (捷克,1982). 对每对 n, $k\in N$, 求所有满足方程组

$$\begin{cases}x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k=1,\\ (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)=2\end{cases}$$

的非负数组 x_1, x_2, $\cdots$, x_n.

6.18 (苏联,1988). 当 n 至少为多大的自然数时,下述方程组有解:

$$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0,\\ \sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=100.\end{cases}$$

6.19* (民主德国,1980). 解方程组

$$\begin{cases}2x+x^2y=y,\\ 2y+y^2z=z,\\ 2z+z^2x=x.\end{cases}$$

6.20 (评委会,塞浦路斯,1985). 解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\dfrac{1}{y}-2w+3z=1, \\ x+\dfrac{1}{y^2}-4w^2-9z^2=3, \\ x\sqrt{x}-\dfrac{1}{y^3}-8w^2+27z^3=-5, \\ x^2+\dfrac{1}{y^4}-16w^2-81z^4=15. \end{cases}$$

6.21* (奥地利—波兰,1979). 对任意 $n\in N$ 与 $a\in R$, 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=a, \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=a^n. \end{cases}$$

§7 不 等 式

(见第一部分,定义 18, 30, 32; 定理 2, 4~7, 34, 55, 56)

7.1 (民主德国,1974).

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$$

与 0 哪一个大?

7.2 (比利时,1979). 设 $a<b<c<d$, 试按递增顺序排列下面的数:

$$x=(a+b)(c+d),\ y=(a+c)(b+d),\ z=(a+d)(b+c).$$

7.3 (南斯拉夫,1976). 证明,如果某三数的乘积为 1, 且其和大于其倒数之和, 则这三个数中恰有一数大于 1.

7.4 (美国纽约,1975). 证明,对任意正数 $a\neq b$ 之算术平均值

$$A=\frac{a+b}{2}$$

与几何平均值

$$B=\sqrt{ab},$$

有

$$B<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A.$$

7.5 (南斯拉夫,1976). 证明,对任意大于 1 的数 a, b, c, 有

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

7.6 (奥地利,1971). 证明,对任意正数 a、b、c, 有

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

7.7 (美国,1980). 证明,对任意 a、b、$c\in[0,1]$, 有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

7.8 (捷克,1959). 证明,如果 a、b、$c\in R$ 满足

$$a+b+c>0,\ ab+bc+ca>0,\ abc>0,$$

则 a, b, c 都是正的.

7.9 （比利时，1976）．证明，所有 $\alpha\in R$ 都满足

$$\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha).$$

7.10 （巴尔干，1984）．证明，对和为1的任意正数 $a_1, \cdots, a_n, n\geqslant 2$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}.$$

7.11 （民主德国，1967；英国，1976）．证明，对任意正数 $a_1,\cdots, a_n, n\geqslant 2$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1},$$

其中

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

7.12 （美国纽约，1975）．对任意正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $a_{n+1}=a_1$，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$$

是否成立？

7.13 （评委会，加拿大，1982）．证明，对任意正数 $x\neq 1, \alpha<1$，有

$$\frac{1-x^\alpha}{1-x}<(1+x)^{\alpha-1}.$$

7.14 （评委会，苏联，1982）．证明，对任意 $\alpha\leqslant 1$ 与任意满足条件

$$1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$$

的数 $x_1, \cdots, x_n$，有

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^\alpha\leqslant 1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+\cdots+n^{\alpha-1}x_n^\alpha.$$

7.15 （波兰，1982）．证明，对任意 $a_1, \cdots, a_n\in[0, 2], n\geqslant 2$．有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|\leqslant n^2.$$

并确定对于什么样的 $a_1, \cdots, a_n$ 等式成立．

7.16 （南斯拉夫，1972）．证明，如果对任意 $x_1, \cdots, x_n\in\{-1, 1\}$，数$M$与数组

$$\begin{array}{l}a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n},\\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}\end{array}$$

有

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n|\leqslant M,$$

则

$$|a_{11}|+|a_{22}|+\cdots+|a_{nn}|\leqslant M.$$

7.17 （评委会，美国，1982）．证明，对任意 $a_1, \cdots, a_n\in R$，都存在 $k\in\{1, \cdots, n\}$，使得对任意不超过1的非负实数 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

7.18* （波兰，1984）．证明，对任意 $m, n\in N$ 与任意满足 $x_i+y_i=1, i=1, \cdots, n$ 的

$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in (0, 1]$，有

$$(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^n)\cdots(1-y_n^m)\geqslant 1.$$

7.19* （评委会，美国，1977）. 证明，对任意正数 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，有

$$a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d.$$

7.20* （民主德国，1980）. 证明，对任意大于1的 $n, k\in N$，有

$$\sum_{j=n}^{n^k}\frac{1}{j}>k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}.$$

7.21* （评委会，法国，1982）. 证明，对任意正数 $a_1, \cdots, a_n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

7.22* （美国，1977）. 证明，如果给定的两个正数 $p<q$，则对任意 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\in[p, q]$，都有

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

并确定对什么样的 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 等式成立.

7.23* （民主德国，1970）. 证明，对任意正数 a、b、c、d，有

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

并确定对什么样的 a、b、c、d 等式成立.

7.24 （中国，1979）. 设

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},$$

证明

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9.$$

并确定对什么样的 α, β 等式成立.

7.25 （中国，1984）. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数，证明，

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

7.26 （苏联，1987）. 证明，对任意 $n\in N$，有

$$(2n+1)^n\geqslant(2n)^n+(2n-1)^n.$$

7.27 （中国，1988）. 设 a、b 为正实数且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,$$

证明，对每个 $n\in N$ 有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

§8 含整数部分[x]的问题

（见第一部分，定义 11, 15, 18, 19；定理 2, 6, 8, 18, 20）

8.1 （奥地利，1973）. 解方程

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}.$$

8.2 (全俄,1987)。解方程

$$x^2-8[x]+7=0.$$

8.3 (苏联莫斯科,1957)。解方程

$$x^3-[x]=3.$$

8.4 (英国,1975)。求方程

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$$

的自然数解。

8.5 (加拿大,1981)。证明,方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

无解。

8.6 (瑞典, 1982)。对每个 $n\in N$, 求方程 $x^2-[x^2]=\{x\}^2$ 在区间 $[1, n]$ 中解的个数。

8.7 (奥地利,1974)。证明,对任意 $n\in N$, 有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

8.8 (评委会,比利时,1979)。每个自然数都不能表成

$$\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right],$$

其中 $n\in N$, 对否?

8.9 (评委会,联邦德国,1988)。如果 n 历遍所有正整数,证明,

$$f(n)=\left[n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]$$

历遍所有正整数,但数列 $a_n=3n^2-2n$ 的项除外。

8.10 (南斯拉夫,1983)。证明,由递推关系式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\left[\frac{3}{2}a_n\right],\ n\in N$$

给出的数列 $\{a_n\}$ 中有无限多个偶数和无限多个奇数。

8.11 (评委会,罗马尼亚,1985)。证明,由 $a_n=[\sqrt{2}n]$ 定义的数列 $\{a_n\}$ 中,包含无限多个 2 的整数幂。

8.12 (奥地利-波兰,1979)。对每个 $n\in N$, 求最大正整数 $k\in Z^+$, 使得

$$[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$$

被 2^k 整除。

8.13 (评委会,罗马尼亚,1979)。证明,对任意 $n\in N$, 有

$$\{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}},$$

且对任意 $\varepsilon>0$, 总可以找到 $n\in N$, 使得

$$\{n\sqrt{2}\}<\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}}.$$

8.14* (美国,1975)。(1)证明,对任意非负实数 x, y, 有

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x].$$

(2) 证明,对所有 $m, n\in N$,

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

是整数。

8.15* (美国,1981). 证明,对任意 $x\geqslant 0$ 与 $n\in N$, 都有

$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

8.16* (保加利亚,1983). 证明,若对每个 $n\in N$, a, b, c 满足

$$[na]+[nb]=[nc],$$

则 a, b, c 至少有一个是整数。

8.17* (集训班,中国,1988). 证明,存在正实数 λ, 使得对任意 $n\in N$, $[\lambda^n]$与 n 的奇偶性相同,并给出一个如此的正实数 λ。

第三章 平面几何

§9 三 角 形

（见第一部分，定义 36, 40, 41；定理 64, 67, 74, 75, 77, 82, 83）

9.1 （南斯拉夫，1981）。给定不等边锐角三角形，过其中一顶点作高，过另一顶点作中线，过第三个顶点作角平分线。证明，如果这三条线相交构成一个三角形，则它不可能是等边三角形。

9.2 （比利时，1977）。证明，设正数 $a, b, c\in R$，并且对任意 $n\in N$，以 a^n, b^n, c^n 为边长的三角形都存在，则所有这些三角形都是等腰的。

9.3 （苏联莫斯科，1955）。设三角形 ABC 的旁切圆圆心分别是 O_1, O_2, O_3。证明 $\triangle O_1O_2O_3$ 是锐角三角形。

9.4 （瑞典，1982）。求所有的 $n\in N$，使得对其中每一个 n，都存在 $m\in N$，在以 $AB=33$, $AC=21$, $BC=n$ 为边的三角形的边 AB, BC 上分别可以找到点 D, E，它们满足

$$AD=DE=EC=m.$$

9.5 （评委会，越南，1979）。求所有的三元数组 $a, b, c\in N$，使得以它们为边长的三角形都具有直径为 6.25 的外接圆。

9.6 （美国纽约，1978）。设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 内接于同一个圆。证明，它们的周长相等的必要且充分条件是

$$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F.$$

9.7 （南斯拉夫，1981）。设一直线将三角形划分成等面积和等周长的两部分。证明，三角形的内切圆圆心位于这条直线上。

9.8 （奥地利，1983）。在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC, BC 上依次取点 C', B', A'，使得线段 AA', BB', CC' 相交于一点。点 A'', B'', C'' 依次是 A, B, C 关于 A', B', C' 的对称点。证明，

$$S_{A''B''C''}=3S_{ABC}+4S_{A'B'C'}.$$

9.9 （奥地利，1971）。设$\triangle ABC$ 的三条中线交于 O 点，证明

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(OA^2+OB^2+OC^2).$$

9.10 （美国纽约，1979）。证明，如果三角形的重心和它的边界的重心重合，则它是等边三角形。

9.11 （英国，1983）。设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，D 是边 AB 的中点，E 是 $\triangle ACD$

中中线的交点. 证明,如果 $AB=AC$, 则 $OE\perp CD$.

9.12 (捷克, 1972). 求所有的正数对 a, $b\in R$, 使得存在直角$\triangle CDE$及其斜边 DE 上的点 A, B, 它们满足

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}, \quad 且 \quad AC=a,\ BC=b.$$

9.13 (评委会, 中国, 1986). 平面上给定三点 A, B, C. 一个人从同一平面上的点 P_0 出发, 直线行进到点 A, 向左旋转 60° 之后继续沿直线前进, 走过一相同距离之后, 到达一点 P_1. 称此人关于点 A 作了一次左转 60° 的运动. 接着, 从 P_1 出发对 B 作左转 60° 的运动到达 P_2, 再从 P_2 出发对 C 作左转 60° 的运动到达 P_3, 然后再依次对 A, B, C, A, B, ……作左转 60° 的运动. 经过 1986 步之后, 此人发现已回到了原出发点 P_0. 证明, $\triangle ABC$ 为等边三角形,而且顶点 A, B, C 是按逆时针方向排列的.

9.14 (美国纽约,1976). 求一个直角三角形, 它的边都是整数, 并且它的每个角都可以用圆规和直尺将它三等分.

9.15 (芬兰,1980). 在 $\triangle ABC$ 中作边 AB 与 AC 的垂直平分线, 分别交直线 BC 于点 X 和 Y. 证明, (1) 当 $\operatorname{tg}\angle B\cdot\operatorname{tg}\angle C=3$ 时,有 $BC=XY$; (2) 当 $\operatorname{tg}\angle B\cdot\operatorname{tg}\angle C\neq 3$ 时, $BC=XY$ 仍可能成立.

求集合 $M\subset R$, 使得当 $\operatorname{tg}\angle B\cdot\operatorname{tg}\angle C\in M$ 时上述等式成立.

9.16 (美国纽约, 1976). 锐角 $\triangle ABC$ 的高交于点 O. 在线段 OB 和 OC 上各取点 B_1 与 C_1, 使得$\angle AB_1C=\angle AC_1B=90°$. 证明,$AB_1=AC_1$.

9.17 (苏联, 1988). 作锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆, 并过点 A, B, C 分别作外接圆的切线. 已知过点 A 与 C 的切线分别和过点 B 的切线交于点 M 与 N, BP 为 $\triangle ABC$ 的高, 其中点 P 在边 AC 上. 证明,BP 是$\angle MPN$ 的平分线.

9.18 (中国天津,1978). 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,BC 为底边, D 是点 A 到边 BC 的垂足. 以 AD 为直径作圆. 过点 B 与 C 分别作圆的切线 BE 与 CF, 其中 E 与 F 为切点. 证明,弦 EF 在 $\triangle ABC$ 内部一段的长等于它在外部两段长之和.

9.19 (英国,1981). $\triangle ABC$ 的高交于点 O. 点 A_1, B_1, C_1 各是边 BC, CA, AB 的中点. 以 O 为圆心的圆交 B_1C_1 于点 D_1, D_2, 交 C_1A_1 于点 E_1,E_2, 交 A_1B_1 于点 F_1, F_2. 证明,

$$AD_1=AD_2=BE_1=BE_2=CF_1=CF_2.$$

9.20 (南斯拉夫,1983). 在$\triangle ABC$ 内部取一点 P. 在边 AC 和 BC 上各取一点 M 与 L, 使得$\angle PAC=\angle PBC$, $\angle PLC=\angle PMC=90°$. 证明, 如果 D 是边 AB 的中点, 则 $DM=DL$.

9.21 (罗马尼亚,1978). 求等边$\triangle ABC$ 内满足

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=90°$$

的点 M 的几何位置.

9.22 (保加利亚,1982). 在给定的不等边$\triangle A_1A_2A_3$ 中,用 B_{ij} 表示顶点 A_i 关于由顶点 A_j 引出的角平分线的对称点. 其中 i, $j\in\{1, 2, 3\}$. 证明, 直线 $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$ 与 $B_{23}B_{32}$ 相互平行.

9.23 (保加利亚, 1981). $\triangle ABC$ 中, C 的内角和外角的两条平分线分别交直线 AB 于点 L 与 M. 证明,如果 $CL=CM$, 则 $AC^2+BC^2=4R^2$. 其中 R 是外接圆半径.

9.24 (南斯拉夫,1983)．在 $\triangle ABC$ 内取一点 M，使得

$$\angle MBA=30^\circ,\quad \angle MAB=10^\circ.$$

设

$$\angle ACB=80^\circ,\ AC=BC,$$

求 $\angle AMC$．

9.25 (英国,1970)．在 $\triangle ABC$ 的边 BC 与 AC 上各取一点 D 与 E，使得

$$\angle BAD=50^\circ,\quad \angle ABE=30^\circ.$$

设

$$\angle ABC=\angle ACB=50^\circ,$$

求 $\angle BED$．

9.26 (民主德国,1964)．在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取一点 P，使得 $PC=2BP$．设

$$\angle ABC=45^\circ,\quad \angle APC=60^\circ,$$

求 $\angle ACB$．

9.27 (评委会,荷兰,1979)．在等边 $\triangle ABC$ 内取点 K, L, M，使得

$$\angle KAB=\angle LBA=15^\circ,\ \angle MBC=\angle KCB=20^\circ,$$

$$\angle LCA=\angle MAC=25^\circ.$$

求 $\triangle KLM$ 的三个内角．

§10 圆

(见第一部分，定义 35, 36；定理 66～75, 79)

10.1 (巴西,1983)．证明，圆周上所有的点可以分成两个集合，使得在任意一个内接直角三角形的顶点中都有属于这两个集合中的点．

10.2 (美国纽约,1975)．证明，从圆周上一点到圆内接正方形的顶点的四个距离不能都是有理数．

10.3 (评委会,保加利亚,1976)．$\triangle ABC$ 的角平分线 AA_1, BB_1, CC_1 交于点 M．证明，如果 $\triangle MB_1A$, $\triangle MC_1A$, $\triangle MC_1B$, $\triangle MA_1B$, $\triangle MA_1C$ 与 $\triangle MB_1C$ 的内切圆半径都相等，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形．

10.4 (英国,1975)．设单位圆内的七个点彼此间的距离都不小于1．证明，其中必有一个点与圆心重合．

10.5 (中国北京,1962)．平面上有六个圆，其中每个圆的圆心都在其它诸圆的外面．证明这六个圆不可能有公共点．

10.6 (苏联,1983)．三个圆两两外切，其切点为 X, Y, Z，然后圆心不动，将三个圆的半径放大 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍．证明，$\triangle XYZ$ 内的任一点至少被放大后的某一个圆所覆盖．

10.7 (奥地利,波兰,1978)．平面上有若干个不相交的圆，其中每一个圆都至少和另外六个圆相切．证明，这些圆的集合是无限集．

10.8 (保加利亚,1984)．证明，对任意 $\triangle ABC$ 都存在三个半径相等的圆，其中一个与边 AB 和 BC 相切，另一个与边 BC 和 AC 相切，第三个与边 AC 和 AB 相切，而且这三个圆恰有一个公共点．

10.9 (国际数学竞赛．卢森堡,1980)．两圆相切于点 P．与其中一圆相切于点 A 的直线交另一圆于点 B 和 C．证明，直线 PA 要么是 $\angle BPC$ 的平分线，要么是与它相邻的补

角的平分线。

10.10 （评委会，美国，1979）。圆心在等腰$\triangle ABC$的底边BC上的圆与两腰AB和AC相切。证明，端点分别在边AB和AC上的线段PQ当且仅当

$$BP\cdot CQ=\frac{BC^2}{4}$$

时与该圆相切。

10.11 （中国上海，1978）。证明，如果圆的内接四边形的两条对角线相互垂直，则从对角线交点至一边中点的线段等于圆心到这一边的对边的距离。

10.12 （英国，1980）。在半圆的直径AB上取点K与L，在半圆弧上取点M，N，使得四边形$KLMN$成为一个正方形，它的面积等于$\triangle ABC$的面积。证明，$\triangle ABC$的内切圆圆心与正方形的一条边及连接顶点M或N和顶点A或B的直线的交点重合。

10.13 （评委会，越南，1979）。设点M在给定的等边$\triangle ABC$的外接圆周上。证明

$$MA^4+MB^4+MC^4$$

与点M的选择无关。

10.14 （民主德国，1973）。给出一个凸四边形$ABCD$，使得$AB=AD$，$CB=CD$。证明，

(1) 它内切一个圆，

(2) 当且仅当$AB\perp BC$时，它外接一个圆，

(3) 如果$AB\perp BC$，则内切圆圆心与外接圆圆心之间的距离的平方为

$$R^2+r^2-r\sqrt{r^2+R^2},$$

其中R与r分别是外接圆与内切圆的半径。

10.15 （罗马尼亚，1978）。证明，正方形的四个顶点不可能分别在四个半径构成算术级数的同心圆周上。

10.16 （南斯拉夫，1983）。在矩形$ABCD$的外接圆的弧AB上取一个不同于顶点A，B的点M。点P，Q，R，S是M分别在直线AD，AB，BC与CD上的投影。证明，直线PQ和RS是互相垂直的，并且它们与矩形的某条对角线交于同一点。

10.17 （英国，1977）。$\triangle ABC$的边BC与它的内切圆相切于点D。证明，该圆圆心在线段BC与AD两个中点的连线上。

10.18 （奥地利，1972）。设两圆相切，在大圆上内接一个等边三角形。从它的各顶点引出一条与小圆相切的直线。证明，这三条切线中，有一条切线的长度等于其它两条长度之和。

10.19 （评委会，美国，1979）。由$\triangle ABC$外接圆的弧BC上一点P分别向边BC，AC与AB作垂线PK，PL与PM。证明，

$$\frac{BC}{PK}=\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}.$$

10.20 （中国，1986）。设锐角$\triangle ABC$的外接圆半径为R，点D，E，F分别在边BC，CA，AB上。证明，AD，BE，CF是$\triangle ABC$三条高的必要且充分条件是

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE),$$

其中S是$\triangle ABC$的面积。

10.21 (评委会,澳大利亚,1989)。锐角$\triangle ABC$的内角平分线分别交外接圆于点A_1, B_1, C_1,直线AA_1与$\angle ABC$的外角平分线相交于点A_0。类似地定义点B_0, C_0。证明,

(1) $S_{A_0B_0C_0}=2S_{A_1CB_1AC_1B}$,

(2) $S_{A_0B_0C_0}\geqslant 4S_{ABC}$。

10.22 (民主德国,1970;南斯拉夫,1972)。

(1) 设O是$\triangle ABC$内切圆圆心,而与点A不同的点D是直线AO与$\triangle ABC$外接圆的交点。证明,$DB=DC=DO$。

(2) 证明,如果$ABCD$是一圆的内接四边形,则$\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$,与$\triangle ABC$的内切圆圆心A_1, B_1, C_1, D_1是一矩形的顶点。

10.23 (巴尔干,1984)。证明,圆内接四边形$A_1A_2A_3A_4$全等于四边形$H_1H_2H_3H_4$,其中H_1, H_2, H_3, H_4分别是$\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_1A_3A_4$, $\triangle A_1A_2A_4$与$\triangle A_1A_2A_3$的垂心。

10.24 (1) (评委会,美国,1982)。圆内接四边形被它的一条对角线分成两个三角形。证明,这两个三角形的内切圆半径之和与对角线的选取无关。

(2) (匈牙利,1978)。证明,在一个非钝角三角形中,其最大的高不小于其内切圆与外接圆半径之和。

10.25 (南斯拉夫,1977)。平面上有100个点。证明,存在有限多个圆,使得 (1) 这100个点中每一个都在某个圆内。(2) 不同圆内的任意两点的距离都大于1。(3) 所有各圆的直径之和小于100。

10.26 (中国北京,1963)。平面上有$2n+3$个点,$n\geqslant 1$,其中任意三点不共线,任意四点不共圆。是否有一个圆,它过其中三点,并且恰含有所有其它点的一半?

10.27 (保加利亚,1978)。证明,任意一个凸多边形必有三个相邻顶点,过这三个点的圆包含整个多边形。

10.28 (芬兰,1980)。设在$2n$边形中有$n-1$对对边相互平行,$n>1$。求所有可能的n,使得余下的一对对边也是平行的。

10.29* (保加利亚,1982)。平面上有n个不同的圆,每圆半径都是1。证明,其中必有一个圆含有一段弧,其长度不小于$\frac{2\pi}{n}$,且和所有其它的圆都不交。

§11 多 边 形

(见第一部分,定义1, 2, 35, 37;定理2, 65, 70, 73, 74, 80)

11.1 (南斯拉夫,1981;瑞典,1982)。证明,如果四边形$ABCD$内有一点O,使得$\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle DAO$的面积相等,则这个点一定在对角线AC或BD上。

11.2 (加拿大,1982)。设四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$的面积分别为S与S'。证明,如果四边形$ABCD$内有一点O,使得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A'B'},\quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'C'},\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C'D'},\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{D'A'},$$

则$S=2S'$。

11.3 (中国,1983)。在四边形$ABCD$中,$\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle ABC$的面积比为3:4:1,点M与N分别在边AC和CD上,并且$AM:AC=CN:CD$,同时B, M, N三点共线。证明,点M与N分别是边AC与CD的中点。

11.4 (苏联，1982)．在平行四边形 $ABCD$ 中，$|AB|\neq|BC|$．已知对角线长度之比 $|AC|:|BD|=k$，设射线 AM 和射线 AD 关于直线 AC 对称，射线 BM 和射线 BC 关于直线 BD 对称，M 为射线 AM 和 BM 的交点，求 $\frac{|AM|}{|BM|}$．

11.5 (南斯拉夫，1972)．连接平行四边形的顶点与不以它为端点的两条边的中点所得的八条直线构成一个八边形．证明，它的面积是平行四边形面积的六分之一．

11.6 (南斯拉夫，1970)．凸五边形 $ABCDE$ 的对角线相交构成一个五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 与一个五角星形．

(1) 求这个星形的以 A, B, C, D, E 为顶点的各个角之和．

(2) 当 $ABCDE$ 为正五边形时，求五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积与五边形 $ABCDE$ 的面积之比．

11.7 (评委会，法国，1979)．设四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 各对应边相等．证明，下列两个论断必有一个成立．

(1) $BD\perp AC$，且 $B'D'\perp A'C'$；

(2) 直线 AC 与 $A'C'$ 分别和线段 BD 与 $B'D'$ 的垂直平分线的交点 M 与 M' 满足

$$MA\cdot M'C'=MC\cdot M'A'$$

且它们要么同时分别落在 AC 和 $A'C'$ 上，要么同时分别落在它们的延长线上．

11.8 (奥地利，1973)．证明，如果一个凸八边形的各个角都相等，而所有各邻边边长之比都是有理数，则这个八边形的每组对边一定相等．

11.9 (南斯拉夫，1976)．平面上有一正六边形，其边长为 a．对每个 $n\in N$, $n>1$，试限用一根直尺作出一条长为 $\frac{a}{n}$ 的线段．

11.10 (评委会，1981)．证明，如果等边凸五边形 $ABCDE$ 的各个角满足

$$\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C\geqslant\angle D\geqslant\angle E,$$

则它一定是正五边形．

11.11 (民主德国，1974；民主德国，1979)．

(1) 证明，如果一个凸 n 边形的各顶点都在另一个与它全等的 n 边形内．则这两个 n 边形一定重合．

(2) (1) 中的结论对非凸的多边形能否成立？

(3) 能否说，对任意非凸的多边形，结论(1)都不对？

11.12 (评委会，比利时，1979)．是否任意一个正 $2n$ 边形都可以分解为若干个菱形？

11.13 (民主德国，1964)．在边长为 a 的菱形 $ABCD$ 外面取一点 O，使得它和顶点 A 与顶点 C 的距离都等于 $b>a$．证明，乘积 $OB\cdot OD$ 的大小与 $\angle BAD$ 的大小无关．

11.14 (匈牙利，1976)．在平行四边形 $ABCD$ 外取一点 P，使得 $\angle PAB=\angle PCB$，并且顶点 A 与 C 在直线 PB 的不同侧．证明，$\angle APB=\angle DPC$．

11.15 (评委会，比利时，1983)．设在六边形 $ABCDEF$ 中，顶点为 A, C, E 的角相等，且不超过 $180°$，又设 $\angle ABF=\angle CBD$, $\angle AFB=\angle EFD$．证明，如果 A' 是顶点 A 关于对角线 BF 的对称点，且不在直线 CE 上，则 $A'CDE$ 是平行四边形．

11.16 (中国，1981)．台球桌的形状为正六边形 $ABCDEF$．一个球从边 AB 的中点

P击出，击中边 BC 上某点 Q，并依次碰击 CD，DE，EF 与 FA 各边，最后击中边 AB 上某一点。求 $\theta=\angle BPQ$ 的取值范围。

11.17 （保加利亚，1979）。设凸五边形 $ABCDE$ 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 是等边三角形。证明，如果 O 是 $\triangle ABC$ 的中心，而点 M，N 是边 BD 与 AE 的中点，则

$$\triangle OME \sim \triangle OND.$$

11.18 （评委会，苏联，1982）。在凸五边形 $ABCDE$ 中，顶点为 B，E 的角是直角，又

$$\angle BAC=\angle EAD.$$

证明，如果对角线 BD 和 CE 交于点 O，则直线 AO 与 BE 垂直。

11.19 （英国，1966）。设正多边形的依次相邻的四个顶点 A，B，C，D 满足

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD},$$

求正多边形的边数。

11.20* （英国，1971）。在正 $2n$ 边形的内切圆周上取点 A 与 B。证明，如果点 A 与这 $2n$ 边形的相对顶点的连线构成的角分别为 α_0，α_1，…，α_{n-1}，点 B 与相对顶点的连线构成的角分别为 β_1，β_2，…，β_{n-1}，则

$$\operatorname{tg}^2\alpha_0+\cdots+\operatorname{tg}^2\alpha_{n-1}=\operatorname{tg}^2\beta_0+\cdots+\operatorname{tg}^2\beta_{n-1}.$$

11.21* （匈牙利，1978）。将边数为奇数的凸多边形染色，任意两个相邻顶点染不同的颜色。证明，对上述任意一种染色方法，多边形都可用不相交的对角线分为若干个三角形，使得三角形中每条对角线的端点不同色。

11.22 （苏联，1987）。凸 n 边形被所有的对角线分割，$n\geqslant 5$。证明，在得到的这些部分中一定存在不同面积的部分。

§12 点、线段与直线

（见第一部分，定义 1～3，18，34，35，37；定理 1，2，64，65，96）

12.1 （中国北京，1985）。在线段 AB 上有 $2n$ 个点，它们关于线段 AB 的中点 O 对称。将其中某 n 个点染成红色，其他 n 个点染成蓝色。证明，所有红色点到点 A 的距离之和等于所有蓝色点到点 B 的距离之和。

12.2 （美国纽约，1980）。等边 $\triangle ABC$ 的中位线把它分成四个三角形 $\triangle ADE$，$\triangle BDF$，$\triangle DEF$ 与 $\triangle CEF$。在它们的边上取中点 K，L，M，N，O，P，Q，R，S。用两种颜色给这十五点染色，每一点都染上一种颜色。证明，一定有三个同色点，它们是某个等边三角形的顶点。

12.3 （美国，1981）。在平面上画出一个大小为 $\frac{180°}{n}$ 的角，其中 $n\in N$ 不被 3 整除。证明，可用圆规与直尺将该角三等分。

12.4 （苏联莫斯科，1987）。试由正五边形的 k 个点，利用双边尺画出它的其余顶点，其中 (1) $k=4$，(2) $k=3$。这里所谓双边尺是指无刻度的直尺，用它可以完成通常无刻度直尺所能完成的工作，而且可以用它画出和已知直线平行且距离恰好等于尺宽的直线。

12.5 （中国上海，1985）。在平面上有四个点 A，B，C，D，其中任意两点的距离都不超过 1。用一个圆覆盖这四个点（即点 A，B，C，D 都在圆内或圆周上），问圆的半径最少应为

多少？试证明之。

12.6 （冬令营，中国，1987）．在面积为1的正三角形内部有五个点．证明，在此正三角形内，一定可以作三个正三角形覆盖这五个点，这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边，而且面积之和不超过0.64。

12.7 （南斯拉夫，1972）．证明，在一个平面凸集中，任意两条直径都有交点。

12.8 （民主德国，1982）．是否任意一个凸四边形都可用折线分成两部分，使得其中每一部分的直径都小于原四边形的直径？

12.9 （民主德国，1972）．平面上有n个点，连接其中任意两点的直线都含有其中另一个点．证明，这n个点共线。

12.10 （捷克，1968）．线段AB与CD相等，且不平行．求具有下述性质的点O的几何位置：线段AB关于点O的对称线段是线段CD关于某条直线的对称线段。

12.11 （比利时，1977）．证明，如果平面点集有一个以上的对称中心，则它有无限多个对称中心。

12.12 （比利时，1978）．证明，平面点集M的对称轴的并集L包含在集合L的对称轴的并集内。

12.13 （评委会，民主德国，1979）．设一平面点集有两条对称轴，其夹角为α，且$\frac{\alpha}{\pi}$是无理数．证明，如果该集合至少有两点，则它含有无限多个点。

12.14 （南斯拉夫，1976）．求所有大于2的数$n\in N$，使得平面上存在n个点，当其中两点为某个等边三角形的顶点时，这三角形的第三个顶点也是其中一点。

12.15 （南斯拉夫，1980）．设集合M由整个平面去掉三个不同的点A, B, C得到，求凸集的最小个数，使得它们的并是集合M。

12.16 （评委会，罗马尼亚，1979）．证明，对任意一个大于某个数n_0的$n\in N$，整个平面都可用一些直线分成n个区域，而且这些直线一定有相交的．求最小的n_0。

12.17 （捷克，1982）．在坐标平面上作一个凸集，使得它含有无限多个整点，但它与任何一条直线的交要么只含有限多个整点，要么不含整点。

12.18 （民主德国，1974）．求所有非零向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，使得由$a_n=|\boldsymbol{x}-n\boldsymbol{y}|$，$n\in N$定义的数列是 (1) 递增的；(2) 递减的。

12.19 （南斯拉夫，1973）．平面上有一些点，其中任意两点间的距离都大于2．证明，任意一个面积小于π的集合都可以在平面上平移一个长度小于1的向量，使得它不含这些点。

12.20 （比利时，1977）．在半径为$n\in N$的圆内有$4n$条长为1的线段．证明，如果给定某条直线，则必有另一条直线，使得要么与它平行，要么与它垂直，并且至少和两条线段相交。

12.21* （捷克，1973）．在边长为50的正方形内有一条折线．证明，如果对正方形内任意一点，折线上总有一个点，使得它们之间的距离不大于1，则折线的长度大于1248。

12.22* （评委会，捷克，1979）．直线上有n^2+1条线段，$n\in N$．证明，要么其中至少有$n+1$条互不相交的线段，要么至少有$n+1$条线段，它们有公共的交点。

12.23* （美国，1983）．直线上有一些集合，其中每一个集合都是两条线段之并．证明，

如果这些集合中任意三个都有公共点，则存在一点，它至少属于这些集合中的一半。

12.24* （南斯拉夫，1975）。平面上有 $n+4$ 个编号的点，其中 4 个是正方形的顶点，其它 n 个点在正方形的内部。任意两个编号的点允许用线段连接，只是已连接的线段除端点外不含编号的点，而任意两条已连接的线段除端点外没有公共点。求用这种方法所能连接的线段的最大数目。

12.25 （评委会，荷兰，1989）。平面点集 S 由 n 个点组成，并且

(1) S 中任意三点不共线；

(2) 对 S 中任意点 P，至少有 k 个 S 中的点到 P 的距离相等。

证明

$$k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n}.$$

§13 几何不等式

（见第一部分，定义 1, 35, 38；定理 1, 6, 64, 69, 70, 74, 75, 77, 80）

13.1 （英国，1967）。三角形的两边长 a 与 b 满足 $a>b$，它们对应的高为 h_a，h_b。证明，$a+h_a\geqslant b+h_b$，并确定等式何时成立。

13.2 （捷克，1976）。证明，如果一个凸多边形落在另一个凸多边形内，则里面凸多边形的周长小于外面凸多边形的周长。

13.3 （南斯拉夫，1975）。证明，如果在凸 n 边形中依次连接各边的中点，$n\geqslant4$，则得到的多边形的面积不小于原多边形面积的一半。

13.4 （奥地利—波兰，1978）。在正六边形中作一平行四边形，其对称中心与正六边形的中心重合。证明，平行四边形的面积不超过正六边形面积的 $\frac{2}{3}$。

13.5 （南斯拉夫，1977）。证明，三角形内部的任意一个正方形的面积不超过三角形面积的一半。

13.6 （中国北京，1964）。设在角 A 不是锐角的 $\triangle ABC$ 中内接一个正方形 B_1C_1DE（点 D 与 E 在 BC 边上，点 B_1 与 C_1 分别在边 AB 与 AC 上）。然后在 $\triangle AB_1C_1$ 上用类似方式作内接正方形 $B_2C_2D_1E_1$，如此继续。证明，所有这些内接正方形面积之和小于 $\triangle ABC$ 的面积的一半。

13.7 （捷克，1975）。证明，可将面积为 1 的任意锐角三角形安放在面积不超过 $\sqrt{3}$ 的直角三角形内。

13.8 （评委会，1981）。证明，如果点 A，B，C，D 与 E 依次在半径为 1 的半圆周上，则有

$$AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+AB\cdot BC\cdot CD+BC\cdot CD\cdot DE<4.$$

13.9 （捷克，1983）。证明，设点 O 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，且与顶点不重合，则

$$OC\cdot AB<OA\cdot BC+OB\cdot AC.$$

13.10 （中国，1988）。在 $\triangle ABC$ 中，点 P，Q，R 是它的周长的三等分点，且点 P 和 Q 在边 AB 上。证明，

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}.$$

13.11 （评委会，冰岛，1989）．凸四边形 $ABCD$ 内有一点 P，P 到 CD 的距离为 h，并且

$$AB=BC+AD,\ AP=AD+h,\ BP=BC+h.$$

证明

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

13.12 （民主德国，1962）．证明，任意一个凸四边形的顶点之间的最大距离与最小距离之比至少为 $\sqrt{2}$．

13.13 （中国，1985）．证明，平面上有五个不同的点，则它们间的最大距离与最小距离之比至少为 $2\sin 54°$．讨论比值达到最小的必要且充分条件．

13.14 （奥地利，1975）．证明，如果平面上有六个不同的点，则这些点间的最大距离与最小距离之比至少为 $\sqrt{3}$．

13.15 （美国纽约，1977～1979）．证明，如果 a, b, c 是三角形的边长，P 是它的周长，S 是它的面积，则

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{P}$；　(2) $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{P^2}{3}$；

(3) $P^2\geqslant 12\sqrt{3}S$；　(4) $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$；

(5) $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{P^3}{9}$；　(6) $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}SP$；

(7) $a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2$．

13.16 （南斯拉夫，1975）．证明，如果 O 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点，$\triangle ABC$ 的半周长为 p，则

$$OA\cos\frac{\angle BAC}{2}+OB\cos\frac{\angle ABC}{2}+OC\cos\frac{\angle ACB}{2}\geqslant p.$$

并确定等式何时成立．

13.17 （民主德国，1965）．证明，设 α, β, γ 是任意一个三角形的三个内角，则

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}.$$

并确定等式何时成立．

13.18 （英国，1967）．证明，设 α, β, γ 是任意一个三角形的三个内角，则

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{3}{4}.$$

并确定等式何时成立．证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

不能取到最大值．

13.19 （南斯拉夫，1976）．证明，设 α, β, γ 是任意一个非钝角的三角形的内角，则

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

13.20 （评委会，越南，1977）．证明，对任意边长为 a, b, c 且面积为 S 的三角形，有

$$\frac{ab+bc+ca}{4S}\geqslant\sqrt{3}.$$

13.21 （捷克，1974）．证明，如果圆内接六边形 $ABCDEF$ 满足 $AB=BC$，$CD=DE$，

$EF=FA$，则 $\triangle ACE$ 的面积不超过 $\triangle BDF$ 的面积。

13.22 （澳大利亚，1982）。证明，设 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$ 与 $\angle C$ 的三条角平分线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆周于点 A_1，B_1 与 C_1。则

$$AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+CA.$$

13.23 （中国上海，1978）。设 $ABCDE$ 是凸五边形，AD 为对角线。已知 $\angle EAD>\angle ADC$，$\angle EDA>\angle DAB$。证明，

$$AE+ED>AB+BC+CD.$$

13.24 （民主德国，1981）。证明，如果 AD，BE 与 CF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\triangle DEF$ 的面积不超过 $\triangle ABC$ 面积的四分之一。

13.25 （美国，1982）。在等边 $\triangle ABC$ 的内部取一点 A_1，在 $\triangle A_1BC$ 的内部取一点 A_2。证明，

$$\frac{S_1}{P_1^2}>\frac{S_2}{P_2^2},$$

其中 S_1，S_2 与 P_1，P_2 分别是 $\triangle A_1BC$，$\triangle A_2BC$ 的面积与周长。

13.26 （冬令营，中国，1988）。设 C_1 和 C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的半径的 2 倍。四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1。将 A_4A_1 延长，交圆 C_2 于点 B_1，A_1A_2 的延长线交圆 C_2 于点 B_2，A_2A_3 的延长线交圆 C_2 于点 B_3，A_3A_4 的延长线交圆 C_2 于 B_4。证明，四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 $\geqslant$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长的 2 倍，并确定等式成立的条件。

13.27 （英国，1983）。证明，如果直径为 5 的圆内有十个点，则其中必有两个点，它们的距离小于 2。

13.28 （评委会，波兰，1982）。设点 A_1，A_2，…，A_n 都在圆心为 O 且半径为 1 的圆周上，它们满足

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

证明，对任意一点 B，有

$$BA_1+BA_2+\cdots+BA_n\geqslant n.$$

13.29* （匈牙利，1981）。证明，对平面上任意的点 A，B，C，D，E，有

$$AB+CD+DE+EC\leqslant AC+AD+AE+BC+BD+BE.$$

§14 几何极值问题

（见第一部分，定义 35，37；定理 1，6，64，75）

14.1 （捷克，1980）。设等腰梯形的最大边长为 13，周长为 28。

(1) 设梯形的面积为 27，求它的边长。

(2) 这种梯形的面积能否等于 27.001？

14.2 （评委会，比利时，1982）。在所有周长一定的三角形中，求内切圆半径最大的三角形。

14.3 （评委会，美国，1977）。在半径为 1 的圆内取一个点，使得它与圆心的距离为 $k<1$。过这点作一对互相垂直的弦，求两条弦长之和的最大值与最小值。

14.4 （评委会，希腊，1988）。设 AB，CD 是以 O 为圆心，r 为半径的两条互相垂直的

弦。圆盘被它们分成的四个部分依顺时针次序记为 X, Y, Z, W。求 $\frac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 的最大值与最小值，其中 $A(U)$ 表示 U 的面积。

14.5 (南斯拉夫,1973)。证明，在一个四边形中，两组对边中点的距离之和当且仅当该四边形为平行四边形时才等于它的半周长。

14.6 (中国，1978)。在一个边长为1的正方形的所有内接三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积。

14.7 (英国,1982)。证明，如果 O 是面积为 S 的四边形 $ABCD$ 内的一个点，且

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2,$$

则四边形 $ABCD$ 是正方形，且点 O 是它的中心。

14.8 (美国纽约,1980)。设 $A_iH_i(i=1, 2, 3)$ 是面积为 S 的 $\triangle A_1A_2A_3$ 的高。证明，当且仅当

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}A_iA_{i+1}\cdot A_iH_i$$

(其中 $A_4=A_1$)时，$\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形。

14.9 (保加利亚,1968)。求满足下列条件的三角形三个边长之比：

$$\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{a\sin\beta+b\sin\gamma+c\sin\alpha}=\frac{P}{9R},$$

其中 a, b, c 是边长，α, β, γ 依次是它们的对角，P 是周长，R 是外接圆半径。

14.10 (美国纽约,1979)。证明，在一个正 n 边形的所有内接正 n 边形中，$n>3$，当内接正 n 边形的各顶点与原 n 边形各边中点重合时，面积最小。

14.11 (南斯拉夫，1974)。设平面上有 $n\geqslant3$ 个点 A_1, A_2, $\cdots$, A_n。其中任意三个点不共线。用 α 表示所有的角 $\angle A_iA_jA_k$ 的最小值，其中 A_i, A_j, A_k, 是三个不同的给定的点。对每个 n，求 α 的最大值，并确定当这些点怎样分布时取到最大值。

14.12 (保加利亚,1983)。求一个具有最小尺寸的正方形，使得其中能安放5个半径为1的圆，并且任意两个圆都没有公共内点。

14.13 (评委会，民主德国,1982)。证明，如果三角形的内切圆半径为外接圆半径的一半，则它一定是等边三角形。

14.14 (美国，1979)。在平面上画一个角，在角的内部取一点 O，过点 O 作一条线段 BC，它的端点在角的两边上，使得

$$\frac{1}{BO}+\frac{1}{CO}$$

取到最大值。

14.15* 对给定的 $\triangle ABC$ 中每个点 T，用 $m(T)$ 与 $M(T)$ 分别表示线段 TA, TB, TC 长度的最小值与最大值。

(1) (捷克,1974)。求 $\triangle ABC$ 中所有使 $m(T)$ 取到最大值的点。

(2) (罗马尼亚,1982)。证明，如果 $\angle BAC\geqslant90°$，则对 $\triangle ABC$ 中任意一点 T，都有

$$m(T)\leqslant\frac{BC}{2}\leqslant M(T).$$

14.16 (中国，1982)。在边长为4的等边 $\triangle ABC$ 中，点 D, E, F 分别在边 BC,

CA, AB 上，且 $AE=BF=CD=1$. 连接 AD, BE, CF, 围成 $\triangle RQS$. 点 P 在 $\triangle RQS$ 内及其边上移动，P 到 $\triangle ABC$ 的三边距离分别记为 x, y, z.

(1) 证明，当点 P 在 $\triangle RQS$ 的顶点位置时，乘积 xyz 有极小值.

(2) 求上述乘积 xyz 的极小值.

第四章　　立体几何

§15　四　面　体

(见第一部分：定义 10, 42；定理 6, 64, 84, 86～89, 91, 92)

15.1　(保加利亚,1966)．证明,对任意一个四面体,都可作一个三角形,使得它的边长恰好是四面体某个顶点引出的三条棱长．

15.2　(捷克,1967)．证明,如果四面体 $ABCD$ 的棱满足

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2,$$

则它的诸界面中至少有一个是锐角三角形．

15.3　(加拿大,1983)．如果两个四面体的四个面的面积对应相等,则它们的体积也一定相等．对否?

15.4　(捷克, 1971)．证明，存在一个四面体 $ABCD$, 它的所有的面都是彼此相似的三角形,并且以 A, B 为顶点的角都是锐角．试确定四面体的棱中哪条最长，哪条最短．当最大棱长为 1 时,求最小棱长．

15.5　(民主德国,1974)．在正四面体中,过每条棱及其对棱的中点作六个平面．试确定这些平面将四面体分成几个部分?并且当四面体体积为 1 时,求每个部分的体积．

15.6　(全俄,1986)．设四面体 $DABC$ 的体积等于 V．点 K、L、M、N 满足

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CL}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{CD},$$

计算 $LKNM$ 的体积．

15.7　(捷克, 1976)．设四面体 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 的位置是这样的：直线 AA', BB', CC', DD' 相互平行．面 ABC 和 $A'B'C'$ 没有公共点，且顶点 D 和 D' 分别在平面 $A'B'C'$ 和 ABC 上．证明,这两个四面体的体积相等．

15.8　(保加利亚, 1968)．在四面体 $ABCD$ 内部有一点 O, 使得直线 AO, BO, CO, DO 与四面体的面 BCD, ACD, ABD, ABC 分别交于 A_1, B_1, C_1, D_1 四点,且

$$\frac{AO}{A_1O}=\frac{BO}{B_1O}=\frac{CO}{C_1O}=\frac{DO}{D_1O}=k,$$

求 k 的所有可能的值．

15.9　(保加利亚, 1966)．在四面体 $ABCD$ 的棱 AB, AC, AD 上，对每个 $n\in N$, 分别取点 K_n, L_n, M_n, 使得 $AB=nAK_n$, $AC=n+1AL_n$, $AD=n+2AM_n$．证明,所有的平面 $K_nL_nM_n$ 共线．

15.10 (波兰,1979). 证明，连接四面体的顶点与相对的面的内切圆圆心的四条直线交于一点的必要且充分条件是，该四面体三组对棱的乘积彼此相等.

15.11 (保加利亚, 1976). 设一平面与四面体的一个顶点发出的三条棱相交. 证明，当且仅当这个平面过四面体内切球球心时，它分四面体表面所成的两部分的面积与其相应部分的体积成比例.

15.12 (捷克,1968). 证明，如果四面体有两组相互垂直的对棱，则所有各棱的中点位于一个球面上.

15.13 (中国,1983). 在六条棱长分别为 2, 3, 3, 4, 5, 5 的所有四面体中，最大的体积是多少?证明你的结论.

15.14 (评委会,希腊,1979). 证明，如果棱长为 a 的正四面体内接于棱长为 b 的正四面体，使得它的每个顶点恰好在后者的一个面上，则 $3a\geqslant b$.

15.15 (民主德国,1983). 在四面体 $ABCD$ 中，棱 AD, BD 和 CD 互相垂直，它们的长分别为 a, b, c. 证明，对 $\triangle ABC$ 的一条边上的任意一点 M, 从顶点 A, B, C 到直线 DM 的距离之和 S 满足

$$S\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

并确定等式何时成立.

15.16 (苏联,1988). 证明，对任意四面体都有

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

其中 a, b 是四面体一组对棱的长，r 为内切球的半径.

15.17 (南斯拉夫,1973;奥地利-波兰,1980). 证明，对四面体内部的任意一点，从这点观察它的各条棱时的视角之和大于 540°.

15.18 (苏联, 1982). 在四面体内部取点 M. 证明，点 M 对四面体各棱张角的余弦必有一个大于 $-\frac{1}{3}$.

15.19 (保加利亚,1976). 证明，空间中一点到棱长为 2 的正四面体四个顶点的距离都是整数的必要且充分条件是，该点是这个四面体的一个顶点.

15.20 (捷克,1973). 证明，对任意四面体的高 h_i 和旁切球的半径 r_i, $i=1, 2, 3, 4$, 有

$$2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$

15.21* (波兰,1978). 证明，对任意四面体的高 h_1, h_2, h_3, h_4 与各对棱间的距离 d_1, d_2, d_3, 有

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}.$$

15.22* (评委会,保加利亚,1981). 设一球面与四面体 $ABCD$ 的 AB, BC, CD, DA 四条棱相切的四个点是一个正方形的顶点. 证明，如果该球还与棱 AC 相切，则它必定与棱 BD 也相切.

15.23* (保加利亚, 1981). 设平面 α, β, γ, δ 与四面体 $ABCD$ 的外接球面分别切于点 A, B, C, D. 证明，如果平面 α 与 β 的交线与直线 CD 共面，则 γ 与 δ 的交线与直线 AB

共面。

15.24 （冬令营，中国，1987）。设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体，S_1，S_2，S_3，S_4 分别是以 A_1，A_2，A_3，A_4 为球心的球面，它们两两相切，如果存在一个点 O，使得以点 O 为球心可作一个半径为 r 的球面 P 与 S_1，S_2，S_3，S_4 都外切，还可作一个半径为 R 的球面 Q 与四面体的各棱都相切，证明，四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体。

15.25 （冬令营，中国，1988）。给定三个四面体 $A_iB_iC_iD_i$，$i=1, 2, 3$。过点 B_i，C_i，D_i 作平面 α_i，β_i，γ_i，分别与棱 A_iB_i，A_iC_i，A_iD_i 垂直，$i=1, 2, 3$。设九个平面 α_i，β_i，γ_i，$i=1, 2, 3$ 相交于点 E，且三点 A_1，A_2，A_3 在同一直线 l 上。求这三个四面体的外接球面的交集(形状怎样？位置如何？)

§16 多面体、球面和其他集合

（见第一部分：定义 11，16；定理 2，10，85，87，88，89）

16.1 （捷克，1979）。有一立方体，中心和边长为 $a<b<c$ 的长方体的对称中心重合，诸界面与长方体各界面平行。求立方体的边长，使得它与长方体的并的体积减去它与长方体之交的体积的差最小。

16.2 （苏联莫斯科，1962）。应当怎样放置长方体，才能使得它在水平面的投影面积最大？

16.3 （民主德国，1983）。证明，在边长为 a 的立方体内部可以作两个棱长为 a 的正四面体，使得它们没有公共点。

16.4 （中国，1983）。一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球的半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$。求乘积 mn。

16.5 （南斯拉夫，1973）。空间中有 5 个点，其中任意四点不共面。证明，过其中两点的直线中，必有一直线使得它与其他三点决定的平面相交，且交点在这三点构成的三角形内部。

16.6 （匈牙利，1980）。设空间被分为 5 个不交的非空集合。证明，一定有一个平面，它至少与其中的四个集合有公共点。

16.7 （评委会，苏联，1983）。证明，将空间任意划分为三个集合，其中必有一个集合，使得对每个 $a>0$，该集合含有两个点，它们的距离为 a。

16.8 （罗马尼亚，1980）。证明，对任意的向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，有

$$\sum(\varepsilon_1\boldsymbol{a}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{a}_2+\varepsilon_3\boldsymbol{a}_3)^2=8\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{a}_k^2,$$

其中左边的和式是对所有 8 个不同的 3 数组 ε_1，ε_2，ε_3 求和，而 ε_1，ε_2，$\varepsilon_3\in\{-1, 1\}$。将结论推广到任意 $n\in N$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ 的情形。

16.9 （捷克，1962）。从长为 a 的线段 AB 的两个端点各引一条垂直于 AB 的直线，在其上分别取点 C 和 D，又设 AB 的中点 O 到过 O 并垂直于线段 CD 的平面与 CD 的交点之间的距离为 r。证明，线段 CD 的长由 a 和 r 所决定。并确定点 C 的几何位置。

16.10 （保加利亚，1982）。半径为 r 的球面 s 经过半径为 R 的球面 S 的球心。证明，如果球面 S 的弦 AB 与球面 s 相切于点 C，则

$$AC^2+BC^2\leqslant 2R^2+r^2.$$

16.11 (美国,1982). 设半径为 r_1, r_2 的两个不相重合的球面都在半径为 R 的球面 S 内部与 S 相切,且都过点 A, B, C. 此外, 过点 A 且垂直于平面 ABC 的直线过球面 S 的中心. 证明, $r_1+r_2=R$.

16.12 (中国上海, 1985). 设正四棱锥 P 的底面是边长为 2 的正方形, 高是 h. 平面 π 平行于正方形的一条对角线, 与正四棱锥 P 的底面交角为 α. 把正四棱锥 P 正投影到平面 π 上. 问 α 为何值时,所得的图形面积最大,最大值是多少?

16.13 (罗马尼亚,1958). 分别用 S 和 V 表示一个正 n 棱锥的表面积与体积.

(1) 对给定的 n 与 S, 求 V 的最大值.

(2) 当 $n=4$, $S=144$, $V=64$ 时,求底边的长与棱锥的高.

16.14 (保加利亚,1982). 证明,对任意大于 1 的 $n\in N$, 在所有其底面外接圆半径为 R 的正 $2n$ 棱柱 $A_1\cdots A_{2n}A_1'\cdots A_{2n}'$ 中,只有当

$$A_1A_1'=2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$$

时,对角线 A_1A_{n+1}' 与平面 $A_1A_3A_{n+2}'$ 所成的角最大.

16.15 (匈牙利,1979). 证明,如果在一个侧棱相等的棱锥中,任意相邻的侧面构成的二面角相等,并且底面是边数为奇数的多边形,则这个多边形是正多边形.

16.16 (保加利亚, 1984). 设棱锥 $SABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形. 平面 α 与直线 AD, SA 和 SC 分别交于点 P, Q, R, 使得

$$\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{RC}{SC},$$

并且这三个点要么同时分属于线段 PD, QA 和 SR, 要么同时不属于这些线段. 点 N 是 CD 的中点,点 M 在直线 SB 上, 使得直线 MN 平行于平面 α. 证明, 对所有满足条件的平面 α, 点 M 都落在某一条长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}SB$ 的线段上.

16.17 (保加利亚,1977). 设棱台的四个底面面积为 S_1 与 S_2, 侧面积为 S. 证明,如果某个平行于底面的平面将棱台分为两个棱台,使得每个棱台都可内切一个球面,则

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2})^2.$$

16.18 (英国,1968). 在一个半径为 1 的球面上有若干个点, 其中任意两点间的距离 (1) 不小于 $\sqrt{2}$; (2) 大于 $\sqrt{2}$. 求这些点的最大个数.

16.19 (捷克, 1970). 求所有大于 1 的 $n\in N$ 与 $r_n>0$, 使得在半径为 1 的球面上可以安放 $n+1$ 个不相交的、半径为 r_n 的圆周 C_0, C_1, $\cdots$, C_n, 并且对任意 $i=1, 2, \cdots, n$, 圆周 C_i 与圆周 C_0 及 C_{i+1} 都相切,其中 $C_{n+1}=C_1$.

16.20 (美国,1979). 在球面上有三个过点 A 的大圆. 在这些大圆上分别取 B, C, D 三点,使得 $\angle AOB=90^\circ$, 且直线 OB 是 $\angle COD$ 的平分线. 证明,如果射线 AB', AC', AD' 分别与相应的圆周上的弧 AB, AC, AD 相切,则射线 AB' 是 $\angle C'AD'$ 的平分线.

16.21 (评委会,苏联, 1982). 在一个直圆柱体的底圆周上取对径点 A 与 B. 在另一底圆周上取一点 C, 使得 C 不在平面 ABO 上, 其中点 O 是圆柱体的轴的中点. 证明, 以 O 为顶点, OA, OB, OC 为棱的三面角中,诸二面角之和为 360°.

16.22 (美国, 1981). 设一个凸多面角的各平面角之和等于它的各二面角之和. 证明,这个多面角是三面角.

16.23 （评委会，比利时，1979）。能否把空间划分为1979个相等且不交的子集合？

16.24 （英国，1970）。求最少的平面个数，使得它们能将一个立方体划分为300份。

16.25 （苏联，1987）。有一凸多面体，每个面都是三角形。证明，可以用红蓝二色给它的棱染色，每条棱染一种颜色，使得从它的任意一顶点到达另一顶点时，既可沿仅由红色棱组成的路线走，也可沿仅由蓝色棱组成的路线走。

16.26* （罗马尼亚，1978）。在交线为 l 的两个平面 α 与 α' 上各取三个点 A, B, C 与 A', B', C'，平面 α' 绕轴 l 旋转。证明，如果 α' 在某个位置时，AA'，BB'，CC' 三线共点。则 α' 在任意位置时它们也共点，求这些交点的几何位置。

16.27* （捷克，1973）。考虑空间中绕不同的轴的旋转，它们把立方体 $ABCDA'B'C'D'$ 的顶点 A 变到 B。求在这些旋转中，立方体表面上能成为顶点 C 的像的点的几何位置。

16.28* （匈牙利，1982）。在具有直角坐标系的空间中有一个立方体，它有四个不共面的顶点，其坐标都是整数。证明，这个立方体的每个顶点的坐标都是整数。

16.29* （评委会，南斯拉夫，1979）。证明，如果长方体可以划分为一些小长方体，使得其中每一个都有一条长为整数值的棱，则原长方体也一定有一条棱，其长是整数。

第五章　　分　析

§17 数　列

(见第一部分,定义2, 12, 14, 15, 18, 19;定理1, 2, 10, 16, 18, 21)

17.1 (南斯拉夫,1976)。求和

$$a_1+a_2+\cdots+a_{99},$$

其中

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

17.2 (捷克,1972)。证明,存在数A和B,使得对每个$n\in N$,有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=A\operatorname{tg}n+Bn,$$

其中

$$a_k=\operatorname{tg}k\cdot\operatorname{tg}(k-1).$$

17.3 (美国纽约,1974)。设

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n},\ n\in N,$$

求

$$\lim_{n\to\infty}a_n.$$

17.4 (美国纽约,1974)。在正数列$a_0, a_1, \cdots$中,每个数a_n要么为$\frac{a_{n-1}}{2}$,要么为$\sqrt{a_{n-1}}$,其中$n\in N$,试问这个数列是否有极限属于区间$(0, 1)$?

17.5 (美国,1980;南斯拉夫,1981)。对给定的自然数$n\geqslant3$,求从n个不同的数中取出三个数构成的递增算术级数的最大数目。

17.6 (南斯拉夫,1981)。有一数列,其前四项依次为1, 9, 8, 1,而其他的项都是它前面四项之和的个位数,试问,在该数列中能否依次连续出现数1, 2, 3, 4?

17.7 (奥地利—波兰,1980)。正整数列$a_1<a_2<a_3<\cdots$满足$a_1=1$,且当$n\in N$时

$$a_{n+1}<2n,$$

证明,对每个$n\in N$,在数列$\{a_n\}$中总有两个项a_p和a_q,使得

$$a_p-a_q=n.$$

17.8 (波兰,1979)。给定数$A>1$与$B>1$及由区间$[1, AB]$中的数组成的数列$\{a_n\}$

$(n\in N)$。证明,存在由区间$[1, A]$中的数组成的数列$\{b_n\}$,使得对任意$m、n\in N$,都有

$$\frac{a_m}{a_n}\leqslant B\frac{b_m}{b_n}.$$

17.9 (评委会,法国,1982)。设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的每个项都是自然数,证明,存在一对下标$p<q$,使得$a_p\leqslant a_q$与$b_p\leqslant b_q$。

17.10 (中国北京,1964)。设正数列$a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots$满足$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$,其中$n\in N$,证明,对任意$n\in N$,有

$$a_n<\frac{1}{n}.$$

17.11 (国际数学竞赛,芬兰,1980)。用下述方式给定数列$a_0, a_1, \cdots, a_n$:

$$a_0=\frac{1}{2},$$

$$a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}a_{k-1}^2\ (k=1, \cdots, n).$$

证明

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

17.12 (中国,1988)。设$a_1=1$, $a_2=2$,且当$n\in N$时,

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & \text{当 } a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为偶数时},\\ a_{n+1}-a_n, & \text{当 } a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

证明,对每个$n\in N$,都有$a_n\neq 0$。

17.13 (奥地利—波兰,1980)。设数列$\{a_n\}$满足$|a_{k+m}-a_k-a_m|\leqslant 1$,其中$m, k\in N$,证明,对任意$p, q\in N$,有

$$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_q}{q}\right|<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

17.14 (苏联莫斯科,1972)。将0和1之间所有分母不超过n的分数都写成既约形式,再按递增顺序排成一列。设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是其中任意两个相邻的既约分数,证明

$$|bc-ad|=1.$$

17.15 (波兰,1978)。对给定的$a_1\in R$,用下述方式定义数列$a_1, a_2, \cdots$:对$n\in N$,

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right), & \text{当 } a_n\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } a_n=0 \text{ 时},\end{cases}$$

证明,这个数列中有无限多个非正项。

17.16 (英国,1980)。求所有的$a_0\in R$,使得由

$$a_{n+1}=2^n-3a_n,\ n\in Z^+$$

所确定的数列$a_0, a_1, \cdots$是递增的。

17.17 (奥地利,1972;保加利亚,1978)。证明,由条件

$$a_1, a_2\in Z,\ \frac{a_1^2+a_2^2+a}{a_1a_2}\in Z,\ a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+a}{a_n}$$

所确定的非零数列$a_1, a_2, \cdots$全由整数组成,其中a是某个数。

17.18 （捷克,1968）。证明,数列

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

的每一项都是整数,其中 $n\in Z$。并求所有使 a_n 被 3 整除的 $n\in Z$。

17.19 （捷克,1978）。证明,数列

$$b_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2$$

的每一项都是自然数，其中 $n\in N$，并且当 n 为偶数或奇数时分别有形式 $5m^2$ 或 m^2，其中 $m\in N$。

17.20 （苏联,1987）。求所有的 α，使得数列

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \cdots\cdots$$

的每个项都是负数。

17.21* （评委会,英国,1982）。数列 a_0，a_1，…满足

$$a_0=1,\ a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+(a-1)a_{n-1},$$

其中 $n\in N$，且 $a\in N$ 是参数。设 $p_0>2$ 是给定的素数，求满足下述两个条件的 a 的最小值：

(1) 如果 p 是素数,且 $p\leqslant p_0$，则 a_p 被 p 整除；

(2) 如果 p 是素数,且 $p>p_0$，则 a_p 不被 p 整除。

17.22* （英国,1978）。证明,恰有一整数列 a_1，a_2，…满足

$$a_1=1,\ a_2>1,\ a_{n+1}^3+1=a_na_{n+2},$$

其中 $n\in N$。

17.23* （捷克,1970）。对给定的素数 p，求满足

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_0}{a_2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}+\frac{p}{a_{n+1}}=1,\ \ n\in N$$

的不同的自然数数列 a_0，a_1，…的个数。

17.24* （英国,1983）。证明,对由递推关系式

$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ n\in N$$

给出的(菲波那契)数列 a_1，a_2，…，存在唯一的三数组 a，b，$c\in N$，使得 $b<a$，$c<a$ 并且对任意 $n\in N$，a_n-nbc^n 被 a 整除。

§ 18 极　　值

（见第一部分，定义 9, 15, 16；定理 10, 12, 14, 36）

18.1 （民主德国,1973）。求所有正数数对 (x, y) 使得函数

$$f(x,y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

在 (x, y) 处达到最小值,并求这个最小值。

18.2 （评委会,瑞典,1979）。求乘积 $x^2y^2z^2u$ 在条件 x，y，z，$u\geqslant 0$ 与

$$2x+xy+z+yzu=1$$

下的最大值。

18.3 （民主德国,1978；捷克,1980）。对给定的数组 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，是否存在点 $x\in$

R，使得函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$$

取到最小值?如果存在，则求出所有这样的点，并求函数$f(x)$的最小值。

18.4 （评委会，民主德国，1979）。设$n\geqslant 2$，求乘积$x_1x_2\cdots x_n$在条件

$$x_i\geqslant\frac{1}{n},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

与

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

下的最大值和最小值。

18.5 （评委会，瑞典，1979）。对给定的正整数$n\geqslant 2$和实数$a>0$，求

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$$

在条件$x_i>0(i=1,\ \cdots,\ n)$与

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$

下的最大值。

18.6 （罗马尼亚，1979）。给定正数$a_1<a_2<\cdots<a_n$，$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$是它的一个排列，求使乘积

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$$

取最大值的排列$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$。

18.7 （捷克，1963）。对每个$k\in N$，把$2k$表成互素的整数x与y之和，使得乘积xy取到最大值。

18.8 （捷克，1983）。对给定的数$n\in N$与$a\in[0,\ n]$，求

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$$

在条件

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$$

下的最大值。

18.9 （南斯拉夫，1974）。对给定的$n\in N$，求和为n的自然数之乘积的最大值。

18.10* （英国，1981）。当$m,\ n\in N$时，求$|12^m-5^n|$的最小值。

18.11 （苏联，1988）。设$x,\ y,\ z$为正数，且

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

求

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

的最小值。

18.12 （苏联，1988）。设a与d为非负的数，b与c为正数且$b+c\geqslant a+d$，求

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$$

的最小值。

18.13 （中国，1983）。函数

$$F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$$

在

$$0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$$

上的最大值M与参数A，B有关，试问A，B取什么值时M为最小？证明你的结论。

§19 函数的各种性质

（见第一部分，定义2，3，6；定理27，28，30，33，34）

19.1 （民主德国，1983）。对给定的两个正数x_1，x_2以及由公式

$$f(x)=ax^4+bx^2+c,$$

其中a，b，$c\in R$，$a\neq 0$。给出的函数$f:R\to R$，已知$f(0)=f(x_1)=1$与$f'(x_2)=0$，求系数a，b，c。

19.2 （罗马尼亚，1981）。是否存在函数$f:R\to R$，使得对所有的$x\in R$都有

$$f(x^2)-(f(x))^2\geqslant\frac{1}{4},$$

并且对不同的$x\in R$，函数值$f(x)$也不相同？

19.3 （匈牙利，1979；评委会，美国，1979）。证明，如果对所有x，$y\in R$，函数$f:R\to R$满足

$$f(x)\leqslant x,\ f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

则

$$f(x)\equiv x,\ x\in R.$$

19.4 （中国，1983）。函数$f(x)$定义在$[0,1]$上，且$f(0)=f(1)$。如果对不同的x_1，$x_2\in[0,1]$都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_1-x_2|,$$

证明，

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}.$$

19.5 （民主德国，1972）。给定函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\text{ 时},\\ \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x}, & \text{对其余的 }x\text{ 值}.\end{cases}$$

证明，当且仅当$a\in Q$时，函数$g(x)=f(x)+f(ax)$是周期函数。

19.6 （加拿大，1981）。设连续函数$f(x)$与$g(x)$满足

$$f(g(x))\equiv g(f(x)),\quad x\in R.$$

证明，如果方程$f(x)=g(x)$没有实数解，则方程$f(f(x))=g(g(x))$也没有实数解。

19.7 （苏联，1987）。函数$y=f(x)$定义在整个实数轴上，它的图象在围绕坐标原点旋转角$\frac{\pi}{2}$之后不变。

(1) 证明，方程 $f(x)=x$ 恰有一个解。

(2) 试举出一个具有上述性质的函数例子。

19.8 (罗马尼亚,1981)。设 $f:[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 是连续函数，证明

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$。

(2) 对函数 $f:(0, +\infty)\to(0, +\infty)$，命题(1)不成立。

19.9 (罗马尼亚,1979)。证明，不存在连续函数 $f:R\to R$ 使得当且仅当对使 $f(x+1)$ 为无理数的 $x\in R$，$f(x)$ 是有理数。

19.10 (美国纽约,1979)。是否存在不等于常数的函数 $f:R\to R$，使得对所有 $x, y\in R$ 都有

$$(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3?$$

19.11 (美国纽约,1976)。设连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 在区间 $(0,1)$ 中可微，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$，证明，存在 $a, b\in(0,1)$, $a\neq b$，使得

$$f'(a)f'(b)=1.$$

19.12* (澳大利亚，1982)。求所有具有下述性质的 $d\in(0,1]$：如果 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上且 $f(0)=f(1)$ 的任意一个连续函数，则存在 $x_0\in[0,1-d]$ 使得

$$f(x_0)=f(x_0+d).$$

19.13* (罗马尼亚,1978)。设函数 $f:R\to R$ 定义如下：如果 x 为无理数，则 $f(x)=0$；如果 $p\in \boldsymbol{Z}$, $q\in \boldsymbol{Z}$，且分数 $\frac{p}{q}$ 是既约的，则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^3}.$$

证明，这个函数在每个点 $x=\sqrt{k}$ 处可微，其中 k 是自然数但不是整数的平方。

19.14* (评委会，波兰，1976)。设 $I=(0,1]$，对给定的 $a\in(0,1)$，定义函数 $f:I\to I$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}x+(1-a), & \text{当 } 0<x\leqslant a \text{ 时},\\ x-a, & \text{当 } a<x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

证明，对任意区间 $J\subset I$，存在 $n\in N$，使得交集 $f^n(J)\cap I$ 非空。

19.15* (评委会，瑞士，1977)。对给定的递增函数 $f:R\to R$，定义函数 $g(x, y)$ 如下：

$$g(x, y)=\frac{f(x+y)-f(x)}{f(x)-f(x-y)},\ x\in R,\ y>0.$$

设当 $x=0$ 时对所有 $y>0$ 与当 $x\neq0$ 时对所有 $y\in(0, |x|]$ 都有

$$2^{-1}<g(x, y)<2.$$

证明，对所有 $x\in R$, $y>0$，有

$$14^{-1}<g(x, y)<14.$$

§20 函数方程

(见第一部分，定义 5, 6, 18, 20；定理 1, 3, 7, 16, 27, 28)

20.1 (美国纽约,1978)。函数 $f:R\to R$ 满足

$$f(xy)\equiv\frac{f(x)+f(y)}{x+y},\ x,\ y\in R,\ x+y\neq0,$$

是否存在 $x\in R$，使得 $f(x)\neq0$？

20.2 （保加利亚，1968）。求所有满足

$$xf(y)+yf(x)\equiv(x+y)f(x)f(y),\ x,\ y\in R$$

的函数 $f: R\to R$。

20.3 （苏联，1984）。求所有满足

$$\sin x+\cos y\equiv f(x)+f(y)+g(x)-g(y),\ x,\ y\in R$$

的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ $(x\in R)$。

20.4 （评委会，墨西哥，1988）。设 $f(n)$ 是定义在所有正整数上且取正整数值的函数。对所有正整数 m, n，有

$$f(f(m)+f(n))=m+n.$$

求 $f(1988)$ 的所有可能值。

20.5 （评委会，民主德国，1982）。设 M 是满足 $f(0)\neq0$ 与

$$f(n)f(m)\equiv f(n+m)+f(n-m),\ n,\ m\in Z$$

的函数 $f: Z\to Z$ 之集合，试求

(1) 满足 $f(1)=\frac{5}{2}$ 的所有函数 $f(n)\in M$；

(2) 满足 $f(1)=\sqrt{3}$ 的所有函数 $f(n)\in M$。

20.6 （奥地利—波兰，1979）。求所有满足

$$f(n+m)+f(n-m)\equiv f(3n),\ n,\ m\in Z^+,\ n\geqslant m$$

的函数 $f: Z^+\to R$。

20.7 （美国纽约，1976）。函数 f, $g: R\to R$ 不是常数并且满足

$$\begin{cases} f(x+y)\equiv f(x)g(y)+g(x)f(y), \\ g(x+y)\equiv g(x)g(y)-f(x)f(y), \end{cases}\quad x,\ y\in R.$$

求 $f(0)$ 与 $g(0)$ 的所有可能值。

20.8 （国际数学竞赛，卢森堡，1980）。求所有满足 $f(1)=2$ 与

$$f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1,\quad x,\ y\in Q$$

的函数 $f: Q\to Q$。

20.9 （南斯拉夫，1983）。设 $n\in Z$，函数 $f: Z\to R$ 满足

$$f(n)=\begin{cases} n-10, & \text{当 } n>100 \text{ 时}, \\ f(f(n+1)), & \text{当 } n\leqslant100 \text{ 时}. \end{cases}$$

证明，对任意 $n\leqslant100$，都有 $f(n)=91$。

20.10 （苏联，1988）。(1) 设函数 $f(x)$ 对所有 $x>0$ 有定义，且满足下面条件：

① 函数 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递增；

② 对所有 $x>0$，均有

$$f(x)>-\frac{1}{x};$$

③ 对所有 $x>0$，均有

$$f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1.$$

求函数值 $f(1)$。

(2) 给出一个满足(1)中三个条件的函数。

20.11 (罗马尼亚,1979)。函数 $f, g, h: N\to N$ 满足下述三个条件:

(1) 对不同的 $n\in N$, $h(n)$ 取不同的值;

(2) 函数 $g(n)$ 的值域是 N;

(3) $f(n)\equiv g(n)-h(n)+1, n\in N$.

证明, $f(n)\equiv 1, n\in N$.

20.12 (罗马尼亚,1978)。证明,存在函数 $f: N\to N$ 使得

$$f(f(n))\equiv n^2, n\in N.$$

20.13 (罗马尼亚, 1978)。考虑非常量函数 $f(n, m)$, 它定义在所有整数对的集合上,取值为整数且满足

$$f(n, m)\equiv\frac{1}{4}(f(n-1, m)+f(n+1, m)$$
$$+f(n, m-1)+f(n, m+1)), n, m\in Z.$$

证明,(1)这样的函数存在;

(2) 对每个 $k\in Z$, 任意一个这样的函数既取大于 k 的值,也取小于 k 的值。

20.14 (奥地利-波兰, 1978)。设 S 是所有整数对的集合的子集, 如果函数 $f: S\to S$ 可逆并且对任意 $(n, m)\in S$,

$$f(n, m)\in\{(n-1, m), (n+1, m), (n, m-1), (n, m+1)\},$$

则函数 $f(n, m)$ 称为万有的。证明, 如果至少存在一个万有函数, 则存在万有函数 $f(n, m)$, 它满足恒等式*

$$f(f(n, m))\equiv(n, m), (n, m)\in S.$$

20.15* (美国,1982)。设函数

$$f_k(x, y)=\frac{x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k}{k}, k\in Z, k\neq 0.$$

求所有非零的整数对 (m, n), 使得 $m\leqslant n$, $m+n\neq 0$, 并且

$$f_m(x, y)f_n(x, y)\equiv f_{m+n}(x, y),$$

其中 $x, y\in R$, $xy(x+y)\neq 0$.

提示: 数对 $m=2, n=3$ 与 $m=2, n=5$ 满足所说的条件。

20.16* (评委会,波兰,1977)。证明,设函数 $f(x, y)$ 定义在所有有理数对的集合上,只取正值并且满足下述三个恒等式:

$$f(xy, z)\equiv f(x, z)f(y, z);\quad f(z, xy)\equiv f(z, x)f(z, y);$$
$$f(x, 1-x)\equiv 1,\quad x、y、z\in Q.$$

则

$$f(x, x)\equiv 1, f(x, -x)\equiv 1, f(x, y)f(y, x)\equiv 1, x, y\in Q.$$

20.17* (评委会,南斯拉夫,1979)。证明,如果函数 $f: R\to R$ 满足下面两个恒等式中的一个,则必满足另一个:

$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y), x, y\in R,$$

$$f(xy+x+y)\equiv f(xy)+f(x)+f(y),\ x,\ y\in R.$$

20.18 (奥地利,1975)。求所有满足

$$f(xy)\equiv xf(y)+yf(x),\quad x,\ y>1$$

的连续函数 $f:(1,\ +\infty)\to R$。

20.19* (罗马尼亚,1982)。(1) 证明,如果连续函数 $f:R\to R$ 满足

$$f(f(f(x)))\equiv x,\ x\in R,$$

则对任意 $x\in R$ 都有

$$f(x)=x.$$

(2) 举出满足条件 $g(x)\neq x$ 与 $g(g(g(x)))\equiv x,\ x\in R$ 的(间断)函数 $g:\ R\to R$ 的例子。

20.20* (评委会,法国,1979)。求所有满足

$$f(x)+f^{-1}(x)\equiv 2x,\ x\in R$$

的单调可逆函数 $f:R\to R$。

20.21* (美国纽约,1977)。求所有满足

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\equiv\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ x,\ y\in R,\ x\neq y$$

的可微函数。

20.22 (比利时,1977)。求所有满足

$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y)+2xy,\ x,\ y\in R$$

的任意次可微的函数 $f:R\to R$。

20.23 (英国,1969)。证明,如果不恒为零的函数 $f:R\to R$ 满足

$$f(x)f(y)\equiv f(x+y),\ x,\ y\in R,$$

并且在点 $x=0$ 处可微,则它在每个点 $x\in R$ 处都任意次可微。

第六章　　多项式

§21　多项式的根

(见第一部分，定义 18, 20, 22～24, 26, 28～30, 32；

定理 2, 6, 28, 35, 38, 40, 41, 45～51, 53, 55～57, 59～61, 63)

21.1　(保加利亚，1980)．证明，多项式

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2},\ p\in R,\ p\neq 0$$

的根 x_1, x_2 满足

$$x_1^4+x_2^4\geqslant 2+\sqrt{2}.$$

21.2　(保加利亚，1961)．求所有的实数对 p, q，使得多项式 x^4+px^2+q 具有 4 个组成算术级数的实根．

21.3　(英国，1967)．证明，如果多项式 x^2+px+1 的根为 α 和 β，而多项式 x^2+qx+1 的根为 γ, δ，则有

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

21.4　(民主德国，1970)．证明，对任意非零的 α, β，多项式

$$\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$$

的根 x_1, x_2, x_3 满足

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$$

21.5　(奥地利，1983)．求所有的值 a，使得多项式

$$x^3-6x^2+ax+a$$

的根 x_1, x_2, x_3 满足

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$

21.6　(评委会，加拿大，1982)．设多项式

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c,\qquad a,\ b,\ c\in Z$$

的一个根等于其它两根之乘积，证明，$2P(-1)$ 被

$$P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$$

整除．

21.7　(评委会，土耳其，1985)．求所有以有理数 a、b、c 为根的三次多项式

$$x^3+ax^2+bx+c.$$

21.8 (美国,1977)。设 a 和 b 是多项式 x^4+x^3-1 的四个根中的两个根，证明 ab 是多项式 $x^6+x^4+x^3-x^2-1$ 的根。

21.9 (南斯拉夫，1981)。设 a, b, $c\in Z$, $a>0$, 且多项式 ax^2+bx+c 在区间 $(0, 1)$ 中有两个不同的根，证明，$a\geqslant5$. 再对 $a=5$ 给出一组 b, c, 使 ax^2+bx+c 满足前面的条件。

21.10 (捷克,1967)。设 a,b,c 是多项式 x^4-ax^3-bx+c 四个根中的三个根，求所有这样的三个数 a,b,c。

21.11 (捷克，1954)。证明，复数 a 和 b 满足 $a^2=2b\neq0$ 当且仅当多项式 x^2+ax+b 的根是复平面上一个等腰直角三角形的两个顶点，且这个三角形的直角顶点是坐标原点。

21.12 (冬令营,中国,1987)。证明，多项式 $P(x)=x^{n+1}-x^n-1$ 具有模为 1 的复根的必要且充分条件是，$n+2$ 被 6 整除。

21.13 (匈牙利,1983)。设多项式

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$$

有 n 个实根，并且系数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} 都是非负的。证明 $P(2)\geqslant3^n$。

21.14 (中国上海，1956)。设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是整系数多项式，并且存在奇数 k 与偶数 l, 使得 $P(k)$ 与 $P(l)$ 都是奇数，证明，$P(x)$ 没有整数根。

21.15 (保加利亚,1984)。设多项式

$$ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$$

恰有 n 个正根。证明，它所有的根都相等。

21.16 (保加利亚,1983)。多项式

$$x^5-x-1 \quad 和 \quad x^2+ax+b, \quad a, b\in Q$$

能否有公共的复根？

21.17 (新加坡,1978)。设 $P(x)$ 是某个 n 次多项式，数 $a<b$ 满足

$$P(a)<0,\ -P'(a)\leqslant0,\ P''(a)\leqslant0,\ \cdots,\ (-1)^nP^{(n)}(a)\leqslant0,$$
$$P(b)>0,\ P'(b)\geqslant0,\ P''(b)\geqslant0,\ \cdots,\ P^{(n)}(b)\geqslant0.$$

证明，多项式 $P(x)$ 所有实根都在区间 (a, b) 内。

21.18 (民主德国,1970)。证明，对任意 $n\in Z^+$, 多项式

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

至多有一个实根。

21.19* (民主德国,1971)。证明，如果 n 次实系数多项式 $P(x)$ 没有实根，则对任意 $\alpha\in R$, 多项式

$$Q(x)=P(x)+\alpha P'(x)+\cdots+\alpha^nP^{(n)}(x)$$

也没有实根。

21.20* (波兰,1979)。证明，如果多项式 $P(x)$ 的次数 $n>1$, 并且有 n 个不同的实根 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 则

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{P'(x_n)}=0.$$

21.21* (美国纽约,1975)。设 $P(x)$ 是实系数多项式，它的所有的根都是纯虚数。证

明，多项式$P'(x)$的所有的根除了一个之外也都是纯虚数。

21.22* （罗马尼亚，1978）。证明，非零的复系数多项式P和Q的根相同（重数也相同）的必要且充分条件为，函数$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|$在所有非零的$z\in C$处的值的符号相同。

21.23 （中国北京，1963）。证明，如果$bd+cd$是奇数，则整系数多项式

$$P(x)=x^3+bx^2+cx+d$$

不能分解为两个整系数多项式的乘积。

§22 多项式的整除性和相等

（见第一部分，定义 11, 22, 23；定理 2, 4, 24, 35～47, 49～55, 57, 58, 63）

22.1 （美国纽约，1973；比利时，1981）。证明，对任意$n\in Z^+$，多项式$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$被多项式x^2+x+1整除。

22.2 （罗马尼亚，1962）。证明，对任意$n\in N$，$\alpha\in R$，并且$n\neq 1$，$\sin\alpha\neq 0$，多项式

$$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$$

被多项式

$$Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$$

整除。

22.3 （罗马尼亚，1966）。设多项式$P(x)$的次数小于4，并且存在多项式$P(x)$，使得

$$7\sin^{31}t+8\sin^{13}t-5\sin^5t\cos^4t-10\sin^7t+5\sin^5t-2$$
$$\equiv P(\sin t)(\sin^4t-(1+\sin t)(\cos^2t-2))+R(\sin t),\ t\in R.$$

试求所有这样的$R(x)$。

22.4 （美国，1977）。求所有的m，$n\in N$，使得多项式

$$1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$$

被多项式$1+x+x^2+\cdots+x^m$整除。

22.5 （美国，1976）。设多项式$P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$和$S(x)$满足

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)\equiv(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x).$$

证明，多项式$P(x)$被多项式$x-1$整除。

22.6 （中国安徽省，1978）。求所有的二次三项式$P(x)$，它在$x=\frac{1}{2}$处取到极小值$-\frac{49}{4}$，且它的两个根的四次方之和为337。

22.7 （美国纽约，1975）。求所有满足$P(0)=0$且

$$P(x)\equiv\frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1)),\quad x\in R$$

的多项式$P(x)$。

22.8 （民主德国，1977）。求所有满足

$$xP(x-1)\equiv(x-2)P(x),\ x\in R$$

的多项式$P(x)$。

22.9 （美国纽约，1976）。求所有满足

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)\equiv 0,\quad x\in R$$

的多项式 $P(x)$。

22.10 （罗马尼亚，1980）。求所有满足

$$P(x^2)\equiv(P(x))^2,\ x\in R$$

的非零多项式 $P(x)$。

22.11 （保加利亚，1976）。求所有满足

$$P(x^2-2x)\equiv(P(x-2))^2,\quad x\in R$$

的非零多项式 $P(x)$。

22.12 （评委会，保加利亚，1979）。求所有满足

$$P(x)P(2x^2)\equiv P(2x^3+x),\ x\in R$$

的实系数非零多项式 $P(x)$。

22.13 （罗马尼亚，1978）。证明，对任意多项式 $P(x)\neq x$ 和任意 $n\in N$，多项式

$$Q_n(x)=\overbrace{P(P(\cdots P}^{n\text{个}P}(x)\cdots))-x$$

被多项式 $Q_1(x)=P(x)-x$ 整除。

22.14 （罗马尼亚，1978）。证明，如果三次实系数多项式 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 对所有 $x\in R$ 都满足 $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$，并且至少有一个点 $x_0\in R$ 使得 $P(x_0)=R(x_0)$，则存在 $k\in[0,1]$，使得

$$Q(x)\equiv kP(x)+(1-k)R(x),\quad x\in R$$

对四次项实系数多项式相应的结论是否成立。

22.15 （评委会，匈牙利，1979）。给定多项式 $P(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq0$。证明，对每个 $n\in N$，至多有一个 n 次多项式 $Q(x)$，使得

$$Q(P(x))\equiv P(Q(x)),\ x\in R.$$

22.16 （罗马尼亚，1979）。证明，多项式 $P(z)$ 是关于 $z\in C$ 的偶函数的必要且充分条件是，存在多项式 $Q(z)$，使得

$$P(z)\equiv Q(z)Q(-z),\ z\in C.$$

22.17 （苏联莫斯科，1953）。证明，多项式 $x^{200}y^{200}+1$ 不能表成一个 x 的多项式 $f(x)$ 与一个 y 的多项式 $g(y)$ 的乘积 $f(x)g(y)$ 的形式。

22.18 （评委会，匈牙利，1979）。证明，如果实系数多项式 $P(x)$ 对所有 $x\in R$ 只取非负的值，则它可表为

$$P(x)=(Q_1(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2,$$

其中 $Q_1(x)$，…，$Q_n(x)$ 是实系数多项式。

22.19* （匈牙利，1976，评委会，瑞典，1976）。对所有 $x>0$，实系数多项式 $P(x)$ 满足 $P(x)>0$。证明，存在非负系数多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$ 使得

$$P(x)\equiv\frac{Q(x)}{R(x)}.$$

22.20* （评委会，民主德国，1983）。设 $A(n)$ 是所有多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

的集合，其中

$$0\leqslant a_0=a_n\leqslant a_1=a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{[\frac{n}{2}]}=a_{[\frac{n+1}{2}]}.$$

证明，如果 $P(x)\in A(n)$，$Q(x)\in A(m)$，则多项式

$$P(x)Q(x)\in A(m+n).$$

22.21 (评委会，英国，1985)．一个关于 x, y, z 的多项式 $P_m(x, y, z)$，$m=0, 1, 2, \cdots$序列定义如下：

$$P_0(x, y, z)=1,$$

$$P_m(x, y, z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x, y, z+1)-z^2P_{m-1}(x, y, z), \quad m>0.$$

证明，每一 $P_m(x, y, z)$是对称的，即对 x, y, z 的任意排列，它的值不变．

22.22* (评委会，匈牙利，1977)．对每个 $n\in N$，是否存在非零的 n 元整系数多项式 P 和 Q，使得

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\equiv Q(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2), \ x_1x_2, \cdots, x_n\in R.$$

22.23* (评委会，1981)．设多项式 $P(x)$和 $Q(x)$的次数都大于 0，记

$$P_c=\{z\in C\,|\,P(z)=c\}, \ Q_c=\{z\in C\,|\,Q(z)=c\}.$$

证明，如果 $P_0=Q_0$，$P_1=Q_1$，则 $P(x)\equiv Q(x)$，$x\in R$.

22.24* (波兰，1978)．证明，如果次数小于 $m\in N$ 的多项式 $P(x, y)$，$Q(x, y)$，$R(x, y)$满足

$$x^{2m}P(x, y)+y^{2m}Q(x, y)\equiv(x+y)^{2m}R(x, y), \quad x, y\in R,$$

则

$$P(x, y)\equiv Q(x, y)\equiv R(x, y)\equiv 0.$$

§ 23 多项式的各种性质

(见第一部分，定义 10, 18～20, 28～32；定理 2, 4, 17, 18, 27, 45～50, 52, 62)

23.1 (罗马尼亚，1962)．对整数 p 和 q 应当加上什么限制，才能使得

(1) 对所有 $x\in Z$，多项式 $P(x)=x^2+px+q$ 都取偶数(奇数)值？

(2) 对所有 $x\in Z$，多项式 $Q(x)=x^3+px+q$ 的值都能被 3 整除？

23.2 (苏联莫斯科，1957)．设对任意 $x\in Z$，整系数多项式

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

都能被 5 整除．证明，系数 a, b, c, d 都能被 5 整除．

23.3 (民主德国，1983)．证明，多项式

$$P(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$$

对所有 $x\in Z$ 都取整数值．

23.4 (捷克，1962)．求所有的 $x\in Z$，使得多项式

$$2x^2-x-36$$

的值是某个素数的平方．

23.5 (罗马尼亚，1975)．对给定的数 $p, q\in R$，求多项式

$$P(x)=x^2+px+q$$

当 $x\in[-1, 1]$时所有的值．

23.6 (苏联，1983)．学生按题号顺序解一组二次方程的练习；当一道方程有解时，下一道方程按下述方式构成：常数项是其较大的根，一次项 x 的系数是较小的根，而二次项 x^2 的系数都等于 1．证明，这组练习题不可能继续无限地编下去，并求出至多有多少个二次三项式能满足题目的条件．

23.7 （中国北京，1963）．设整系数多项式 $P(x)$ 在四个不同的 $x\in Z$ 上都取值为 2，证明，对任意 $x\in Z$, $P(x)\notin\{1,3,5,7,9\}$．

23.8 （英国，1980）．给出一个集合 M，它由 7 个连续的自然数组成，而且存在一个 5 次多项式 $P(x)$，使得：(1) 多项式 $P(x)$ 的每个系数都是整数；

(2) 在 M 中有包含它的最大数和最小数在内的五个数 k 满足 $P(k)=k$；

(3) 存在 $k\in M$ 满足 $P(k)=0$．

23.9 （苏联，1982）．(1) 是否存在以 x, y, z 为变元的多项式

$$P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\ R=R(x,y,z)$$

使得恒等式

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$$

成立？

(2) 上题中的恒等式改为

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$$

呢？

23.10 （民主德国，1974）．(1) 证明，不存在多项式 $P(x)$，使得对所有 $x\in R$，都有 1) $P'(x)>P''(x)$；2) $P(x)>P''(x)$．

(2) 如果 1) 换为 1′) $P(x)>P'(x)$，(1)中的结论还成立吗？

23.11 （罗马尼亚，1982）．给定实系数多项式 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ 和实数 $a_1, \cdots, a_n$．证明，如果函数

$$f(x)=P_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_k|P_k(x)|$$

在 R 中不同的点上取不同的值，则它的值域为 R．

23.12 （评委会，罗马尼亚，1983）．设 $\{a_n\}$ 是非波那契数列，其定义如下：$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $n\in N$．证明，如果 990 次多项式 $P(x)$ 满足：当 $k=992, \cdots, 1982$ 时，$P(k)=a_k$，则 $P(1983)=a_{1983}-1$．

23.13 （英国，1978）．证明，

(1) 对任意 $n\in N$，存在 n 次整系数多项式 $P_n(x)$，使得

$$2\cos nt=P_n(2\cos t),\ t\in R.$$

(2) 对任意 $\alpha\in Q$，数 $\cos\alpha\pi$ 要么等于 $0, \pm\frac{1}{2}$，或 ±1，要么是无理数．

23.14 （芬兰，1980）．设坐标平面上的曲线 L 是某个多项式

$$P(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s\ (p,q,r,s\in R)$$

的图象，如果平面上的一条直线平行于 Ox 轴，并且和曲线 L 相交于四个点 A, B, C, D（它们自左到右排列），则称此直线为水平线．此外，如果其中的线段 AB, AC 和 AD 的长度还能构成某个三角形的三条边长，则称此直线为三角形水平线．证明，只有下列的两种情形：要么所有的水平线都是三角形水平线，要么所有的直线都不是三角形水平线．

23.15 （波兰，1977）．设 $Q(x)$ 是非零多项式．证明，对每个 $n\in Z^+$，多项式

$$P(x)=(x-1)^nQ(x)$$

至少有 $n+1$ 个非零系数．

23.16* （捷克，1974）．设 M 是所有形如

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a,\ b,\ c,\ d\in R,$$

且当 $x\in[-1,1]$ 时满足 $|P(x)|\leqslant 1$ 的多项式的集合．证明，必有某个数 k，使得对所有 $P(x)\in M$，都有 $|a|\leqslant k$．并求最小的 k．

23.17* （评委会,芬兰,1983)．设 p 和 q 是任意的自然数，证明，存在整系数多项式 $P(x)$，使得对 x 轴上长为 $\frac{1}{q}$ 的某个区间中的每一个点 x，都有

$$\left|P(x)-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

23.18 （民主德国,1980)．求所有的三次实系数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，使得下面的四个条件能够满足：

(1) 这两个多项式在点 $x=1, 2, 3, 4$ 只取值 0 或 1；

(2) 如果 $P(1)=0$ 或 $P(2)=1$，则 $Q(1)=Q(3)=1$；

(3) 如果 $P(2)=0$ 或 $P(4)=0$，则 $Q(2)=Q(4)=0$；

(4) 如果 $P(3)=1$ 或 $P(4)=1$，则 $Q(1)=0$．

23.19 （美国,1975)．设 n 次多项式 $P(x)$ 满足

$$P(k)=\frac{k}{k+1},$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n$．求 $P(n+1)$．

23.20 （评委会,1981)．设 n 次多项式 $P(x)$ 满足

$$P(k)=\frac{1}{C_n^k},$$

其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n$．求 $P(n+1)$．

23.21* （评委会,越南,1977)．设给定整数 $x_0<x_1<\cdots<x_n$．证明,多项式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 取的值当中,存在这样一个数，其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$．

23.22* （评委会，匈牙利，1979)．设多项式 $P(x)$ 的次数最多是 $2n$，且对每个整数 $k\in[-n, n]$，都有 $|P(k)|\leqslant 1$．证明,对每个 $x\in[-n, n]$，$P(x)\leqslant 2^{2n}$．

23.23 （评委会,保加利亚,1988)．设 n 是正整数,求多项式

$$P_n(x)=(x^2+x+1)^n$$

的奇系数的个数．

第七章　组合数学

§24　集合与子集

(见第一部分，定义1~4，11；定理1，97)

24.1　(捷克，1973)．n元集合具有多少个不同的不交子集对？

24.2　(波兰，1978)．集合X由n个元素构成．对两个子集A_1，$A_2 \subset X$，求得集合$A_1 \cap A_2$的元素个数．证明，所有求得的个数之和为$n4^{n-1}$．

24.3　(美国纽约，1978)．设整数$n>3$，

$$k=\left[\frac{1}{6}n(n+1)\right],$$

且集合X_n由

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

个元素构成．已知集合X_n中有k个元素是蓝色的，k个元素是红色的，其他元素都是白色的．证明，集合X_n可以分为两两不交的子集A_1，A_2，…，A_n，使得对每个$m=1$，2，…，n，子集A_m恰有m个元素，而且都同色．

24.4　(南斯拉夫，1972)．对每个$n \in N$，求最大的整数$k \in N$，使得在n元集合中，可以取出k个子集，其中任意两个子集的交集非空．

24.5　(英国，1976)．设A_1，A_2，…，A_{50}是有限集合X的50个子集，每个子集都含有集合X的半数以上的元素．证明，存在子集$B \subset X$，它至多含有5个元素，并且和集合A_1，A_2，…，A_{50}中每一个至少有一个公共元．

24.6　(奥地利-波兰，1978)．给定1978个集合，每个集合都含有40个元素．已知其中任意两个集合都恰有一个公共元．证明，存在一个元素，它属于所有1978个集合．

24.7　(中国北京，1963)．把2^n个元素的集合分为若干个两两不交的子集．按照下述规则将某一个子集中某些元素挪到另一个子集：从前一子集挪到后一子集的元素个数等于后一子集的元素个数(前一子集的元素个数应不小于后一集合的元素个数)．证明，可以经过有限次挪动，使得到的子集与原集合相重合．

24.8　(评委会，捷克，1979)．给定自然数$n \geqslant 2$．设M是所有不超过n的自然数的数对$i<k$的集合的子集．已知如果数对$i<k$属于集合M，则所有数对$k<m$都不属于M．集合M最多含有多少个数对？

24.9 (评委会,比利时,1979). 集合X由n个元素组成. X中最多有多少个这样的3元子集,使得其中任意两个3元子集都恰有一个公共元.

24.10 (美国,1979). 在n个元素组成的集合中取$n+1$个不同的3元子集. 证明,其中必有两个,它们恰有一个公共元.

24.11 (苏联莫斯科, 1987). 能否把整数集合分为三个子集, 使得对每个整数n, n、$n-50$和$n+1987$都在不同的子集?

24.12* (罗马尼亚,1978). 集合X划分为两两不交的子集A_1, A_2, $\cdots$, A_n, 又划分为两两不交的子集B_1, B_2, $\cdots$, B_n. 已知任意两个不交的子集A_i与B_j的并集$A_i\cup B_j$至少含有n个元素,$1\leqslant i$, $j\leqslant n$. 证明,集合X的元素个数至少为$\frac{n^2}{2}$. 它能否等于$\frac{n^2}{2}$?

24.13 (中国合肥,1983). 某市购进一批公共汽车,计划建1983个汽车站, 并开辟若干线路沟通它们. 原则是: (1) 尽可能多开辟一些线路; (2) 每两条线路至少有一个公用车站; (3) 每个车站至多在两条不同线路上. 问最多能开辟多少条线路? 每条线路至少应经过多少个车站?

§25 利用图的题目

(见第一部分,定义43, 定理1, 2, 94)

25.1 (英国, 1972). 在集合S的元素之间引进关系"$\rightarrow$". (1) 对任意两个元素a, $b\in S$, 要么$a\rightarrow b$, 要么$b\rightarrow a$, 二者恰有一个成立; (2) 对任意三个元素a, b, $c\in S$, 如果$a\rightarrow b$, 且$b\rightarrow c$, 则$c\rightarrow a$. 集合S中最多能有多少个元素?

25.2 (美国,1982). 某个团体有1982个人, 其中任意4人都至少有一个人认识其他三个人. 认识其他所有的人的人数最少是多少?

25.3 (保加利亚, 1978). 由五人组成一个公司, 其中任意三个人总有两个人彼此认识,也总有两个彼此不认识. 证明,这五人可以围桌而坐,使得相邻的人彼此认识.

25.4 (美国,1978). 九名数学家出席一次国际会议,其中任意三个人中至少有两人能讲同一种语言. 如果每位数学家最多能讲三种语言. 证明, 至少有三位数学家能用同一种语言交谈.

25.5 (1) (英国, 1980). 在一所房子里有10个人,其中任意三人中至少有两人相互认识. 证明,其中有4人,任意两人都相互认识.

(2) (评委会,波兰,1977). 如果把(1)中的数字10改成9, 结论仍成立否?

25.6 (保加利亚,1981;美国,1981). 在某个国家,任意两个城市之间用下列交通工具之一进行联络: 汽车、火车和飞机. 已知没有一个城市同时拥有这三种交通工具, 并且不存在这样三个城市, 其中任意两个在联络时都用同一种交通工具. 这个国家最多有多少个城市?

25.7 (南斯拉夫,1975). 某团体中, 任意两个彼此认识的人都没有共同的熟人, 而任意两个彼此不认识的人都恰有两个共同的熟人. 证明, 该团体中每个人所认识的人数都相同.

25.8 (匈牙利,1977). 有三所学校,每所学校有n名学生, 已知任意一名学生认识其他两所学校的学生总数都是$n+1$. 证明, 可以从每所学校各取一名学生, 使得这三名学生

彼此认识。

25.9* （奥地利，1973）。在空间中给定 $2n$ 个不同的点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$，$n>1$，其中任意三点不共线。设 M 是 n^2+1 条以给定的点为端点的线段集合，证明，存在一个三角形，其顶点为给定的点，其边都属于集合 M。又证明，如果集合 M 的元素个数不超过 n^2，则这样的三角形未必存在。

25.10* （罗马尼亚，1978）。在小伙子和姑娘们参加的晚会上，有人发现，对其中任意一群小伙子，至少认识其中一名小伙子的姑娘们的人数不少于这群小伙子的人数。证明，每个小伙子都可以和他所认识的姑娘结伴，共同起舞。

25.11 （苏联，1988）。某个国家有 21 个城市，由若干家航空公司担负它们之间的空运任务，每家公司都在 5 个城市之间设有直达航线（无需着陆，且两城市间允许有几家航空公司的航线），而每两个城市之间都至少有一条直达航线。问至少应有多少家航空公司。

25.12* （评委会，澳大利亚，1983）。10 家航空公司在城市 $P_1, P_2, \cdots, P_{1983}$ 之间设有航班。已知任意一个城市都可直达其他任意一个城市而无需中转，而且每条（直达）航线允许几家公司共同使用。证明，必有一家公司，它能够担负这样的环游任务，即从某个城市出发，只使用奇数次航线，最后回到原来的城市。

25.13* （中国，1987）。设 $n>3$，且 n 名乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同。证明，总可以从中去掉一名选手，使得余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同。

25.14* （冬令营，中国，1987）。某次体育比赛，每两名选手各赛一场，无平局。通过比赛确定优秀选手。设 A 为选手，如果对其他任意选手 B，要么 A 胜 B，要么存在选手 C，使得 C 胜 B，A 胜 C，则 A 即为优秀选手。证明，如果按上述规则选定的优秀选手只有一名，则他必定胜其他所有选手。

25.15* （苏联，1988）。排球比赛中，每两球队都各赛一场。对两个球队 A 与 B，如果 A 胜 B，或者存在某个球队 C，使得 A 胜 C，C 胜 B，则称球队 A 优于球队 B。比赛结束后，优于其他所有球队的球队即被授予冠军称号，比赛结束后能否恰有两个冠军队？

25.16* （评委会，捷克，1988）。在 $n\times n$ 棋盘的方格中分别填写 $1, 2, \cdots, n^2$，$n\geqslant 2$，每格一个数。证明，必有两个相邻（有公共边）方格，方格中二数之差至少为 n。

§26 各种组合问题

（见第一部分，定义 16, 18, 35, 43, 44；定理 1, 2, 6, 10, 93～97）

26.1 （南斯拉夫，1975）。在圆周上按任意顺序写上 4 个 1 和 5 个 0。然后进行下面的运算：在相同的相邻数字之间写上 0，而在不同的相邻数字之间写上 1，并擦掉原来的数字。接着进行同样的运算，如此继续。证明，不管这种运算进行多少次，都不可能得到 9 个 0。

26.2 （评委会，保加利亚，1979）。在方格纸上任意标出 n 个方格。证明，其中有不少于 $\frac{n}{4}$ 个方格，它们两两不相邻（所谓两个方格相邻，是指它们有公共边）。

26.3 （南斯拉夫，1981）。一只老鼠偷吃棱长为 3，并被切成 27 块单位立方体的立方体奶酪。当老鼠吃完了某一小立方块后，就再吃相邻的（有公共侧面）另一个小立方块。问，

这只老鼠能吃遍除正中央那个立方块之外的全部小立方块吗？

26.4 （捷克，1977）．在直线上给定 n 个不同的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, n\geqslant 4$．用 4 种颜色给这些点染色，每个点染一种颜色，而且 4 种颜色都用上．证明，直线上必有一线段，它含有 4 种颜色的点，其中两种颜色的点各恰有一个，另两种颜色的点各至少有一个．

26.5 （罗马尼亚，1978）．在平面上给定一个 n 个点的集合 M，其中任意三点不共线．两个端点在集合M中的每条线段都标上一个数 $+1$ 或 -1，而且标上 -1 的线段个数为 m．如果顶点都在M中的三角形的三边上的数之乘积为 -1，则三角形称为负的．证明，负三角形的个数与乘积 nm 同奇偶．

26.6 （北京，1964）．一条环形公路上有 n 个加油站，它们所储的汽油总量足够一辆汽车在整个环形公路上行驶一周．证明，带着（容量无限制的）空油罐的汽车能够从某个加油站出发（带上该站所有存储的汽油），完成环形公路上整个旅程．

26.7 （南斯拉夫，1974）．在 8×8 国际象棋棋盘上的第一行放上 8 枚白子，在第八行放上 8 枚黑子，每格一子．按下列规则进行游戏：白方先走，黑白双方轮流沿竖列走自己一方的子．每一步让棋子沿着竖列前进或后退一格或若干格，既不能从棋盘上取下棋子，也不能把棋子放进对方棋子已占据的方格或者越过对方棋子．谁最先不能走谁就算输．证明，黑方总能赢．

26.8 （南斯拉夫，1983）．$1\times n$ 长方形区域上的 n 个方格依次编号为 $1, 2, \cdots, n$．在编号为 $n-2, n-1, n$ 的方格里各放一枚棋子．有两个人在玩下面的游戏：每个人每走一步就把其中任意一枚棋子移到编号较小的空格里．谁先无法走谁就算输．证明，谁先走谁就能赢．

26.9 （南斯拉夫，1983）．在 8×8 国际象棋棋盘上的棋子"海豚星"每一步只能向上、向右或向左下方走一个方格（图 26.1）．"海豚星"能否从棋盘的左下角的方格上出发，走遍所有方格，并且每个方格恰好经过一次？

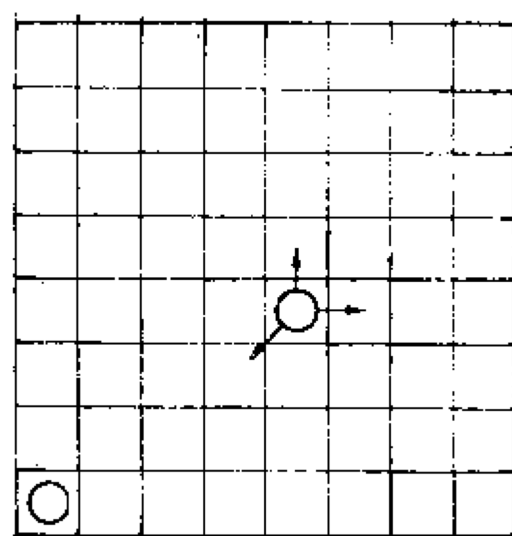


图 26.1

26.10 （评委会，波兰，1982）．在整个平面上有一个无限大的方格棋盘，上面摆好了一些棋子，它们恰好组成一个 $3k\times n$ 矩形．按下述的规则进行游戏：每一枚棋子都可越过（沿水平方向或竖直方向）相邻的棋子，放进紧挨着这枚相邻棋子的空格里，并把相邻棋子从棋盘上取下来．证明，不论怎样走，棋盘上都不会恰好剩下一枚棋子．

26.11 （苏联，1988）．在 $n\times n$ 方格表的每个方格里填有一个实数，而且每一行、每一列上数字之和都为 0．现在在方格表进行如下操作：任取一行数字，将它们依次加到某一列数字上（将每行数字自左至右编为第 $1, 2, \cdots, n$ 个数字，将每列数字自上至下同样编号，把所取的行的第一个数字加到该列的第一个数字，把该行的第二个数字加到该列第二个数字，等等），然后再从另一列数字中依次减去该行的数字．证明，可以经过有限次操作，使表上所有数字都变为 0．

26.12 （罗马尼亚，1978）．给定一个凸 n 面体，$n\geqslant 5$，每个顶点恰好引出三条棱．有两人在玩下面的游戏：每人都在一个尚未签名的界面上写下自己的名字，谁先把自己的名字签在具有公共顶点的三个界面上，谁就算赢．证明，先写者总有取胜的策略．

26.13 （评委会，罗马尼亚，1977）。给定$n\in N$。设$A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$是由$m=2^n$个数$a_i\in\{1, -1\}$，$i=1, 2, \cdots, m$组成的$m$数组。定义运算$S$如下：

$$S(A)=(a_1a_2, a_2a_3, \cdots, a_{m-1}a_m, a_ma_1).$$

证明，对任意m数组A，序列A，$S(A)$，$S(S(A))$，…中含有由m个1组成的数组。

26.14 （中国，集训班，1988）。设$A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$是由$m$个数$a_i\in\{0, 1\}$，$i=1, 2, \cdots, m$组成的$m$数组。定义运算$S$如下：

$$S(A)=(b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots, b_{2m-1}, b_{2m}),$$

其中当$a_i=1$时，$b_{2i-1}=0$，$b_{2i}=1$，当$a_i=0$时，$b_{2i-1}=1$，$b_{2i}=0$，$i=1, 2, \cdots, m$。用$S^n(A)$表示$\underbrace{S(S(\cdots S(A)\cdots))}_{n个}$。取$A=(1)$。试问在$S^n(A)=(a_1, a_2, \cdots, a_{2^n})$中有多少个由连续两项组成的数对$(a_i, a_{i+1})$满足$a_i=a_{i+1}=0$？

26.15 （匈牙利，1986）。在6×6棋盘上摆好一些多米诺骨牌，每个多米诺骨牌都覆盖两个相邻的方格。证明，如果至少还有14个方格没有被覆盖，则至少还能再摆上一个多米诺骨牌而不必移动其他的骨牌(注，多米诺骨牌是一种形状为1×2矩形的骨牌)。

26.16 （美国纽约，1976）。证明，用特利米诺能够覆盖剪掉某个方格的$2n\times2n$棋盘，其中n不能被3整除。所谓特利米诺是指剪掉一个方格的2×2正方形的纸牌。

26.17 （苏联，1987）。在8×8棋盘上至少可以摆上多少个特利米诺，使得在不相重叠的条件下无法在棋盘上再摆上一个特利米诺？

26.18 （美国，1976）。(1) 在4×7矩形棋盘上每个方格都染成白色或黑色。证明，在棋盘上必有一个矩形，它由棋盘的水平线和竖直线组成，所有4个角上的方格同色。

(2) 给出4×6矩形棋盘的一种染色，使得棋盘上不存在(1)中所说的矩形。

26.19 （瑞典，1982）。在直角坐标平面上有一个集合M，它由适合$x, y\in N$并且$x\leqslant12$，$y\leqslant12$的点(x, y)组成，其中共有144个点，每个点染成红、白或蓝色。证明，存在一个矩形，它的边与坐标轴平行，所有顶点同色，而且都在集合M中。

26.20 (1) （评委会，越南，1977）。在直角坐标平面上标出n个点，$n\geqslant3$，它们的坐标都是整数，其中任意三点都构成一个三角形，而且其中线交点的坐标不都是整数。求符合上述要求最大点数n。

(2) （评委会，罗马尼亚，1977）。在空间标出37个坐标都是整数的点，任意三点不共线。证明，其中一定有3个点，使得以它们为顶点的三角形的中线交点的坐标都是整数。

26.21* （南斯拉夫，1975）。最多能在$3n\times3n$国际象棋棋盘上摆上多少个“堡垒”，使得每个堡垒至多受到另外一个堡垒的攻击？

26.22* （匈牙利，1981）。设偶数n大于2。用$\frac{n^2}{2}$种颜色给$n\times n$国际象棋棋盘上的方格染色，每种颜色恰有两个方格。证明，棋盘上可以摆上n个堡垒，使得每种颜色的方格都恰有一个堡垒，而且不能相互攻击。

26.23* （匈牙利，1979；澳大利亚，1982）。在一个$n\times n$表上，每个空格都写着一个字母。已知写着字母的表上所有的行都不同。证明，其中必有一列，擦掉这一列后，余下的表中仍然所有的行都不同。

26.24* （评委会，卢森堡，1983）。在建立直角坐标系的空间中有一个点集E，其中每

个点的坐标都是0至1982之间的整数．用红蓝二色给其中每个点染色，使得顶点在E中而棱平行于坐标轴的每个平行六面体中红色顶点数被4整除．这样的染色方法有多少种？

§27 初等概率论

（见第一部分，定义18，45～50；定理95，96，98～100）

27.1 （比利时，1980）．两个箱子装有白球与黑球，两箱球的总数为25．随机地从两个箱子里各取出一个球．已知两个取出的球都是白色的概率为0.54．求取出的两个球都是黑色的概率．

27.2 （英国，1973）．某个班级的教师和学生在一起解答问题．教师答对的概率为α，男生和女生答对的概率分别为β和γ．随机地选取一位学生，其答案和教师的答案相同的概率为$\frac{1}{2}$．求班上男生和女生的比数．

27.3 （美国，1983）．从正n边形的顶点中随机取出两个不同的3点组，$n\geqslant 6$，使得以这两个3点组为顶点组成的两个三角形不交的概率是多少？

27.4 （民主德国，1978）．作正$2n$边形的外接圆．如果它的3个不同顶点在一个闭的半圆周上，则它们组成的3点组称为单侧的，随机取出的一个3点组为单侧的概率是多少？

27.5 （评委会，巴西，1982；澳大利亚，1983）．一只箱子里装有n个白球和m个黑球，箱子旁边有一个抽屉，里面装有足够多的黑球．现在进行如下操作：从箱子里任意取出两个球，如果它们同色，则从抽屉里取出一个黑球放进箱子里，而取出的球不再放回箱子里；如果它们不同色，则把白球放回箱子里，重复这一操作，直到箱子里只剩一只球．最后这只球为白球的概率是多少？

27.6 （澳大利亚，1982）．游戏者A掷硬币$n+1$次，而游戏者B掷n次．游戏者A掷出"鹰"的次数比游戏者B掷出"鹰"的次数多的概率是多少？

27.7 （美国纽约，1976）．把前n个自然数按任意顺序排成一行$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，$n>3$．对每个$k=1, 2, \cdots, n$，均有$i_k\geqslant k-3$的概率是多少？

27.8 （美国，1975）．n张纸牌，其中有3张A．把它们任意地叠在一起，然而从上往下取牌，直到取到第二张A为止．证明，取牌的次数的平均值为$\frac{n+1}{2}$．

27.9 （美国纽约，1981）．把前n个自然数任意排成一行$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，求这种排列中逆序数的平均值．这里，当$j<k$时，如果$i_j>i_k$，则称排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$有一个逆序．

27.10 （评委会，波兰，1989）．设$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$是自然数$1, 2, \cdots, 2n$的一个排列．如果存在$i\in\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$，使得$|x_i-x_{i+1}|=n$，则称排列$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$具有性质$P$．证明，具有性质$P$的排列比不具有性质$P$的排列多．

27.11 （比利时，1981）．两个游戏者A与B观察一个男孩不停地掷硬币，掷的结果用字母记录下来，如果第k次掷出的是"鹰"或"字"，则在第k个位置上相应记上字母O或P．游戏者A说，在记录中接连三个字母OOO出现在OPO之前，游戏者B则争辩说，出现的顺序正相反．在这场争论中哪个人取胜的可能性大？

27.12 （比利时，1977）．三名射手A，B，C在一起进行决斗． 他们分别站在一个等

边三角形的顶点处，并约定，射手A首先射击，然后是B，第三个是C，如此循环进行；如果其中有一名射手被击中，则决斗在余下的两个人间继续进行。已知射手A击中目标的概率为0.3，射手C为0.5，而射手B则是百发百中。每个射手都可以向其他两人中的某个人射击，也可以为了在决斗中以最大的概率获胜而放空枪。射手A在第一次射击时应采取怎样的策略，是(1) 射向射手C；(2) 射向射手B；(3) 放空枪？

27.13* (比利时，1978)。有一质点，沿着立方体$ABCDA'B'C'D'$的棱作运动。除在点B'与C'处外，它在其他顶点处时，都用$\frac{1}{3}$的概率沿着由这个顶点引出的3条棱之一运动，当质点走到点B'或C'处，它就不再运动了。设质点在顶点A处开始运动。质点(1)停留在顶点B'；(2) 停留在顶点C'；(3) 总不到达顶点B'或C'的概率各是多少？

27.14* (比利时，1982)。在巧克力糖果序列中，每块糖果的内包装纸上都有n位卓越数学家中的一张肖像，其中每位的肖像都以$\frac{1}{n}$的概率出现。为搜集到一套完整的肖像，平均要买多少块巧克力糖？

第三部分 解 答

第一章 算 术

§1 整除性、素数与合数

1.1 因为 $c_i=a_i-b_i$，$i=1, 2, \cdots, 7$ 中至少有一个是偶数（否则每个数 c_i 都是奇数，则它们的和也是奇数，但

$$
\begin{aligned}
c_1+c_2+\cdots+c_7 &= (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_7-b_7)\\
&= (a_1+a_2+\cdots+a_7)-(b_1+b_2+\cdots+b_7)=0,
\end{aligned}
$$

矛盾)，所以它们的乘积是偶数。

1.2 记 $b_\varepsilon=a^2+\varepsilon a+1$，其中 $\varepsilon^2=1$。此时由等式

$$(a^2+1)^3=(b_\varepsilon-\varepsilon a)^3\equiv-\varepsilon a^3(\operatorname{mod} b_\varepsilon),$$

$$-\varepsilon a^3=-\varepsilon a b_\varepsilon+a^2+\varepsilon a=b_\varepsilon(-\varepsilon a+1)-1\equiv-1(\operatorname{mod} b_\varepsilon)$$

推得

$$(a^2+1)^3\equiv-1(\operatorname{mod} b_\varepsilon).$$

因此，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(a^2+1)^{3k}\equiv\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k(\operatorname{mod}(a^2\mp a+1)),$$

即问题的答案是肯定的。

1.3 考虑定义在整数集合上的函数

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{当 } m \text{ 为偶数时,}\\ 1, & \text{当 } m \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

并用公式 $b_{n,k}=f(a_{n,k})$ 构造一个数表。于是当 $n>1$ 时有

$$
\begin{aligned}
b_{n,k}=f(a_{n,k}) &= f(a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1})\\
&= f(f(a_{n-1,k-1})+f(a_{n-1,k})+f(a_{n-1,k+1}))\\
&= f(b_{n-1,k-1}+b_{n-1,k}+b_{n-1,k+1});
\end{aligned}
$$

同时将表中不出现的数换为 0。直接计算表明，第 n 行的前四个数 $b_{n,1-n}, b_{n,2-n}, b_{n,3-n}, b_{n,4-n}$ 唯一地确定了第 $n+1$ 行的前四个数，并且第 8 行和第 4 行上的这组数相同。因此，第 9 行和第 5 行、第10行和第 6 行等等，相应的这组数相同。由于从第 3 行起的每一行中，这组数都含有 0，因此原表中这些行含有偶数。

注： 在捷克的原题中假设了第一行含有 3 个奇数，求证的是，从第二行起，每行都含有偶数。

1.4 注意，任意一个整数被 3 除，余数只能是 0，1 或 2。如果在五个整数被 3 除后的五个余数中，0，1，2 都出现，则余数为 0，1，2 的那三个数之和一定能被 3 整除。如果五个余数中 0，1，2 三个数有一个不出现，则五个余数中至少有 3 个相同，这三个数之和一定能被 3 整除。

1.5 注意，$p-1$ 是偶数，且分数 $\frac{m}{n}$ 可以改写为

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\frac{p}{3(p-3)}+\cdots$$

$$+\frac{p}{\frac{(p-1)}{2}\cdot\frac{(p+1)}{2}}=p\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3(p-3)}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right).$$

将所得表达式通分，其公分母为

$$1(p-1)\cdot2(p-2)\cdot3(p-3)\cdots\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}=(p-1)!,$$

即得到，

$$\frac{m}{n}=p\cdot\frac{q}{(p-1)!},\qquad(q\in N).$$

由此推得 $m(p-1)!=pqn$。由于 $1, 2, 3, \cdots, p-1$ 都不能被素数 p 整除，所以 $p\mid m$。证毕。

1.6 设 $n>2$，则由定理 4 得到

$$\begin{aligned}n^n-n^2+n-1&=(n^{n-2}-1)n^2+(n-1)\\&=(n-1)(n^{n-3}+\cdots+1)n^2+(n-1)n^0\\&=(n-1)(n^{n-1}+\cdots+n^2+n^0).\end{aligned}$$

因为 $n\equiv1(\bmod(n-1))$，所以对每个 $k=0, 2, \cdots, n-1$，有 $n^k\equiv1(\bmod(n-1))$，从而

$$n^{n-1}+\cdots+n^2+n^0\equiv0(\bmod(n-1)),$$

(上式左端共有 $n-1$ 个被加项)。因此 $(n-1)(n^{n-1}+\cdots+n^2+n^0)$ 被 $(n-1)^2$ 整除。当 $n=2$ 时，$n^n-n^2+n-1=1$ 也被 $(n-1)^2=1$ 整除。

1.7 当 $n=1$ 时，结论显然成立。设 $n\geqslant2$。记 $a_n=1^{1987}+2^{1987}+\cdots+n^{1987}$，则

$$2a_n=2+(2^{1987}+n^{1987})+(3^{1987}+(n-1)^{1987})+\cdots+(n^{1987}+2^{1987}).$$

由于对每个 $k=2, 3, \cdots$，$k^{1987}+(n+2-k)^{1987}$ 被 $k+(n+2-k)=n+2$ 整除，所以 $2a_n$ 被 $n+2$ 除时，其余数为 2，即 a_n 不被 $n+2$ 整除。

1.8 设 $a, b, c\in N$ 满足

$$c\mid(ab+1),\ b\mid(ac+1),\ a\mid(bc+1).$$

注意，a, b, c 两两互素，否则不妨设 $(a, b)>1$，则 $(ac, b)=d>1$，且数 $ac+1$ 不被 d 整除，自然不被 b 整除。因此它们各不相同。数 $S=ab+ac+bc+1$ 被 a, b, c 都整除，因此也被它们的乘积整除（因为它们两两互素）。所以 $S\geqslant abc$。不妨设 $2\leqslant a<b<c$。如果 $b\geqslant4$，则 $c\geqslant5$，$abc\geqslant2\cdot4\cdot5=40$，且

$$S=ab+ac+bc+1\leqslant\frac{abc}{5}+\frac{abc}{4}+\frac{abc}{2}+1$$

$$=abc-\frac{abc}{20}+1\leqslant abc-\frac{40}{20}+1<abc,$$

矛盾。因此 $b<4$。于是 $a=2$，$b=3$。由于 $ab+1=7$ 被 c 整除，所以 $c=7$。因此仅有三数 2, 3, 7 满足问题的条件。

1.9 不存在。否则在所有被 a_m 整除且各位数字之和小于 m 的自然数中，设 a 为最小。由于 a_m, $2a_m$, $3a_m$, $\cdots$, $9a_m$ 的各位数字之和都不小于 m，所以

$$a\geqslant10a_m=10\cdot\frac{10^m-1}{9}\geqslant10^m,$$

其中 $a_m=\dfrac{10^m-1}{9}$。设 $a=k_r\cdot 10^r+k_{r-1}\cdot 10^{r-1}+\cdots+k_1\cdot 10+k_0$，其中 $k_r, k_{r-1}, \cdots, k_1\ k_0$ 是 a 的各位数字，$0\leqslant k_i\leqslant 9$，$i=0, 1, \cdots, r-1$，且 $1\leqslant k_r\leqslant 9$。于是 $r\geqslant m$。由于 $10^m-1=9a_m$ 被 a_m 整除，所以 $b=a-(10^r-10^{r-m})=a-10^{r-m}(10^m-1)$ 也被 a_m 整除，而且 $0<b<a$。如果 $k_{r-m}<9$，则 b 的各位数字之和等于 a 的各位数字之和；如果 $k_{r-m}=9$，则 b 的各位数字之和小于 a 的各位数字之和。因此 b 的各位数字之和小于 m，且 b 被 a_m 整除，于 a 的选取矛盾。

1.10 这里恒设 $k\in Z^+$。如果 $n=2k$，则

$$19\cdot 8^{2k}+17=18\cdot 8^{2k}+1\cdot(1+63)^k+(18-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3).$$

如果 $n=4k+1$，则

$$\begin{aligned}19\cdot 8^{4k+1}+17&=13\cdot 8^{4k+1}+6\cdot 8\cdot 64^{2k}+17\\&=13\cdot 8^{4k+1}+39\cdot 64^{2k}+9\cdot(1-65)^{2k}+(13+4)\equiv 0(\mathrm{mod}13).\end{aligned}$$

如果 $n=4k+3$，则

$$\begin{aligned}19\cdot 8^{4k+3}+17&=15\cdot 8^{4k+3}+4\cdot 8^3\cdot 64^{2k}+17\\&=15\cdot 8^{4k+3}+4\cdot 510\cdot 64^{2k}+4\cdot 2(1-65)^{2k}+(25-8)\equiv 0,\ (\mathrm{mod}\ 5).\end{aligned}$$

由此可见，对任意 $n\in Z^+$，$19\cdot 8^n+17$ 至少被 3, 13 或 5 之一整除。

1.11 如果 $p=2$，则每个 $2^{(2k)}-(2k)$ 被 p 整除，其中 $k\in Z^+$。设 $p>2$，则由费马定理（定理 25）得到

$$2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}p),\ 2^{m(p-1)}\equiv 1(\mathrm{mod}p),\ m\in N.$$

如果 $m\equiv -1(\mathrm{mod}p)$，则有

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)=2^{m(p-1)}+m-mp\equiv 0(\mathrm{mod}p).$$

由此可见，如果 $p>2$，则每个 2^n-n 都被 p 整除，其中 $n=(kp-1)(p-1)$，$k\in N$。

1.12 设 $n=4k^4$，其中 $k=2, 3, \cdots$。则对任意 $m\in N$，

$$\begin{aligned}m^4+n=m^4+4k^4&=(m^4+4m^2k^2+4k^4)-4m^2k^2\\&=(m^2+2k^2)^2-(2mk)^2=(m^2+2mk+2k^2)(m^2-2mk+2k^2)\\&=((m+k)^2+k^2)((m-k)^2+k^2).\end{aligned}$$

是合数，因为每个因子 $(m\pm k)^2+k^2$ 都大于 1（由于 $k>1$）。

1.13 设 n 具有题目要求的性质。如果它不被 2 整除，则 $n\leqslant 2^2$（否则，与 n 互素且小于 n 的 $m=4$ 将是素数，不可能）。因此 $n=3$，如果 n 被 2 整除，但不被 3 整除，则同理有 $n\leqslant 3^2$，即 $n\in\{4, 8\}$。如果 n 被 2 与 3 整除，但不被 5 整除，则 $n\leqslant 5^2$，且 $6|n$，即 $n\in\{6, 12, 18, 24\}$。如果 n 被 2, 3 和 5 整除，但不被 7 整除，则 $n\leqslant 7^2$，且 $30|n$，即 $n=30$。设对某个 $k\geqslant 4$，n 被 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 整除，但不被 p_{k+1} 整除，其中 $2=p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}$ 是连续素数，则 $n\leqslant p_{k+1}^2$，且 $p_1p_2\cdots p_k|n$。
由于

$$p_1p_2\cdots p_k\leqslant n\leqslant 10000000,$$

所以 $k\leqslant 8$。最后，当 $k=4, 5, 6, 7, 8$ 时，$p_1p_2\cdots p_k>p_{k+1}^2$，与 $p_1p_2\cdots p_k\leqslant n\leqslant p_{k+1}^2$ 矛盾。因此 $k\leqslant 3$。于是 n 的所有可能值都属于集合 $\{3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$。经验证，此集合中每个数都具有题中所要求的性质。

1.14 我们证明，所求的集合 M 由所有与数 a 互素的数 $m\in N$ 组成。如果某个数 $m\in N$ 与数 a 有公因数 $d>1$，则 $m\notin M$。事实上，对任意 $n\in N$，有

$$(a_n, a)=\left(\sum_{k=0}^{n}a^k, a\right)=\left(1+a\sum_{k=0}^{n-1}a^k, a\right)=(1, a)=1,$$

因此 a_n 不被 d 整除，从而不被 m 整除。现在设 $m>1$，且 $(m, a)=1$。由定理 1，在 $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$ 中可以找出两个数 a_i 与 a_j，$i>j$，它们模 m 同余。这两个数之差

$$a_i-a_j=\sum_{k=0}^{i}a^k-\sum_{k=0}^{j}a^k=\sum_{k=j+1}^{i}a^k=a^{j+1}\sum_{k=0}^{i-j-1}a^k$$

被 m 整除。但 a^{j+1} 与 m 互素，因此

$$a_{i-j-1}=\sum_{k=0}^{i-j-1} a^k$$

被 m 整除(因为 $m\neq 1$，所以不可能有 $i-j-1=0$)。因此 $m\in M$。最后注意 $1\in M$。

1.15 回答是肯定的。设已给定 n 个连续整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则由 $m<n\leqslant a_n-(a_1-1)$ 可知，在这 n 个数中必有 n 的倍数 a_i 和 m 的倍数 a_j。如果 $i\neq j$，则乘积 a_ia_j 被 mn 整除。现在考虑 $i=j$ 的情形。记 $d=(m, n)$，$q=[m, n]$，则

$$mn=dq,\ d\,|\,a_i,\ q\,|\,a_i.$$

我们证明，d 的倍数 a_i+d 或 a_i-d 至少有一个属于集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。倘若不然，则 $a_i+d>a_n$，$a_i-d<a_1$，由此得 $i+d\geqslant n+1$，$i-d<1$，从而 $2d>n$。但 $d\,|\,n$，因此 $d=n>m$，与 $d\,|\,m$ 矛盾。于是 a_i 与 a_i+d(或相应地 a_i-d)即为所求，因为乘积 $a_i(a_i\pm d)$ 被 $dq=mn$ 整除。

1.16 首先证明，如果 $n=2^m$，$m\in Z^+$，则 $f(n)=2n-1$。事实上，一方面，

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k=\frac{(2n-1)2n}{2}=(2^{m+1}-1)\cdot 2^m$$

被 $2^m=n$ 整除。另一方面，如果 $l\leqslant 2n-2$，则

$$\sum_{k=1}^{l} k=\frac{l(l+1)}{2}$$

不被 2^m 整除，因为 l，$l+1$ 中有一个是奇数，而另一个不超过 $2n-1=2^{m+1}-1$，因而不被 2^{m+1} 整除。现在设 n 不是 2 的方幂，则 $n=2^mp$，其中 $m\in Z^+$，而 $p>1$ 为奇数。下面证明，存在自然数 $l<2n-1$，使得 $2^{m+1}\,|\,l$，且 $p\,|\,(l+1)$。于是

$$\sum_{k=1}^{l} k=\frac{l(l+1)}{2}$$

被 $2^mp=n$ 整除，因此 $f(n)<2n-1$。因为 2^{m+1} 与 p 互素，所以由中国剩余定理(定理 23)，存在 l，使得

$$l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{m+1}),\ l\equiv p-1(\mathrm{mod} p),\ 0<l\leqslant 2^{m+1}p=2n.$$

实际上 l 还满足更强的条件，即 $l<2n-1$，因为若 $l=2n-1=2^{m+1}p-1$，则 l 不被 2^{m+1} 整除，而若 $l=2n=2^{m+1}p$，则 $l+1$ 不被 $p(>1)$ 整除。因此 $l<2n-1$。这正是所要证明的。

1.17 设 $n=3^kr$，其中 $k\in Z^+$，且 $r\in N$ 不被 3 整除。我们证明，$p=1+2^n+4^n$ 被 $q=1+2^{3^k}+4^{3^k}$ 整除。分两种可能的情形讨论。

情形 1：$r=3s+1$，$s\in Z^+$。应用定理 11，有

$$\begin{aligned}p-q&=(2^n-2^{3^k})+(4^n-4^{3^k})=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)\\&\quad+4^{3^k}(2^{3^k\cdot 6s}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}(2^{3^k\cdot 3}-1)).\end{aligned}$$

因为

$$2^{3^k\cdot 3}-1=(2^{3^k}-1)(1+2^{3^k}+4^{3^k})=(2^{3^k}-1)q,$$

所以 $p-q$ 被 q 整除，因此 $q\,|\,p$。

情形 2：$r=3s+2$，$s\in Z^+$。应用定理 11，有

$$\begin{aligned}p-q&=(4^n-2^{3^k})+(2^n-4^{3^k})\\&=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 3(2s+1)}-1)+2^{2\cdot 3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}(2^{3^k\cdot 3}-1))\end{aligned}$$

与情形 1 一样，由此可得 $q\,|\,p$。

1.18 设 $m=11^ip$，$n=11^jq$，其中 $i, j\in Z^+$，且 $p, q\in N$ 不被 11 整除。我们证明 $p=q$ (由此即得 $m=11^{i-j}n$)。否则设 $p>q$ ($p<q$ 的情形可仿此讨论)。因为 p 与 11 互素，所以由中国剩余定理 (定理 23)，存在 $a>0$，使得

$$a\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),\ a\equiv -1(\mathrm{mod}\ 11^j).$$

于是，$a=11k-1$，其中 $k\in N$，$(11k-1, m)=(a, 11^ip)=p$，$(11k-1, n)=(a, 11^jq)\leqslant q<p$，与条件

$(11k-1, m)=(11k-1, n)$矛盾。证毕。

1.19 我们证明结论是对的。设 $ad-bc$ 的每个素因数都是 a 与 c 的因数，但结论不真，则存在 $n\in Z$，使 $an+b$ 与 $cn+d$ 都被某个素数 p 整除。于是由于 $ad-bc=a(cn+d)-c(an+b)$，所以 a 与 c 也被 p 整除。因此 $b=(an+b)-an$ 与 $d=(cn+d)-cn$ 也被 p 整除，从而$(a, b, c, d)\geqslant p>1$，与题中的条件矛盾。现在设对某个 $n\in Z$，有$(an+b, cn+d)=1$，然而与结论相反，有某个素数 p，使得

$$ad-bc\equiv 0(\bmod p),\ a\not\equiv 0(\bmod p).$$

$(c\neq 0$ 的情形仿此讨论)。则由中国剩余定理(定理23)，存在 $n\in Z$，使得

$$an\equiv -b(\bmod p),$$

由此得到

$$an+b\equiv 0(\bmod p),$$
$$a(cn+d)=c(an+b)+(ad-bc)\equiv 0(\bmod p).$$

因为 $(a, p)=1$，所以 $cn+d\equiv 0(\bmod p)$，且 $(an+b, cn+d)\geqslant p>1$，
矛盾。结论证毕。

1.20 注意，当 $m=0, 1, 2, 3, 4$ 时，$a_m=2^{2^m}+1$ 是素数，而

$$2^{32}+1=(2^{32}-1)+2=(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)+2$$
$$=a_0a_1a_2a_3a_4+2\equiv 2(\bmod a_m)$$

与每个奇数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 都互素，且被素数 $a_5=641$ 整除，但不被它的平方整除，即

$$a_6=\frac{2^{32}+1}{641}$$

不被 a_5 整除。于是所有的数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 两两互素，由中国剩余定理（定理23），存在整数 $k>\max\{a_0, a_1, \cdots, a_6\}$，使得当 $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时，$k\equiv 1(\bmod a_m)$，且 $k\equiv -1(\bmod a_6)$。下面证明，任意形如 $k\cdot 2^n+1$ 的数都是合数，其中 $n\in N$。令 $n=2^mp$，其中 $m\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$，p 为奇数。则有

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2^n+1(\bmod a_m),$$
$$2^n+1=2^{2^m\cdot p}+1=(a_m-1)^p+1\equiv(-1)^p+1(\bmod a_m),$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 0(\bmod a_m).$$

令 $n=2^5p$，其中 p 为奇数，则

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2^n+1(\bmod a_5),$$
$$2^n+1=(2^{32})^p+1\equiv(-1)^p+1(\bmod a_5),$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 0\quad(\bmod a_5).$$

最后令 $n=2^6p$，其中 $p\in N$，则

$$k\cdot 2^n+1\equiv -2^n+1(\bmod a_6),$$
$$2^n-1=2^{64p}-1\equiv(-1)^{2p}-1(\bmod a_6),$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 0(\bmod a_6).$$

因为 $k\cdot 2^n+1(>k)$大于素数 $a_0, a_1, \cdots, a_6$，且至少被其中之一整除，因此它是合数。

1.21 给定自然数 $a\geqslant 3$。对 $k\in N$ 用归纳法证明，由关系式

$$n_1=1,\ n_{k+1}=a^{n_k}-1,\ k\in N$$

所给出的数列$\{n_k\}$满足条件：$n_k|a^{n_k}-1$。当 $k=1$ 时，有 $1|a-1$。设对某个 $k\in N$，已证得 $n_k|a^{n_k}-1$，即 $a^{n_k}-1=n_kq$，其中 $q\in N$。则由定理11，$a^{n_{k+1}}-1=a^{n_kq}-1$ 被 $n_{k+1}=a^{n_k}-1$ 整除。由于数列 $\{n_k\}$ 单调递增，因此所有的 $n=n_k$ 是不同的。至此问题的结论证毕。

现在证明，当 $a=2$ 时结论不真，而且对每个 $n>1$，2^n-1 都不被 n 整除。否则设有某个 $n>1$，使 $n|2^n-1$。则因 2^n-1 为奇数，故 n 为奇数，且 n 的最小的素因数 p 也是奇数。因此由费马小定理，$p|2^{p-1}-1$。使 $p|2^d-1$ 的最小整数记作 d。我们证明，对任意 $m\in N$，由条件 $p|2^m-1$ 可推出条件 $d|m$。事实上，设$m=dq+r$，其中 $q, r\in Z^+$，$r<d$，则由定理11，

$$(2^m-1)-(2^r-1)=2^r(2^{sq}-1)\equiv 0(\bmod(2^d-1))$$

被 p 整除。因此若 $p|2^m-1$，则 $p|2^r-1$。由于数 d 的选取及 $d>r$，故 $r=0$。于是，由 $p|2^n-1$ 与 $p|2^{p-1}-1$ 可知，$d|n$ 与 $d|p-1$。但是，由于 n 不含小于 p 且不等于 1 的因数，所以 $(n,\ p-1)=1$。因此 $d=1$。由此得到，$2^1-1=1$ 被 p 整除，而 $p>1$，故矛盾。因此 n 不能整除 2^n-1。

1.22 设结论不真，即只有有限个 $n\in N$，使得当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 时 $a_n>a_k$，此处

$$a_n=\frac{\sigma(n)}{n}.$$

设N是这些 n 的最大者。则数列 $A_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$ 以 A_N 为上界（因为 $A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_N$），并且对每个 $n>N$，有 $A_n=\max\{A_{n-1},\ a_n\}=A_{n-1}$(因为存在 $k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$，使得 $a_k\geqslant a_n$)，即 $A_N=A_{N+1}=A_{N+2}=\cdots$。所以数列 $\{a_n\}$也以 A_N 为上界。因为当 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ 时 $a_i<a_N$，因此 $A_N=a_N$。另一方面，$2N$ 的因数是形如 $2d$ 的数和 1，其中 $d|N$，因此 $\sigma(2N)\geqslant 2\sigma(N)+1$。从而

$$a_{2N}\geqslant\frac{2\sigma(N)+1}{2N}=a_N+\frac{1}{2N}>a_N=A_N.$$

矛盾。结论证毕。

1.23 我们证明，对每个 $n=r\cdot k!-1$，其中 $r\in N$，$r\geqslant 3$，均有 $Q(n)>Q(n+1)$。记 $m=[n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n+k]$。当 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 时，有 $n\equiv -1(\bmod j)$，因此$(n,\ j)=1$，且$(n,\ n+j)=1$。从而 $(n,\ m)=1$，且 $Q(n)=[n,\ n+1,\ \cdots,\ n+k]=[n,\ m]=nm$。另一方面，$n+k+1=r\cdot k!+k$ 被 k 整除。m 被 $n+1=r\cdot k!$ 整除，从而被 k 整除。因此 $\dfrac{m(n+k+1)}{k}$ 不但被 m 整除，而且也被 $n+k+1$ 整除。于是

$$\begin{aligned}Q(n+1)&=[n+1,\ \cdots,\ n+k,\ n+k+1]\\&=[m,n+k+1]<\frac{m(n+k+1)}{k}.\end{aligned}$$

因为 $k\geqslant 2$，$r\geqslant 3$，所以

$$\begin{aligned}Q(n+1)&\leqslant\frac{m(n+k+1)}{2}=\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\\&\leqslant\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{3k-1}\right)<\frac{mn}{2}\cdot 2=mn=Q(n).\end{aligned}$$

这正是所要证的。

1.24 用 $m(k)$表示 $k\in N$ 的素因子分解式中 2 的指数，则 $k=2^{m(k)}g(k)$，且

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{m(k)}}.$$

注意，在 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 中恰有 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 个偶数，$\left[\dfrac{n}{2^2}\right]$ 个 4 的倍数，$\left[\dfrac{n}{2^3}\right]$ 个 8 的倍数，一般地说，有 $\left[\dfrac{n}{2^m}\right]$个被 2^m 整除的数(其中 m 跑遍 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，并且从某个适合 $2^M>n$ 的数M起都有 $\left[\dfrac{n}{2^M}\right]=\left[\dfrac{n}{2^{M+1}}\right]=\cdots=0$)。因此使 $m(k)$取值为 m 的数 $k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的个数恰为

$$\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right].$$

于是，由于 $\left[\dfrac{n}{2^{M+1}}\right]=0$，故

$$\begin{aligned}S&=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{2^m}\left(\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]\right)\\&=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{n}{2^m}\right]\\&=\left[\frac{n}{2^0}\right]+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)\left[\frac{n}{2^m}\right]\\&=n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right].\end{aligned}$$

因为对任意 $x\in R$, $[x]\leqslant x$, 所以

$$S\geqslant n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{n}{2^m}=n-n\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{4^m}$$

$$=n-\frac{n}{3}\left(1-\frac{1}{4^M}\right)=\frac{2}{3}n+\frac{n}{3\cdot4^M}>\frac{2}{3}n,$$

即得左端不等式。为证明右端不等式，我们注意，对任意 $p, q\in N$, 有

$$\left[\frac{p}{q}\right]\geqslant\frac{p+1}{q}-1.$$

事实上，设 $\left[\frac{p}{q}\right]=r$，则 $p=rq+s$，其中 $s\in\{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$。因此

$$\left[\frac{p}{q}\right]=r=\left[\frac{p-s}{q}\right]\geqslant\frac{p-(q-1)}{q}=\frac{p+1}{q}-1.$$

利用这个不等式，即得

$$S=n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]\leqslant n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left(\frac{n+1}{2^m}-1\right)$$

$$=n-(n+1)\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{4^m}+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}$$

$$=n-\frac{n+1}{3}\left(1-\frac{1}{4^M}\right)+\left(1-\frac{1}{2^M}\right)$$

$$=\frac{2}{3}n+\frac{2}{3}+\frac{n+1}{3\cdot4^M}-\frac{1}{2^M}.$$

因为
$$2^M>n>\frac{n+1}{3},$$

所以
$$\frac{n+1}{3\cdot4^M}<\frac{1}{2^M}.$$

于是 $S<\frac{2}{3}n+\frac{2}{3}$，即得右端不等式。结论证毕。

1.25 取定奇素数 p. 我们证明，递增的偶数列 $a_m=p^{2^m}+1\,(m\in Z^+)$ 中任意两个数都没有大于 2 的公因数。事实上，如果 $m>l\geqslant0$, 则

$$p^{2^m}-1=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-1}}-1)=\cdots=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-2}}+1)\cdots(p^{2^l}+1)(p^{2^l}-1)$$

被 $p^{2^l}+1$ 整除。因此

$$(a_m, a_l)=(2+(p^{2^m}-1),\ p^{2^l}+1)=(2,\ p^{2^l}+1)=2.$$

现在考虑数列 $\{a_m\}$ 中至少被一个大于 p 的素数整除的项之集合。由上面已证的关于数列 $\{a_m\}$ 的性质可知，数列 $\{a_m\}$ 只有有限个不含大于 p 的素因数的项，因此此集合是非空的。设此集合的最小数为 a_m, 则

$$h(a_m)>p,\ h(a_m-1)=h(p^{2^m})=p,$$

$$h(a_m-2)=h(p^{2^m}-1)=\max\{h(p^{2^{m-1}}),h(p^{2^{m-1}}-1)\}=\cdots$$

$$=\max\{h(p^{2^{m-1}}+1),\ h(p^{2^{m-2}}+1),\ \cdots,\ h(p+1),\ h(p-1)\}$$

$$=\max\{h(a_{m-1}),\ h(a_{m-2}),\ \cdots,\ h(a_0),\ h(p-1)\}<p,$$

这是因为 $h(p-1)<p$, 并且由 m 的取法可知，对 $l=0, 1, \cdots, m-2, m-1$, 均有 $h(a_l)\leqslant p$, 再由 $a_l\equiv1 \pmod p$ 可知，$h(a_l)<p$。于是对给定的奇素数 p，所有形如 $n=p^{2^m}-1$ 的数都满足 $h(n)<h(n+1)<h(n+2)$。对不同的 p，相应的 n 也不同，因此如此的 n 有无限个。

1.26 首先证明，有无限多个形如 $n=2^k$ 的数，使得 $\omega(n)<\omega(n+1)$，其中 $k\in N$。设某个 $n=2^k$ 适合 $\omega(n)\geqslant\omega(n+1)$，则

$$1=\omega(2^k)\geqslant\omega(2^k+1)\geqslant1.$$

因此 $\omega(2^k+1)=1$，从而 $2^k+1=p^m$，其中 $m\in N$，p 为素数。如果 $m=2l$，则

$$2^k=p^{2l}-1=(p^l-1)(p^l+1),$$

即 p^l+1 与 p^l-1 都是 2 的方幂。由此得到，$p^l+1=4$, $p^l-1=2$, 即 $p=3$, $l=1$, 且 $k=3$。如果 m 为奇数，且 $m>1$，则由

$$2^k=p^m-1=(p-1)(p^{m-1}+\cdots+p+1),$$

可知，大于1的奇数 $p^{m-1}+\cdots+p+1$ 为2的方幂，矛盾。因此 $m=1$. 即有 $2^k+1=p$. 如果 $k=2^q r$，其中 $r>1$ 为奇数，则由定理11，

$$p=2^k+1=2^{2^q\cdot r}+1\equiv 0(\bmod(2^{2^q}+1)),$$

即素数 p 被小于 p 的数 $2^{2^q}+1$ 整除，不可能。于是 $k=2^q$, $q\in Z^+$。至此我们已经证明，存在无限个 $k\in N$, k 不等于3或2的方幂，均有 $\omega(2^k)<\omega(2^k+1)$。现在设适合 $\omega(2^k)<\omega(2^k+1)$ 的 k 中只有有限个也适合 $\omega(2^k+1)<\omega(2^k+2)$。则可以找到这样的(足够大的)数 $k_0=2^{q_0}>5$，使得对每个 $k=k_0+1$, k_0+2, $\cdots$, $2k_0-1<2^{q_0+1}$，均有

$$\omega(2^k+1)\geqslant\omega(2^k+2)=\omega(2(2^{k-1}+1))=1+\omega(2^{k-1}+1).$$

由此得到

$$\omega(2^{2q_0-1}+1)\geqslant 1+\omega(2^{q_0-2}+1)\geqslant\cdots\geqslant(k_0-1)+\omega(2^{k_0}+1)\geqslant k_0.$$

因此，如果用 $p_1<p_2<\cdots$ 表示连续素数，则

$$2^{2k_0-1}+1\geqslant p_1p_2\cdots p_{k_0}=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)(p_6\cdots p_{k_0})$$
$$>4^5\cdot4^{k_0-5}=2^{2k_0}>2^{2k_0-1}+1,$$

矛盾。结论证毕。

§2 方程的整数解和有理数解

2.1 将方程改写为 $2^x=(y-1)(y+1)$。

则对 $x,y\in N$, $y-1$, $y+1\in Z^+$ 都是 2^x 的因数，即 $y-1=2^p$, $y+1=2^q$，其中 $p,q\in Z^+$, $p<q$。因此

$$2^q-2^p=(y+1)-(y-1)=2,$$

即 $2^p(2^{q-p}-1)=2$. 注意，$q-p\leqslant 1$，否则奇数 $2^{q-p}-1>1$ 将是2的因数，不可能。所以 $q=p+1$，且 $2^p(2-1)=2$，即 $p=1$, $q=2$，从而 $y=3$. 经验证，$y=3$, $x=3$ 为方程的解。

2.2 因为 $a,b,c,d\in Z$，所以方程

$$(x+ay+c)(x+by+d)=2$$

等价于方程组

$$\begin{cases}x+ay+c=p,\\x+by+d=q,\end{cases}$$

其中 $p,q\in Z$，且 $pq=2$. 对给定的 $p,q\in Z$，上述方程组至多有一个整数解，因为方程组的解是唯一的(注意条件 $a\neq b$)：

$$y=\frac{p-q+d-c}{a-b},\quad x=p-c-ay.$$

注意，适合 $pq=2$ 的不同整数对 (p,q) 共有四对：$(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$，而且不同的整数对 p,q 确定不同的解 x,y. 因此方程至多有四个解，而且当且仅当 $\frac{p-q+d-c}{a-b}$ 为整数，也即

$$\frac{\pm1+d-c}{a-b}\in Z$$

时恰有四个整数解。此时

$$\frac{1+d-c}{a-b}-\frac{-1+d-c}{a-b}=\frac{2}{a-b}$$

为整数，即 $(a-b)|2$. 如果 $a-b=\pm1$，则 $\frac{\pm1+d-c}{a-b}\in Z$. 如果 $a-b=\pm2$，则 $\frac{\pm1+d-c}{a-b}$ 为整数的必要且充分条件是，$d-c$ 为奇数。因此当 $|a-b|=1$，或 $|a-b|=2$ 且 $c-d=2k+1$，其中 $k\in Z$ 时，原方程恰有四个解。

2.3 设 $x,y\in Z$ 满足方程，则

$$y^2=(x(x+8))((x+1)(x+7))=(x^2+8x)(x^2+8x+7)=z^2+7z,$$

其中 $z=x^2+8x$。如果 $z>9$，则

$$(z+3)^2=z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16=(z+4)^2,$$

即 y^2 位于两个相邻自然数的平方之间，不可能。因此 $x^2+8x=z\leqslant 9$。由此得到，$-9\leqslant x\leqslant 1$。将 $x=-9$, -8, …, 1 依次代入方程可知，当 $x=-9, -8, -7, -4, -1, 0, 1$ 时，$x(x+1)(x+7)(x+8)$ 才是整数的平方。因此原方程的解为：$(-9, 12)$, $(-9, -12)$, $(-8, 0)$, $(-7, 0)$, $(-4, 12)$, $(-4, -12)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 12)$, $(1, -12)$。

2.4 设 $x, y\in Z$ 满足方程。当 $x>0$ 时，

$$(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+4x^3+4=(x^3+2)^2.$$

由此得到，$x^3+1<y^2<x^3+2$，故 y^2 不能是整数，不可能。当 $x\leqslant -2$ 时同样导出矛盾。事实上，在此情形下，$x^3+3<0$。从而

$$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+2x^3+1=(x^3+1)^2.$$

由此得到，

$$-(x^3+2)=|x^3+2|<y^2<|x^3+1|=-(x^3+1),$$

与 y 为整数相矛盾。当 $x=-1$ 时，方程化为 $-1=y^4$，不可能。最后，当 $x=0$ 时，$1=y^4$。由此得到方程的解：$x=0$, $y=\pm 1$。

2.5 设 $x, y\in Z$ 满足方程，则

$$x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy,$$

即

$$(x+y)^2=xy(xy+1).$$

如果 $xy>0$，则

$$xy+1>\sqrt{xy(xy+1)}>xy.$$

因此整数 $|x+y|=\sqrt{xy(xy+1)}$ 位于两个相邻整数 xy 与 $xy+1$ 之间，不可能。同理，如果 $xy<-1$，则

$$-xy-1<\sqrt{xy(xy+1)}<-xy.$$

因此 $|x+y|$ 仍不能是整数，矛盾。于是 $xy=0$，或 $xy=-1$。在这两种情形下，方程等价于 $x+y=0$。因此有 $x=y=0$，或者 $x=-y=\pm 1$。由此得到方程的整数解：$(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$。

2.6 设 $x, y\in Z$ 满足方程。如果 $x\geqslant 0$，则

$$y^3=8x^3+24x^2+32x+16=8(x^3+3x^2+4x+2).$$

因此 $y=2z$, $z\in Z$，且 $z^3=x^3+3x^2+4x+2$。因为

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1<z^3<x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3,$$

所以 $x+1<z<x+2$，不可能。如果 $x\leqslant -2$，则 $x_1=-x-2\geqslant 0$, $y_1=-y$ 也满足原方程，这是因为

$$(x_1+2)^4-x_1^4=x^4-(x+2)^4=-y^3=y_1^3.$$

但如上所证，不可能有 $x_1\geqslant 0$。于是 $-2<x<0$。由此即得唯一的解：

$$x=-1,\ y=0.$$

2.7 注意，如果 n 为偶数，则 $n=2k$，且

$$n^4=16k^4\equiv 0(\mathrm{mod}\ 16);$$

如果 n 为奇数，则 $n-1$, $n+1$, n^2+1 都是偶数，且 $n-1$ 或 $n+1$ 被 4 整除，因此 $n^4-1=(n-1)(n-1)\cdot(n^2+1)$ 被 16 整除，即 $n^4\equiv 1(\mathrm{mod}\ 16)$。所以方程左端 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4$ 除以 16 的余数等于 x_1, x_2, …, x_{14} 中奇数的个数，即不超过 14。另一方面，$1599=1600-1\equiv 15(\mathrm{mod}\ 16)$。这表明，不论未知量取什么整数值，要使方程的左端与右端相等是不可能的，即原方程无整数解。

2.8 原方程的两个根为

$$x=-5a\pm\sqrt{25a^2-5b\pm 3}.$$

如果 x 为整数，则 $\sqrt{25a^2-5b\pm 3}$ 为整数，因此，$25a^2-5b\pm 3$ 是完全平方数。由于 $25a^2-5b=5(5a^2-b)$ 的末位数为 0 或 5，所以 $25a^2-5b\pm 3$ 的末位数只能是 2, 3, 7 或 8。但是，如果一个整数是完全平方数，

则它的末位数只能是 0, 1, 4, 5, 6 或 9。矛盾。因此原方程的解 x 不是整数。

2.9 设原方程的解

$$\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

中至少有一个是有理数，则 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是有理数，即 b^2-4ac 是某个 $d\in Z$ 的平方(见定理 61)。因为 a, b, c 是奇数，所以 d 也是奇数。此外，由于 $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$，因此，

$$ac\equiv 1 \pmod 2),\ -4ac\equiv 4 \pmod 8),\ b^2\equiv 1 \pmod 8),\ d^2\equiv 1 \pmod 8).$$

从而有 $b^2-4ac\equiv 5 \pmod 8$。这表明，等式 $d^2=b^2-4ac$ 不能成立。于是原方程没有整数解。

2.10 设 $x, y\in Q$ 满足方程，则有

$$2\sqrt{3}-3=x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3xy},$$

即
$$(x+y-2)\sqrt{3}=2\sqrt{3xy}-3.$$

于是
$$3(x+y-2)^2=9+12xy-12\sqrt{3xy}.$$

因此 $\sqrt{3xy}$ 为有理数。从而 $x+y-2=0$, $2\sqrt{3xy}-3=0$。

(否则，$\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3xy}-3}{x+y-2}$ 为有理数，不可能)。所以 x, y 满足 $x+y=2$, $xy=\dfrac{3}{4}$，也即是方程

$$t^2-2t+\frac{3}{4}=0$$

的根。由于 $x>y$，所以原方程只有一个解

$$x=\frac{3}{2},\quad y=\frac{1}{2}.$$

经检验，它确实是方程的解。

2.11 注意，原方程有解，例如 $x=y=z=3\times1983$ 即是一个解。现在证明，仅有有限多组数 x, y, $z\in N$ 满足原方程，其中 $x\leqslant y\leqslant z$。事实上，设 x, y, $z\in N$ 是原方程的解，$x\leqslant y\leqslant z$，则

$$0<\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x},$$
$$\frac{1}{x}<\frac{1}{1983}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x}.$$

由此得到，$1983<x\leqslant 3\cdot1983$。因此 x 可取的值至多有 $2\cdot1983$ 个。对 x 的每个值，有

$$\frac{1}{1983}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{2}{y},$$

即
$$y\leqslant 2\cdot\frac{1983x}{x-1983}\leqslant 2^2\times1983^2.$$

因此 y 可取的值至多有 $2^2\times1983^2$ 个。最后，如果 x 与 y 的值都已给定，则 z 由方程唯一确定。于是适合 $x\leqslant y\leqslant z$ 的解至多有 $2^3\times1983^3$ 个。从而原方程有理解的总数不超过 $6\times2^3\times1983^3$ 个。

2.12 设 $a, b\in Z$，且 $5a\geqslant 7b\geqslant 0$。令 $u=\left[\dfrac{b}{5}\right]$，则 $v=b-5u$ 只能在集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 中取值。由 $7b=7(5u+v)=35u+7v$ 得到，$a-7u\geqslant\dfrac{7b}{5}-7u=\dfrac{7v}{5}$。当 $v=0$ 时，令 $y=z=0$, $x=a-7u$，则 $x\geqslant\dfrac{7v}{5}=0$。当 $v=1$ 时，令 $y=1$, $z=0$, $x=a-7u-2$，则 $x\geqslant\dfrac{7}{5}-2>-1$，即 $x\geqslant0$ (因为 $x\in Z$)。当 $v=2$ 时，令 $y=0$, $z=1$, $x=a-7u-3$，则 $x\geqslant\dfrac{14}{5}-3>-1$，即 $x\geqslant0$。当 $v=3$ 时，令 $y=z=1$, $x=a-7u-5$，则 $x\geqslant\dfrac{21}{5}-5>-1$，即 $x\geqslant0$。最后当 $v=4$ 时，令 $y=0$, $z=2$, $x=a-7u-6$，则 $x\geqslant\dfrac{28}{5}-6>-1$，即 $x\geqslant0$。由此可见，在各情形下，x, y, z, $u\in Z^+$ 满足 $x=a-7u-3z-2y$, $5u=b-v=b-2z-y$，因而也满足原方程组。

2.13 由第一个方程得到，$z=-(x+y)$。将它代入第二个方程，得到

$$x^3+y^3-(x+y)^3=-18,$$

化简得到，$xy(x+y)=6$。即 $xyz=-6$。这说明，原方程组的整数解 x, y, z 应是 6 的因数 ±1, ±2, ±3,

且其中有且只有一个是负的，并且这个负数应是绝对值最大的。据此逐一检验，便可求得所有的解为

$$\begin{cases}x=-3\\y=1\\z=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=2\\z=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=-3\\z=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=1\\z=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-3.\end{cases}$$

2.14 设 $p, q\in\{1, 2, \cdots, 100\}$，且 $x\in Q$ 满足方程 $x^5+px+q=0$。由于方程左端的多项式的所有系数都是整数，且首项系数为 1，所以由定理 60，此多项式的任意一个有理根(包括 x)都是整数。现在证明，$-3<x<0$。事实上，如果 $x\geqslant0$，则 $x^5+px+q\geqslant q\geqslant1>0$。如果 $x\leqslant-3$，则 $x^5+px+q\leqslant-3^5-3p+q\leqslant-3^5-3+100<0$。因此只能有 $x=-1$，或 $x=-2$。将 $x=-1$ 代入方程，得到 $q=p+1$。它恰被 99 对 p, q 所满足。同样，当 $x=-2$ 时有 $q=2p+32$。它被 34 对 p, q 所满足。由于条件 $q=p+1$ 与 $q=2p+32$ 不能同时满足(注意 $p>0$)，所以所得的所有数对各不相同，因此其总数为 $99+34=133$。

2.15 显然 $x=y=z=0$ 是方程的解。如果方程还有其他的解，则从中选取 x, y, z，使得 $\alpha=|x|+|y|+|z|$ 取到最小值。注意，对任意 $n\in Z$，要么 $n=2k$，$k\in Z$，此时 $n^2=4k^2\equiv0(\bmod 4)$，要么 $n=2k+1$，此时 $n^2=4k^2+4k+1\equiv1(\bmod 4)$。因此，使 x^2+y^2 模 4 的余数(为 0，1 或 2)与 $3z^2$ 模 4 的余数(为 0 或 3)相同的情形只能是，x, y, z 都是偶数，即 $x_1=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$，其中 $x_1, y_1, z_1\in Z$。因为 $x^2+y^2=3z^2$，所以 $x_1^2+y_1^2=3z_1^2$，且 $\alpha_1=|x_1|+|y_1|+|z_1|$ 满足 $0<\alpha_1=\frac{\alpha}{2}<\alpha$。与 x, y, z 的选取矛盾。因此原方程有唯一整数解 $x=y=z=0$。

2.16 注意，如果 x, y, z 是原方程的解，则对任意 $t\in Q$，tx，ty，tz 也是解。因此如果某个非零的有理数组 $x=\frac{m}{n}, y=\frac{l}{k}$，$z=\frac{p}{q}$ 满足方程，其中 $m, l, p\in Z$ 不全为零，$n, k, q\in N$，则非零的整数组 $x_1=tx$，$y_1=ty$，$z_1=tz$ 也满足方程，其中 $t_1=nkq$。设 d 是 x_1, y_1, z_1 的最大公因数，则 $x_2=t_2x_1$，$y_2=t_2y_1$，$z_2=t_2z_1$ 也满足方程，其中 $t_2=\frac{1}{d}$，并且它们的最大公因数为 1。由方程可知，$x_2^3=3(-y_2^3-3z_2^3+3x_2y_2z_2)$ 被 3 整除。因此 $x_2=3x_3$，$x_3\in Z$。其次，$y_2^3+3z_2^3+9x_3^3-9y_2z_2x_3=0$，即 $x=y_2$，$y=z_2$，$z=x_3$ 也满足方程。因此 $y_2=3y_3$，$y_3\in Z$，且 $x=z_2$，$y=x_3$，$z=y_3$ 仍满足方程。因而 $z_2=3z_3$，$z_3\in Z$。于是，x_2, y_2, z_2 都被 3 整除，与这些数的选取相矛盾。这就证明，原方程有唯一解。

2.17 $x_0=y_0=z_0=0$ 是方程的解。设方程另有解(x, y, z)，则方程的右端 x^2y^2 被 4 整除，否则 x 与 y 都是奇数，因此

$$x^2\equiv1(\bmod 4),\ y^2\equiv1(\bmod 4),\ x^2y^2\equiv1(\bmod 4),$$

又当 z 为偶数时，$x^2+y^2+z^2\equiv2(\bmod 4)$，而当 z 为奇数时，$x^2+y^2+z^2\equiv3(\bmod 4)$，即 x, y, z 不满足方程 $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$，矛盾。注意，方程的左端 $x^2+y^2+z^2$ 模 4 的余数等于 x, y, z 中奇数的个数，因此方程的左端只有当 x, y, z 都是偶数时才被 4 整除。所以 $x=2x_1$，$y=2y_1$，$z=2z_1$，且 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2$。后一方程的右端也被 4 整除。于是同理可得，

$$x_1=2x_2,\ y_1=2y_2,\ z_1=2z_2,$$

且

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=16x_2^2y_2^2.$$

继续上述的讨论，便得一列整数组

$$x_k=\frac{x}{2^k},\ y_k=\frac{y}{2^k},\ z_k=\frac{z}{2^k},\ k\in N.$$

但是任意非零的整数不可能被 2 的所有方幂整除，所以 x, y, z 全为 0。因此 $x_0=y_0=z_0=0$ 是原方程的唯一解。

2.18 满足方程 $n^2=y^2-x^2$ 的每个数对 $x, y\in N$ 都对应着乘积为 n^2 的一个数对 $p=y+x$，$q=y-x$。因此这种数对的个数 a_n 不超过 n^2 的不同的自然数因数之个数。所以对所有的素数 n，均有 $a_n\leqslant3$，因为当 n 为素数时，n^2 恰有 3 个自然数因数。因此对问题(2)的回答是否定的。其次，每对奇偶性相同且满足 $pq=n^2$ 的数对 p, q 都对应着一对数对

$$y=\frac{p+q}{2},\quad x=\frac{p-q}{2},$$

并且当且仅当

$$2x=p-q=\frac{n^2}{q}-q>2n,$$

即

$$q<\frac{n}{1+\sqrt{2}}$$

时 $x>n$。当 $n=3^l$, $l\in N$ 时，$q=3^i$, $i\in Z^+$, $p=2^{2l-i}$, 且 p, q 同奇偶。因此，当 $i=0, 1, \cdots, l-1$ 时，$3^i<\frac{3^l}{1+\sqrt{2}}$。于是 $a_n=l$。由此即可证明问题(1)的断言。

2.19 我们证明，如果对某个 $x\in Z$, $f(x)=x^4+4^x$ 是整数，则此数要么不超过5，要么为合数。事实上，如果 $x<0$，则 $f(x)$ 不是整数。其次，当 $x=0$ 与 $x=1$ 时，

$$f(0)=0^4+4^0<5,\quad f(1)=1^4+4^1=5.$$

如果 $x=2k$, $k\in N$, 则

$$f(x)=2^4k^4+4^{2k}=2^4(k^4+4^{2(k-1)}),$$

为合数。如果 $x=2k+1$, $k\in N$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4+4\cdot 4^{2k}=(x^4+4x^2(2^k)^2+4(2^k)^4)-4x^2(2^k)^2\\&=(x^2+2(2^k)^2)^2-(2x\cdot 2^k)^2\\&=(x^2+2x\cdot 2^k+2(2^k)^2)(x^2-2x\cdot 2^k+2(2^k)^2)\\&=((x+2^k)^2+2^{2k})((x-2^k)^2+2^{2k}).\end{aligned}$$

也是合数，因为其中每个因子 $(x\pm 2^k)^2+2^{2k}$ 都大于1。于是如果 $p>5$ 为素数，则等式 $x^4+4^x=p$ 对任意 $x\in Z$ 都不成立，即原方程没有整数解。

2.20 设 $x, y, z\in N$ 满足方程，则 $((2x)^z+1)((2x)^z-1)=y^{z+1}$，且因 $k=(2x)^z+1$ 与 $m=(2x)^z-1$ 为奇数，故 $(k, m)=(k, k-m)=(k, 2)=1$，即 k 与 m 互素。因此由定理22，存在 $p, q\in N$，使得 $k=p^{z+1}$, $m=q^{z+1}$。于是 $2=p^{z+1}-q^{z+1}=(p-q)(p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z)$, $p\geqslant q+1$，因此，$2\geqslant p^z+p^{z-1}q+\cdots+q^z\geqslant p^z+q^z\geqslant p+q>2q\geqslant 2$，矛盾。所以原方程没有自然数解。

2.21 对 n 用归纳法证明更强的结论：对任意 $n\in N$，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in N$ 和奇数 $y_n>1$，使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_n^2.$$

当 $n=1$ 时，结论成立(只需令 $x_1=y_1=3$ 即可)。设结论对 $n\geqslant 1$ 成立。考虑相应的数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_n$，并令

$$x_{n+1}=\frac{y_n^2-1}{2},\quad y_{n+1}=\frac{y_n^2+1}{2}.$$

因为 y_n 为奇数，且 $y_n>1$，所以 $x_{n+1}, y_{n+1}\in N$，且 $y_{n+1}>1$。于是数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, y_{n+1}$ 满足

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=y_n^2+x_{n+1}^2=y_n^2+\frac{y_n^4-2y_n^2+1}{4}=(y_{n+1})^2,$$

$$y_{n+1}=\frac{y_n^2+1}{2}\equiv 1 \pmod 2,$$

即结论对 $n+1$ 也成立。

2.22 因为方程中 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 都是非负整数，所以 $x_1=1$ 或 0。下面分两种情形讨论。

(1) 当 $x=1$ 时，$x_2+x_3+\cdots+x_{10}=1$。因此在非负整数 $x_2, x_3, \cdots, x_{10}$ 中恰有一个为1，其他均为0。这种取值方法有 $C_9^1=9$ 种。

(2) 当 $x=0$ 时，$x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$。因此在非负整数 $x_2, x_3, \cdots, x_{10}$ 中可以恰有三个为1，其他均为0，也可以恰有一个为1，一个为2，其他为0，还可以恰有一个为3，其他为0。所有的可能取值方法总数为 $C_9^3+C_9^2+C_9^1=165$ 种(见定理96)。

于是原方程共有174个非负整数解。

2.23 如果 $n=1$，则对每个 $z\in N$, $x_1=z^{a_1}$, $x_2=z^{a_2}$ 满足方程。现在设 $n>1$。则由中国剩余定理(定理23)，存在无限多个自然数 z，使得

$$z\equiv 0(\bmod a_1a_2\cdots a_n),\ z\equiv -1(\bmod a_{n+1}).$$

每个这样的 z 对应着一组自然数

$$y_1=\frac{z}{a_1},\ y_2=\frac{z}{a_2},\ \cdots,\ y_n=\frac{z}{a_n},\quad y_{n+1}=\frac{z+1}{a_{n+1}}.$$

记 $x_i=n^{y_i}\in N$, $i=1, 2, \cdots, n, n+1$. 由于

$$x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\cdots+x_n^{a_n}=(n^{y_1})^{a_1}+(n^{y_2})^{a_2}+\cdots+(n^{y_n})^{a_n}=n^z+n^z+\cdots+n^z$$
$$=n\cdot n^z=n^{z+1}=(n^{y_{n+1}})^{a_{n+1}}=x_{n+1}^{a_{n+1}},$$

所以 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 是方程的解. 对于不同的 z, 相应的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 也不同, 所以原方程有无限多个解.

2.24 由中国剩余定理(定理 23), 存在整数 $n\in[0, ab)$, 使得 $n\equiv 0(\bmod b)$, 且 $n\equiv c(\bmod a)$, 因此 $n=by=c-ax$, 其中 $x, y\in Z$. 因为 $0\leqslant by<ab$, 所以 $0\leqslant y\leqslant a-1$, 且 $n\leqslant(a-1)b$. 再由 $c-ax\leqslant(a-1)\times b$, $c\geqslant(a-1)(b-1)$ 可知, $ax\geqslant(a-1)(b-1)-(a-1)b=1-a>-a$. 即 $x>-1$. 因此 $x, y\in Z^+$ 是原方程的解.

2.25 设方程的正整数解 x, y, z 两两不同, 并且其中任意两个之积都被第三个整除, 即 $x|yz, y|xz, z|xy$. 因此 $xy=zu$, $yz=xv$, $xz=yw$, 其中 $u, v, w\in Z^+$. 所以 $(xyz)^2=xyzuvw$. 由于 $xyz\neq 0$, 所以 $uvw=xyz$. 于是, $z^2u=x^2v=y^2w=xyz=uvw$. 从而 $x^2=uw$, $y^2=uv$, $z^2=vw$, 即 $x=\sqrt{uw}$, $y=\sqrt{uv}$, $z=\sqrt{vw}$. 令 $n=\sqrt{u}$, $m=\sqrt{w}$, $k=\sqrt{v}$. 则 $x=nm$, $y=nk$, $z=mk$. 把 x, y, z 代入原方程, 得到 $n(k-m)=mk-1$. 令 $k-m=1$, 则 $n=m^2+m-1$. 于是 $x=m(m^2+m-1)$, $y=(m+1)(m^2+m-1)$, $z=m(m+1)$. 经验证, 当 $m=1, 2, \cdots$时, 上式给出了原方程的无限多个符合要求的正整数解.

2.26 设 $x_0, y_0\in Q$ 是原方程的解, 且 $k\in Q$ 满足条件 $ak^2+b\neq 0$. 注意, 因为 $a^2+b^2>0$, 所以满足 $ak^2+b=0$ 的 $k\in Q$ 至多有两个, 而满足 $ak^2+b\neq 0$ 的 $k\in Q$ 有无限多个. 记

$$x_k=\frac{(b-ak^2)x_0-2bky_0}{ak^2+b},\quad y_k=\frac{(b-ak^2)y_0+2akx_0}{ak^2+b}.$$

因为

$$ax_k^2+by_k^2=\frac{(b-ak^2)^2(ax_0^2+by_0^2)+4abk^2(ax_0^2+by_0^2)}{(ak^2+b)^2}=ax_0^2+by_0^2=1,$$

所以 x_k, y_k 也是原方程的解. 对于上面给定的 x_k, y_k, 可以导出 k 所应满足的方程组

$$\begin{cases} a(x_k+x_0)k^2+2by_0k+b(x_k-x_0)=0, \\ a(y_k+y_0)k^2-2ax_0k+b(y_k-y_0)=0. \end{cases}$$

因为 $ax_0^2+by_0^2=1$, 所以方程组中 k 的系数至少有一个是非零的. 因此上述关于 k 的方程组至多有两个解. 于是, 如果上面给出的数对 x_k, y_k 只有 n 对, 则满足 $ak^2+b\neq 0$ 的 $k\in Q$ 至多有 $2n$ 个, 矛盾. 因此原方程有无限多个有理数解.

注: 上面给出的解 x_k, y_k 有其直观的几何意义. 在坐标平面上, 点 (x_0, y_0) 与 (x_k, y_k) 是直线 $x-x_0=k(y-y_0)$ 与曲线 $ax^2+by^2=1$ 的交点. 所以无需计算即可证明 x_k 与 y_k 为有理数. 事实上, 当 $ak^2+b\neq 0$ 时, y_0 与 y_k 是关于 y 的具有有理系数的二次方程

$$a(x_0+k(y-y_0))^2+by^2=1$$

的根, 所以由韦达定理可知, y_0+y_k 为有理数. 因此, $y_k\in Q$, 且 $x_k=x_0+k(y_k-y_0)\in Q$.

2.27 设 $x=ak^3-3bkm^2$, $y=3ak^2m-bm^3$, $z=ak^2+bm^2$, $k, m\in Z$, 则

$$a(ak^3-3bkm^2)^2+b(3ak^2m-am^3)^2=(ak^2+bm^2)^3,$$

因此 x, y, z 满足方程. 下面证明, 有无限多个数对 $k, m\in Z$, 使得由上面的方法所确定的 $x, y, z\in Z$ 满足 $(x, y)=1$. 首先注意, 如果 k, m, a, b 两两互素(根据条件, a 与 b 互素), 其中恰有一个为偶数, 并且 k 与 m 都不被 3 整除, 则 x 与 y 互素. 事实上, 由于 k, m, a, b 两两互素, 所以

$$(k, y)=(k, 3ak^2m-bm^3)=(k, bm^3)=1,$$
$$(m, x)=(m, ak^3-3bkm^2)=(m, ak^3)=1.$$

又因为 a 与 b 互素，所以 a 与 b 中至少有一个不被 3 整除，不妨设此数为 b。a 不被 3 整除的情形是相仿的。于是，由于 $3ak^2-bm$ 为奇数，bm^2 不被 3 整除，所以，

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(k(ak^2-3bm^2),\ m(3ak^2-bm^2))=(ak^2-3bm^2,\ 3ak^2-bm^2)\\&\leqslant(3ak^2-9bm^2,\ 3ak^2-bm^2)=(8bm^2,\ 3ak^2-bm^2)\\&=(bm^2,\ 3ak^2-bm^2)=(bm^2,\ 3ak^2)=1.\end{aligned}$$

其次设 a, b 全非零，则取 $k=3|ab|+1$, $m=(6|ab|+1)^l$，其中 $l\in N$。容易验证，k, m, a, b 满足上面所说的条件。由如此的 k, m 所确定的 x, y, z 是方程的符合条件的解，而且不同的数对 k, m 所确定的数组 x, y, z 也不同，因为 $z=ak^3+bm^2$ 的值不同。最后，设 a 与 b 中有一个为 0，不妨设 $b=0$, $a=0$ 的情形可仿此讨论。此时取 $x=z=a$，取 y 为与 a 互素的整数，则

$$ax^2+by^2=a\cdot a^2+0\cdot y^3=z^3.$$

证毕。

2.28 设 $x,\ y,\ z\in N$ 满足 $n>1$ 时的方程，且 $x\leqslant n$, $y\leqslant n$。不妨设 $x\leqslant y$。则由牛顿二项式定理，有

$$(y+1)^n=y^n+ny^{n-1}+\cdots+1>y^n+xy^{n-1}\geqslant y^n+x^n=z^n>y^n.$$

因此 $y+1>z>y$。这对任意 $y,\ z\in Z$ 是不可能的。

2.29 设 $x\in N$ 满足 $n>2$ 的方程。记 $y=x+1\geqslant2$。则有 $(y-1)^n+y^n=(y+1)^n$，由此得到

$$0=(y+1)^n-y^n-(y-1)^n\equiv1-(-1)^n(\operatorname{mod} y).$$

如果 n 为奇数，则 $0\equiv2(\operatorname{mod} y)$，从而 $y=2$，且 $0=3^n-1-2^n>0$，不可能，因此 n 为偶数。其次，由牛顿二项式定理，当 n 为偶数时，

$$(y\pm1)^n\equiv\frac{n(n-1)}{2}y^2\pm ny+1(\operatorname{mod} y^3),$$

$$0=(y+1)^n-y^n-(y-1)^n\equiv2ny(\operatorname{mod} y^3).$$

因此 $2n\equiv0(\operatorname{mod} y^2)$，从而 $2n\geqslant y^2$。原先关于 y 的方程除以 y，得到

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^n=1+\left(1-\frac{1}{y}\right)^n<2.$$

另一方面，由贝努利不等式(定理 5)，有

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^n>1+\frac{n}{y}=1+\frac{2n}{2y}\geqslant1+\frac{y^2}{2y}=1+\frac{y}{2}\geqslant2.$$

矛盾。因此原方程无自然数解。

2.30 设正数 $x,\ y\in Q$ 满足方程。下面证明，正数 $z=\frac{y}{x}\in Q$ 是自然数。由方程得到，$x^{x+xz}=(x\cdot xz)^{x}$，即 $x^{1+z}=x^z(1+z)^z$。因此 $x=(1+z)^z$。记 $z=\frac{p}{q}$, $x=\frac{m}{n}$，其中 $p,\ q,\ m,\ n\in N$，且 $(p,\ q)=(m,\ n)=1$，则

$$\left(\frac{m}{n}\right)^q=\left(\frac{p+q}{q}\right)^p,$$

即 $m^qq^p=n^q(p+q)^p$。因为 $(m^q,\ n^q)=1$，所以 $n^q|q^p$。另一方面，

$$((p+q)^p,\ q^p)=(p+q,\ q)^p=(p,\ q)^p=1.$$

因此 $q^p|n^q$。于是，$q^p=n^q$。从而，如果 $q>1$，则在 q^p 的素因子分解式中，每个素因子出现的次数既是 p 的倍数，也是 q 的倍数，因此是 pq 的倍数，所以在 q 的素因子分解式中，每个素因子的方幂是 q 的倍数，因为对任意 $q\in N$，均有 $q<2^q$，故得矛盾。这就证明 $q=1$。因此

$$x=(1+z)^z,\ y=z(1+z)^z,\ z\in N.$$

经检验，上面得到的数对 $x,\ y\in N$ 是原方程的解。

2.31 设 $x\in Z$ 满足方程，则

$$\frac{(x+1)^{x+1}}{x^{x+1}}=\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}.$$

上式两端都是既约分数，因此 $x^{x+1}=1988^{1988}$。如果 $x\geqslant1988$，则 $x^{x+1}>1988^{1988}$。如果 $0<x<1988$，则

$x^{x+1}<1988^{1988}$。如果 $x<-1$，则记 $y=-(x+1)$，由原方程得到 $1988^{1988}=y^y$。因此 $y=1988$，所以 $x=-1989$。经检验，$x=-1989$ 是原方程的整数解。

2.32 设 $n=m(4k-1)$，m，$k\in N$，则

$$\frac{1}{km}+\frac{1}{km(4k-1)}=\frac{4}{m(4k-1)}=\frac{4}{n},$$

因此方程有解 $x=km$，$y=km(4k-1)$。现在设 $x=2^q x_1$，$y=2^r y_1$ 满足方程，其中 q，$r\in Z^+$，x_1，y_1 为奇数。此时，如果 $q<r$，则

$$n=\frac{4xy}{x+y}=\frac{2^{q+r+2}x_1y_1}{2^q(x_1+2^{r-q}y_1)},$$

因为 n 为奇数，所以 $q+r+2=q$，不可能。同理，$q>r$ 也不可能。因此 $q=r$，且 $n=\frac{2^{q+2}x_1y_1}{x_1+y_1}$ 为奇数。从而奇数 x_1 与 y_1 之和被 4 整除。这表明，它们被 4 除时的余数不同。注意，如果在 x_1 与 y_1 的素因子分解式中所有形如 $4k-1$ 的素数出现的次数相同，其中 $k\in N$，则有 $x_1\equiv y_1 \pmod 4$，不可能。因此，存在素数 $p=4k-1$，$k\in N$，使得

$$x_1=p^u x_2,\ y_1=p^v y_2,\ u,\ v\in Z^+,\ u\neq v,$$

其中 x_2 与 y_2 不被 p 整除。设 $u<v$（$u>v$ 的情形仿此），则 $u+v>u$ 且

$$n=\frac{2^{q+2}p^{u+v}x_2y_2}{p^u(x_2+p^{v-u}y_2)}$$

被 p 整除，即 n 具有形式：

$$n=mp=m(4k-1).$$

证毕。

2.33 设题中所说的自然数集合M可表为有限个算术级数集合之并集。我们证明，这些级数中没有无限算术级数。事实上，设集合M含有所有形如 $a+jd$ 的数，其中 a，$d\in N$ 是取定的，而 $j\in Z^+$。因为当 $n=3d-1$ 时，

$$\frac{3}{n}=\frac{3}{3d-1}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d(3d-1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

所以 $3d-1\notin M$。其次，由

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ 可得\ \frac{3}{mn}=\frac{1}{mx}+\frac{1}{my},$$

其中 $m\in N$，因此如果 $n\notin M$，则对任意 $m\in N$，$mn\notin M$。现在取 m，使得 $m\equiv -a \pmod d$，且 $m\geqslant \frac{a}{3d-1}$。于是 $m(3d-1)\equiv a \pmod d$。因此存在 $j\in Z^+$，使得 $m(3d-1)=a+jd\in M$。另一方面，因为 $3d-1\notin M$，所以 $m(3d-1)\notin M$，矛盾。这表明，集合 M 只能是有限个有限的算术级数之集合的并。下面证明，集合M含有无限多个数。为此只需验证，对任意 $k\in Z^+$，$n=7^k$ 属于 M。否则方程

$$\frac{3}{7^k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

有解 x，$y\in N$。记 $q=(x,y)$，则 $x=qx_1$，$y=qy_1$，$(x_1,y_1)=1$，且

$$\frac{3}{7^k}=\frac{x+y}{xy}=\frac{x_1+y_1}{qx_1y_1},$$

即 $7^k(x_1+y_1)=3qx_1y_1$。注意，$(x_1+y_1,x_1y_1)=1$，这是因为如果素数 p 整除 x_1y_1，则因 $(x_1,y_1)=1$，所以 x_1 与 y_1 恰有一个被 p 整除，从而 x_1+y_1 不被 p 整除。由于 $7^k(x_1+y_1)$ 被 x_1y_1 整除，因此，

$$x_1=7^u,\quad y_1=7^v,\quad u,\ v\in Z^+.$$

$$x_1=(2\cdot 3+1)^u\equiv 1 \pmod 3,\ y_1=(2\cdot 3+1)^v\equiv 1 \pmod 3,$$

$$x_1+y_1\equiv 2 \pmod 3,$$

即 $7^k(x_1+y_1)$ 不被 3 整除，与 $7^k(x_1+y_1)=3qx_1y_1$ 相矛盾。因此，无限集合 M 不能表成有限多个有限算术级数集合之并。

2.34 否则，有某对 $x, y\in Z$ 满足方程。如果 x 是奇数，则

$$x^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1\equiv 1(\bmod 4),$$

因此，$y^3=x^2+5\equiv 2(\bmod 4)$，不可能(因为此时 y 应为偶数，从而 $y^3\equiv 0(\bmod 4)$，矛盾)。所以 x 为偶数。因而 $y^3=x^2+5\equiv 1(\bmod 4)$。如果 $y\equiv -1,(\bmod 4)$，则 $y^3\equiv -1(\bmod 4)$。所以 $y\equiv 1(\bmod 4)$。记 $x=2n$，$y=4m+1$，$m, n\in Z$。则由原方程得到

$$4(n^2+1)=x^2+4=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)=4m(16m^2+12m+3),$$

即 $n^2+1=md$，其中 $d=16m^2+12m+3\equiv 3(\bmod 4)$。显然 d 是奇数。因此它的素因子都是奇数。如果 d 的素因子都是模 4 余 1 的，则 d 也是模 4 余 1 的。所以 d 的素因子中至少有一个具有形式 $p=4l+3$，其中 $l\in Z^+$。于是 $n^2+1=md\equiv 0(\bmod p)$，从而 $n^2\equiv -1(\bmod p)$，且

$$n^{p-1}=n^{4l+2}=(n^2)^{2l+1}\equiv -1(\bmod p).$$

但由费马小定理(定理25)，$n^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$，矛盾。结论证毕。

§3 阶乘与二项式系数

3.1 我们证明，对任意 $n\in N$，$n>2$，均有 $(n!)^2>n^n$。事实上，有 $n!n!=(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdots(n\cdot 1)$。因为 $1\cdot n=n\cdot 1=n$，且当 $k=2, \cdots, n-1$ 时，

$$k(n-k+1)=(n-k)(k-1)+n>n.$$

所以

$$n!n!=(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdots(n\cdot 1)>n^n.$$

其中令 $n=17091982$，即得答案：$(17091982!)^2>17091982^{17091982}$。

3.2 因为对每个 $k=1, 2, \cdots, n-1$，有

$$C_n^{k-1}=C_n^k\cdot\frac{k}{n-k+1}, \quad C_n^{k+1}=C_n^k\cdot\frac{n-k}{k+1}, \; C_n^k\neq 0,$$

所以 $2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$ 等价于

$$2=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1},$$

即 $(n-2k)^2=n+2$。因此所求的 $n\in N$ 必可表为 $n=m^2-2$，其中 $m=2, 3, \cdots$。下面设 $n=m^2-2$。如果 $m=2$，则 $n=2$，因此只有当 $k=0$ 时才有 $(n-2k)^2=n+2$。如果 $m>2$，则当 $k=\frac{m(m-1)}{2}-1$ 时，$(n-2k)^2=n+2$ 成立。注意，当 $m\geqslant 2$ 时，有

$$0<\frac{m(m-1)}{2}-1<m^2-2=n.$$

这表明，所求的 $n\in N$ 是所有形如 $n=m^2-2$ 的数，其中 $m=3, 4, \cdots$。

3.3 设 $x, y, z, u\in N$ 是方程的解。用 v 表示 x, y, z 之最大者。则 $1\leqslant v<u$，且

$$uv!\leqslant u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\leqslant 3v!.$$

即 $uv!\leqslant 3v!$，从而 $u\leqslant 3$。当 $u=3$ 时，

$$3!=3v!=x!+y!+z!.$$

因此 $x=y=z=v=2$，当 $u=2$ 时，

$$u!=2<3\leqslant x!+y!+z!,$$

即方程无解。于是方程有唯一的自然数解 $x=y=z=2$，$u=3$。

3.4 显然，$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$。由牛顿二项式定理，

$$C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n).$$

比较两端 x^n 的系数，并利用 $C_n^k=C_n^{n-k}$，$k=0, 1, \cdots, n$，得到

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}=\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}$$
$$=C_{2n}^{n}[(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2]$$
$$=(C_{2n}^{n})^2.$$

3.5 (1) 显然，$C_{2m}^{m}, C_{2m}^{m-1}\in N$，所以

$$\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}=\left(1-\frac{m}{m+1}\right)C_{2m}^{m}$$
$$=C_{2m}^{m}-\frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!}=C_{2m}^{m}-C_{2m}^{m-1}$$

是整数。

(2) 给定 $m\in N$，并设 $k\in N$ 是所求的最小数。则当 $n=m$ 时，

$$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\frac{k}{2m+1}$$

是自然数，所以 $(2m+1)\mid k$，从而 $k\geqslant 2m+1$。下面证明 $k=2m+1$。因为对任意 $n>m$，有

$$\frac{2m+1}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\left(1-\frac{n-m}{n+m+1}\right)C_{2n}^{n+m}$$
$$=C_{2n}^{n+m}-\frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!}$$
$$=C_{2n}^{n+m}-C_{2n}^{n-m-1},$$

而 $C_{2n}^{n+m}, C_{2n}^{n-m-1}\in N$，所以

$$\frac{2m+1}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}\in N.$$

3.6 设 $d\in N$ 是 $C_n^k, C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k}^k$ 的公因数。则 d 也是

$$C_n^{k-1}=C_{n+1}^k-C_n^k,\ C_{n+1}^{k-1}=C_{n+2}^k-C_{n+1}^k,\ \cdots,\ C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^k$$

的公因数。同理，d 是 $C_n^{k-2}, C_{n+1}^{k-2}, \cdots, C_{n+k-2}^{k-2}$ 的公因数。如此继续，最后即得，$C_n^0=1$ 被 d 整除。因此 $d=1$。

3.7 对给定的 $n\in N$，对 $m\in N$ 用归纳法证明，

$$S_{m,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}.$$

当 $m=1$ 时，有

$$S_{1,n}=1-\frac{(n+2)!}{n!(n+1)}=1-(n+2)=-\frac{(n+1)!}{n!}.$$

设对某个 $m\in N$ 结论成立。则

$$S_{m+1,n}=S_{m,n}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m+2)!}{n!(n+m+1)}$$
$$=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!(n+m+2)}{n!}$$
$$=(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!}{n!}(-1+n+m+2)$$
$$=(-1)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{n!},$$

即结论对 $m+1$ 也成立。因为 $C_{n+m}^{m}\in N$，所以

$$S_{m,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!m!}\cdot m!=(-1)^m C_{n+m}^{n}m!$$

被 $m!$ 整除。最后当 $n=2$，$m=3$ 时，$S_{m,n}=-60$ 不被 $m!(n+1)=18$ 整除。

3.8 容易验证，当 $p=2$ 时，$C_4^2-2=4$ 被 $2^2=4$ 整除。因此，设素数 $p>2$。首先有

$$C_{2p}^{p}=\frac{(2p)!}{(p!)^2}=\frac{2p(2p-1)!}{p(p-1)!p!}=2C_{2p-1}^{p-1}.$$

其次，对 $k=1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$，有

$$(2p-k)(p+k)\equiv k(p-k)\pmod{p^2},$$

所以

$$\begin{aligned}(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)&=((2p-1)(p+1))((2p-2)(p+2))\\&\quad\cdots\left(\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right)\\&\equiv(1\cdot(p-1))(2\cdot(p-2))\cdots\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right)\pmod{p^2}\end{aligned}$$

与 $(p-1)!$ 模 p^2 同余。因此存在 $m\in Z$，使得

$$C_{2p-1}^{p-1}=\frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)}{(p-1)!}=\frac{mp^2+(p-1)!}{(p-1)!}=\frac{mp^2}{(p-1)!}+1.$$

由于 $\frac{mp^2}{(p-1)!}=C_{2p-1}^{p-1}-1$ 是整数，且 $(p^2, (p-1)!)=1$，所以 $m=l(p-1)!$，其中 $l\in Z$。因此，

$$C_{2p-1}^{p-1}=\frac{l(p-1)!p^2}{(p-1)!}+1=lp^2+1\equiv1\pmod{p^2}.$$

于是，$C_{2p}^{p}=2C_{2p-1}^{p-1}\equiv2\pmod{p^2}$。证毕。

3.9 记 $f(x)=1!+2!+\cdots+(x+1)!$，则 $f(1)=3$，$f(2)=9=3^{1+1}$，$f(3)=33=3\cdot11$。当 $x>3$ 时，

$$f(x)=f(3)+5!+\cdots+(x+1)!\equiv3\pmod5.$$

因为对任意 $k\in Z$，

$$(5k)^2=25k^2\equiv0\pmod5,$$
$$(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1\equiv1\pmod5,$$
$$(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4\equiv4\pmod5,$$

所以 $f(x)$ 不是整数的平方。因此，当 $z=1$ 时，任意自然数 $x\neq2$ 与 y 都不满足 $f(x)=y^{z+1}$。下面再证明，当 $z\geqslant2$ 时，$f(x)=y^{z+1}$ 也不能满足。经直接验证可知，当 $x=1, 2, 3, 4, 5, 7$ 时，$f(x)$ 都被 3 整除，但不被 27 整除，因此不能表成 y^{z+1}，$z\geqslant2$。当 $x>7$ 时，

$$f(x)=f(7)+9!+\cdots+(x+1)!\equiv f(7)\pmod{27},$$

当 $x=6$ 时，

$$f(6)=5913=3^4\cdot73,$$

它们都不能表成 y^{z+1}，于是方程有唯一的自然数解：$x=2$，$y=3$，$z=1$。

3.10 设 $x, y\in N$ 满足方程。首先证明：$p=y+1$ 是素数。事实上，如果 p 的因数 d 满足 $1<d<y+1$，则 $d\mid y!$。因此 $1=(y+1)^x-y!\equiv0\pmod d$，不可能。于是素数 p 满足 $p^x-1=(p-1)!$。如果 $p\geqslant7$，则上式两端除以 $p-1$，便得到 $p^{x-1}+\cdots+1=(p-2)!$ 而当 $p\geqslant7$ 时，

$$2<\frac{p-1}{2}\leqslant p-2, \text{且} \frac{p-1}{2}\in Z,$$

所以上式右端被 $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ 整除，左端是 x 个

$$p^i\equiv1^i\pmod{(p-1)},\ i=0, 1, \cdots, x-1$$

之和。因此 $x\equiv0\pmod{(p-1)}$，即 $x\geqslant p-1$。但是

$$p^{x-1}<p^{x-1}+\cdots+1=(p-2)!<(p-2)^{p-2}<p^{p-2},$$

即 $x<p-1$，矛盾。所以 $p<7$，即 p 只能是 2, 3 或 5。如果 $p=2$，则 $2^x-1=1$，因此 $x=1$，$y=1$；如果 $p=3$，则 $3^x-1=2$，因此 $x=1$，$y=2$；如果 $p=5$，则 $5^x-1=24$，即 $x=2$，$y=4$。于是原方程恰有三个自然数解 (x, y)：$(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 4)$。

3.11 记 $l_k=\frac{m_k}{k}=\frac{n!}{k}+1$，$k=1, 2, \cdots, n$。我们只需证明，如果 p 是 l_k 的素因子，则对每个 $j\neq k$，p 不整除 m_j。因为素数 p 整除 l_k，从而整除 $m_k=l_kk$，所以素数 p 即合题求。现在设 $p\mid l_k$，并且有某个 $j\neq k$，使得 $p\mid m_j$。则 $p\mid l_j$，或 $p\mid j$。因为 j 是 $1, 2\cdots(k-1)(k+1)\cdots n=l_k-1$ 的因数，所以 $j\mid(l_k-$

1)，从而 $(j,l_k)=(j,1)=1$. 即不可能有 $p|j$. 因此 $p|l_k$. 于是 $p|l_k$, $p|l_j$, $j\neq k$. 设 $p\leqslant n$. 如果 $p\neq k$，则因 $l_k=1,2\cdots(k-1)(k+1)\cdots n+1$，所以 p 与 l_k 互素. 同理，如果 $p\neq j$，则 p 与 l_j 互素. 因此，p 至少与 l_k 或 l_j 互素. 所以 $p\leqslant n$ 是不可能的. 其次设 $p>n$. 则，

$$k-j=m_k-m_j=kl_k-jl_j\equiv 0 \pmod p,$$

即 $p|(k-j)$，与 $0<|k-j|<n<p$ 矛盾. 因此不可能有 $p|l_k$ 且 $p|l_j$. 结论证毕.

3.12 由定理20，在 $l!$ 的素因子分解式中2的幂指数为

$$\left[\frac{l}{2}\right]+\left[\frac{l}{4}\right]+\left[\frac{l}{8}\right]+\cdots;$$

因此 C_n^k 为奇数的必要且充分条件是，在 C_n^k 的素因子分解式中2的幂指数

$$d=\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{n-k}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{k}{4}\right]-\left[\frac{n-k}{4}\right]\right)$$
$$+\left(\left[\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{k}{8}\right]-\left[\frac{n-k}{8}\right]\right)+\cdots=0,$$

其中当 $m\in N$ 充分大时，

$$\left[\frac{n}{2^m}\right],\ \left[\frac{k}{2^m}\right],\ \left[\frac{n-k}{2^m}\right]$$

都为0. 因为

$$\frac{n}{2^m}=\frac{k}{2^m}+\frac{n-k}{2^m}=\left[\frac{k}{2^m}\right]+\left[\frac{n-k}{2^m}\right]+\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\},$$

所以当 $m\in N$ 时，

$$\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{k}{2^m}\right]-\left[\frac{n-k}{2^m}\right]=\left[\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}\right]$$

是非负的. 因此当且仅当对所有 $m\in N$，均有

$$\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}<1$$

时 $d=0$. 下面证明，这个条件等价于题中所说的关于 n 与 k 的二进制写法的条件. 设在 n 的二进制写法中，每个位数上的数字都不小于 k 的同一位数上的数字，则对每个 $m\in N$，$\left\{\frac{n}{2^m}\right\}\geqslant\left\{\frac{k}{2^m}\right\}$. 因此，

$$\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}=\left\{\frac{n}{2^m}\right\}-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}<1-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}.$$

现在设 n 的某个位数上的数字小于 k 在同一位数上的数字（此时这两个数字应分别为0与1），则对某个 $m\in N$，$\left\{\frac{n}{2^m}\right\}<\left\{\frac{k}{2^m}\right\}$. 因此，

$$\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}=\left\{\frac{n}{2^m}\right\}-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+1\geqslant 1-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}.$$

这就证明了上述两个条件的等价性.

3.13 首先证明，条件(2)等价于下述条件：

(3) $n=p^tl+(p^t-1)$，其中 $t\in Z^+$，$l\in N$，$l<p$. 事实上，由条件(2)，$n=p^sm-1=p^s(m-1)+(p^s-1)$，其中 $s\in Z^+$，$m\in N$，$m<p$. 如果 $m>1$，则取 $t=s$，$l=m-1>0$. 如果 $m=1$，则由于 $n=p^0-1=0\notin N$，所以 $s>0$. 因此 $n=p^{s-1}p-1=p^{s-1}(p-1)+(p^{s-1}-1)$，即可取 $t=s-1\geqslant 0$，$l=p-1<p$. 因此条件(3)成立. 另一方面，由条件(3)，$n=p^tl+(p^t-1)=p^t(l+1)-1$. 如果 $l+1<p$，则取 $m=l+1$，$s=t$. 如果 $l+1=p$，则取 $m=1$，$s=t+1$. 因此条件(2)成立. 对给定的 $n\in N$，存在 $t\in Z^+$，使得 $p^t\leqslant n<p^{t+1}$，即 $n=p^tl+r$，其中 $0<r<p^t$，$1\leqslant l<p$. 由定理20，在 $q!$ 的素因子分解式中，素因数 p 的幂指数为

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{q}{p^2}\right]+\left[\frac{q}{p^3}\right]+\cdots.$$

所以

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

的素因子分解式中素数 p 的幂指数 d_k 为

$$d_k=\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{n-k}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{k}{p^2}\right]-\left[\frac{n-k}{p^2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{p^3}\right]-\left[\frac{k}{p^3}\right]-\left[\frac{n-k}{p^3}\right]\right)+\cdots,$$

其中当 $i>t$ 时，

$$\left[\frac{n}{p^i}\right],\ \left[\frac{k}{p^i}\right],\ \left[\frac{n-k}{p^i}\right]$$

都为 0。由于

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{k}{p^i}+\frac{n-k}{p^i}\right]\geqslant\left[\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right]=\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right],$$

所以当且仅当对 $i=0,1,2,\cdots,t$，

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right]$$

时，$d_k=0$。我们证明，这只有当 $r=p^t-1$，即条件 (3) 成立时才有可能。事实上，如果 $r\leqslant p^t-2$，则令 $k=p^t-1$，$i=t$。于是，

$$\left[\frac{k}{p^t}\right]=\left[\frac{p^t-1}{p^t}\right]=0,\quad \left[\frac{n-k}{p^t}\right]\leqslant\left[\frac{p^tl-1}{p^t}\right]=l-1,$$

$$\left[\frac{n}{p^t}\right]=\left[\frac{p^tl+r}{p^t}\right]=l,\ l>0+(l-1).$$

因此，上述等式与条件(1)都不满足。现在设条件(3)成立。则对 $i=0,1,2,\cdots,t$ 与 $k=0,1,\cdots,n$，

$$n=p^i\left[\frac{n}{p^i}\right]+(p^i-1),\ k=p^i\left[\frac{k}{p^i}\right]+q,\ 0\leqslant q<p^i,$$

$$\left[\frac{n-k}{p^i}\right]=\left[\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]+\frac{p^i-(q+1)}{p^i}\right]=\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right],$$

其中用到 $0\leqslant p^i-(q+1)<p^i$。因此当 $k=0,1,\cdots,n$ 时，$d_k=0$，即条件(1)成立。证毕。

3.14 设 $0\cdot h_1h_2h_3\cdots$ 是有理数。则存在 N_0，$T\in N$，使得对每个 $n\geqslant N_0$，都有 $h_{n+T}=h_n$。首先证明，存在 $T_1\in N$，$T|T_1$，且 T_1 的最后一位非零数字为 1。事实上，设 $T=2^\alpha5^\beta p$，其中 $\alpha,\beta\in Z^+$，p 不被 2 与 5 整除。则 $T_0=2^\beta5^\alpha T=2^{\alpha+\beta}5^{\alpha+\beta}p=10^{\alpha+\beta}p$ 的最后一位非零数字为奇数，且不等于 5。如果它等于 1，则取 $T_1=T_0$；如果它等于 3，则取 $T_1=7T_0$；如果它等于 7，则取 $T_1=3T_0$；最后如果它等于 9，则取 $T_1=9T_0$。在这些情形下，T_1 的最后一位非零数字分别与 1, 21, 21, 81 的相同。这样就求出了当 $n\geqslant N$ 时使得 $h_{n+T_1}=h_n$ 的数 $T_1=10^m(10a+1)$，m，$a\in Z^+$。其次证明，对任意 $n\in N$，$h_n\neq5$，事实上，由定理 20，在 $n!$ 的素因子分解式中，2 的幂指数为

$$\gamma=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots,$$

5的幂指数为

$$\delta=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\cdots.$$

因为当 $i\in N$ 时，$\left[\frac{n}{2^i}\right]\geqslant\left[\frac{n}{5^i}\right]$，所以 $\gamma\geqslant\delta$，且 $n!=2^\gamma5^\delta q=10^\delta2^{\gamma-\delta}q$，其中 $q\in N$ 不被 2 与 5 整除。从而 $n!$ 的最后一位非零数字与 $2^{\gamma-\delta}q$ 的相同，所以不等于 5，即 $h_n\neq5$。最后取充分大的 $b\in N$，使得 $M=10^m(10b+1)>N_0$。记 $h_{M-1}=h$。则 $(M-1)!=10^k(10c+h)$，其中 c，$k\in Z^+$。于是，

$$M!=(M-1)!M=10^k(10c+h)\cdot10^m(10b+1)=10^{k+m}(10(10bc+hb+c)+h).$$

因此 $h_M=h$。因为 $T|T_1$，所以 $h_{M-1+T_1}=h_{M-1}=h$。从而 $(M-1+T_1)!=10^l(10d+h)$，其中 l，$d\in Z^+$。

所以

$$
\begin{aligned}
(M+T_1)! &= (M-1+T_1)!(M+T_1) \\
&= 10^l(10d+h)(10^m(10b+1)+10^m(10a+1)) \\
&= 10^{m+l}(10d+h)(10(a+b)+2) \\
&= 10^{m+l}(10(10ad+10bd+ah+bh+2d)+2h),
\end{aligned}
$$

即 h_{M+T_1} 与 $2h$ 的最后一位数字 h' 相同。另一方面，$h_{M+T_1}=h_M=h$。但是，因为 $h\neq 0,5$，所以 $2h$ 的最后一位数字不等于 h，从而 $h_{M+T_1}=h'\neq h=h_{M+T_1}$，矛盾。证毕。

3.15 由条件可知，$a_i-a_{i-1}=a_{i+1}-a_i$，$i=1, 2, 3, \cdots$。这表明，$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是等差数列。设它的公差为 d，则 $d=a_1-a_0\neq 0$，且 $a_i=a_0+id$，$i=1, 2, \cdots$。于是，

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_0C_n^0(1-x)^n+(a_0+d)C_n^1x(1-x)^{n-1}+(a_0+2d)C_n^2x^2(1-x)^{n-2} \\
&\quad +\cdots+(a_0+nd)C_n^nx^n \\
&= a_0[C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+\cdots+C_n^nx^n] \\
&\quad +dx[C_n^1(1-x)^{n-1}+2C_n^2x(1-x)^{n-2}+\cdots+nC_n^nx^{n-1}]
\end{aligned}
$$

由牛顿二项式定理及恒等式 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，

$$
P(x)=a_0((1-x)+x)^n+ndx((1-x)+x)^{n-1}=a_0+ndx.
$$

因为 $d\neq 0$，所以 $P(x)$ 是 x 的一次多项式。

3.16 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，x^2 的系数 a 为 $a=C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+2}^2$。由于 $C_m^{k-1}=C_{m+1}^k-C_m^k$，（见定理 15），所以，

$$
\begin{aligned}
a &= (C_4^3-C_3^3)+(C_5^3-C_4^3)+(C_6^3-C_5^3)+\cdots+(C_{n+3}^3-C_{n+2}^3) \\
&= C_{n+3}^3-1=\frac{1}{6}n(n^2+n+11).
\end{aligned}
$$

§4 数 集 合

4.1 设结论不真，且设 $X=A\cup B$，$5\in A$。如果 $3\in A$，则因 $1+5=2\cdot 3$，$3+5=2\cdot 4$，$3+7=2\cdot 5$，故 $1\in B$，$4\in B$ 且 $7\in B$。但因 $1+7=2\cdot 4$，所以 1，4，7 至少有一个不属于 B，矛盾。如果 $3\in B$，则因 $5+7=2\cdot 6$，故 6 与 7 不能同时属于 A。分两种情形讨论。首先设 $7\in A$，$6\in B$。因为 $9+3=2\cdot 6$，所以 $9\in A$，又 $9+5=2\cdot 7$，所以 $9\in B$。矛盾。其次设 $7\in B$，$6\in A$，因为 $4+6=2\cdot 5$，所以 $4\in B$。又因为 $1+7=2\cdot 4$，$2+4=2\cdot 3$，所以 $1\in A$，$2\in A$。于是由 $8+2=2\cdot 5=9+1$ 可知，$8\in B$，$9\in B$。但是 $9+7=2\cdot 8$，所以 $9\in A$，矛盾。证毕。

4.2 对任意 $i, j\in\{1, 2, \cdots, 7\}$，第 i 个位置上的数字为 j 的数有 $6!$ 个。因此所有 $7!$ 个数之和等于

$$
\begin{aligned}
&(6!1+6!2+\cdots 6!7)+(6!1+6!2+\cdots+6!7)10+(6!1+6!2+\cdots \\
&\quad +!7)10^2+\cdots+(6!1+6!2+\cdots+6!7)10^5 \\
&= 6!(1+2+\cdots+7)(1+10+10^2+\cdots+10^6) \\
&= 720\cdot 28\cdot 1111111=22399997760.
\end{aligned}
$$

4.3 将除以 100 时可能得到的 100 个余数分成 51 组：$\{0\}$，$\{1, 99\}$，$\{2, 98\}$，$\cdots$，$\{49, 51\}$，$\{50\}$。因为有 52 个数，所以由狄利克雷(定理 1)，必有两个数，它们除以 100 的余数落在同一组。这两个数即是所要求的，因为如果它们的余数相同，则它们的差被 100 整除，如果它们的余数不同，则它们的和被 100 整除。

4.4 设结论对集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 不真。则

$$
S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \cdots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n
$$

都不被 n 整除。由于除以 n 时所有非零的余数只有 $n-1$ 个，所以由狄利克雷原理（定理 1），必有两个数 S_i 与 S_j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，它们的余数相同。于是差 $S_j-S_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$ 被 n 整除，与假设矛盾。

4.5 考虑 $2n$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, k-a_1, k-a_2, \cdots, k-a_n$。因为 $2n>m$，所以其中至少有两个被 m 除的余数相同。由题中条件，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 m 除的余数各不相同，因此 $k-a_1, k-a_2, \cdots, k-a_n$ 的余数也各不相同。于是余数相同的两个数只能是 a_i, $k-a_j$ 于是它们的差 a_i+a_j-k 被 m 整除。

4.6 设结论不真，则 19 个自然数 $a_{20}-a_{19}, a_{19}-a_{18}, \cdots, a_2-a_1$ 中没有 4 个是相同的。因此，1，2，3，4，5，6 在其中出现的次数各至多是 3。于是上述 19 个数中至少有一个大于 6，否则不超过 6 的自然数至少有 19 个，不可能。余下的 18 个数中至少有三个大于 5，再余下的 15 个数中至少有三个大于 4，等等。因此

$$
\begin{aligned}
70>a_{20}-a_1&=(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\cdots+(a_2-a_1)\\
&\geqslant 7+(6+6+6)+(5+5+5)+\cdots+(1+1+1)=70,
\end{aligned}
$$

矛盾，证毕。

4.7 由狄利克雷原理（定理 1），七个子集中至少有一个子集 A，它至少含有 15 个数。子集 A 中每对数 $a>b$ 都确定一个差 $a-b$，$1\leqslant a-b\leqslant 99$。因为至少有 $C_{15}^2=\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=105$ 个差，所以由狄利克雷原理，A 中必有两对数 $a>b$，$c>d$，使得 $a-b=c-d$。由此可知，$a\neq c$，$b\neq d$。如果 $a\neq d$，$b\neq c$，则 A 含有 4 个数 a, b, c, d，使得 $a+d=b+c$。如果 $a=d$（或 $b=c$），则 A 含有三个数 a, b, c，（或 a, b, d），使得 $b+c=2a$（或 $a+d=2b$）。证毕。

4.8 设 I 中形如 $\frac{p}{q}$ 的既约分数的个数大于 $\frac{n+1}{2}$，其中 $q\in\{1, 2, \cdots, n\}$。把既约分数 $\frac{p}{q}$ 的分母 q 表成 $2^r s$，其中 s 为奇数，$r\in Z^+$。在 $1, 2, \cdots, n$ 中不同的奇数有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个，比所考虑的分母个数少。因此由定理 1，必有两个分母 $q=2^r s$ 和 $q_1=2^{r_1}s_1$，使得 $s=s_1$，且 $r\leqslant r_1$。于是 $q|q_1$，即 $q_1=kq$，其中 $kq\leqslant n$。这表明，I 中有两个既约分数 $\frac{m}{q}$ 与 $\frac{l}{kq}$，其中 $1\leqslant q<kq\leqslant n$。从而有

$$
\left|\frac{m}{q}-\frac{l}{kq}\right|=\frac{|km-l|}{kq}\geqslant\frac{1}{kq}\geqslant\frac{1}{n}
$$

与 I 是长为 $\frac{1}{n}$ 的开区间相矛盾。

4.9 设 (x, y, z) 是三元自然数组，$x\leqslant y\leqslant z$，且 $x+y+z=6n$。当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时，所有 $x=2k-1$ 的三元自然数组 (x, y, z) 为：

$$
\begin{gathered}
(2k-1,\ 2k-1,\ 6n-4k+2),\\
(2k-1,\ 2k,\ 6n-4k+1),\\
\cdots\cdots\\
(2k-1,\ 3n-k,\ 3n-k+1),
\end{gathered}
$$

所有 $x=2k$ 的三元组为：

$$
\begin{gathered}
(2k,\ 2k,\ 6n-4k)\\
(2k,\ 2k+1,\ 6n-4k-1)\\
\cdots\cdots\\
(2k,\ 3n-k,\ 3n-k).
\end{gathered}
$$

上述所有三元组的个数为

$$
S_k=((3n-k)-(2k-2))+((3n-k)-(2k-1))=6n-6k+3.
$$

于是所有三元组 (x, y, z) 的个数为

$$
\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}(6n-6k+3)=\frac{(6n-3)+3}{2}\cdot n=3n^2.
$$

4.10 设 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 是取自 $1, 2, \cdots, 49$ 的六个不同的数，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_6$。显然 $a_1\leqslant a_2-1\leqslant a_3-2\leqslant a_4-3\leqslant a_5-4\leqslant a_6-5$，且 $a_1, a_2-1, a_3-2, a_4-3, a_5-4, a_6-5$ 互不相同的必要且充分条件是，$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 不含相邻的数。令六元数组 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 对应于 $(a_1, a_2-1, a_3-2,$

$a_4-3, a_5-4, a_6-5)$。则在取自 1 至 49 之间的六个不同且没有相邻的数构成的六元组集合与所有取自 1 至 44 之间的六个不同的数构成的六元组集合之间建立了一个双射。因此这两个集合中六元组的个数都等于 C_{44}^6。而 1 至 49 之间六个不同的数构成的六元组的个数为 C_{49}^6。于是，其中有相邻数的六元组的个数为 $C_{49}^6-C_{44}^6$。

4.11 对 $n\in N$ 递归构造集合 A 与 B。令 $1\in A$，且设 $1, 2, \cdots, n-1$ 已分到子集 A 或 B。考虑 n。如果存在 $k_1\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，使 $\frac{k_1}{n}=c$，则将 n 分到不含 k_1 的子集，又如果存在 $k_2\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，使 $\frac{n}{k_2}=c$，则将 n 分到不含 k_2 的子集。注意，因为 $\frac{k_1}{n}<1$，$\frac{n}{k_2}>1$，所以 $\frac{k_1}{n}=c$ 与 $\frac{n}{k_2}=c$ 不能同时满足。如果对任意 $k_1, k_2\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$，$\frac{k_1}{n}\neq c$，$\frac{n}{k_2}\neq c$，则令 $n\in A$。容易验证，如此得到的划分 $A\cup B=N$ 满足题中条件。

4.12 因为对 $i=1, 2, \cdots, n-1$，有

$$\begin{aligned}b_i-b_{i+1}&=(1-n)a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n+a_1+a_2+\cdots a_{i-1}+a_i\\&=1-na_i\equiv1(\bmod n),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&b_{n-1}\equiv b_n+1\ (\bmod n),\\&b_{n-2}\equiv b_{n-1}+1\ (\bmod n),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&b_1\equiv b_2+1\ (\bmod n).\end{aligned}$$

因此 $b_{n-i}\equiv b_n+i(\bmod n)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$，即 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 被 n 除的余数不同，从而没有相同的。

4.13 设 $2a, 2a+2, 2a+4, \cdots, 2a+2(n-1)$ 是 n 个连续偶数，则它们的和为

$$S_n=\frac{1}{2}(2a+2a+2(n-1))n=(2a+n-1)n.$$

令 $(2a+n-1)n=n(n-1)^{k-1}$，则 $2a+n-1=(n-1)^{k-1}$，即

$$a=\frac{1}{2}\ (n-1)((n-1)^{k-2}-1).$$

因此，当 $n>2$ 且 $k>2$ 时，a 为正整数。于是，取

$$a=\frac{1}{2}(n-1)((n-1)^{k-2}-1),$$

则 $n(n-1)^{k-1}$ 等于 n 个连续偶数 $2a, 2a+2, \cdots, 2a+2(n-1)$ 之和。

4.14 设 $n\in N$ 具有所说的性质，$a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是符合要求的排列，用 m_k 表示 $a_i=a_j=k$ 时 i 与 j 中较小的。则 i 与 j 中较大的为 m_k+k+j。因此 $2n$ 个下标之和为

$$\sum_{k=1}^{n}(m_k+(m_k+k+1))=2\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{n(n+3)}{2}.$$

另一方面，这 $2n$ 个下标之和又等于 $\sum_{i=1}^{2n}i=n(2n+1)$。因此，

$$2\sum_{k=1}^{n}m_k=n(2n+1)-\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

即 $\frac{n(3n-1)}{4}$ 为整数。由于 n 与 $3n-1$ 中只有一个是偶数，所以这个偶数应被 4 整除。于是仅有两种可能：$n=4l$，或 $3n-1=4l'$，即

$$n=\frac{4l'+4-3}{3}=4\frac{l'+1}{3}-1=4l-1,\ l,\ l'\in N.$$

下面证明，任意形如 $n=4l$ 或 $4l-1$ 的 $n\in N$ 都具有题中所说性质。当 $n=4l$，$l\geqslant2$ 时，符合要求的排列为

$$4l-4, \cdots, 2l, 4l-2, 2l-3, \cdots, 1, 4l-1, 1\cdots, 2l-3, 2l, \cdots, 4l-4, 4l,$$

$4l-3, \cdots, 2l+1, 4l-2, 2l-2, \cdots, 2, 2l-1, 4l-1, 2, \cdots, 2l+2, 2l+1, \cdots,$

$4l-3, 2l-1, 4l,$

其中每一处“…”都表示一个算术级数，其公差为 2 或 -2，且首项是它前面的最后一个数，末项是后面紧接的数。同样，当 $n=4l-1$，$l\geqslant 2$ 时，符合要求的排列为

$$4l-4, \cdots, 2l, 4l-2, 2l-3, \cdots, 1, 4l-1, 1, \cdots, 2l-3, 2l, \cdots,$$
$$4l-4, 2l-1, 4l-3, \cdots, 2l+1, 4l-2, 2l-2, \cdots, 2, 2l-1, 4l-1,$$
$$2, \cdots, 2l-2, 2l+1, \cdots, 4l-3.$$

最后当 $n=4$ 与 $n=3$ 时，符合要求的排列是

$$2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4; \text{ 与 } 2, 3, 1, 2, 1, 3.$$

4.15 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{19}$ 是第一行的数字，$b_1, b_2, \cdots, b_{88}$ 是第二行的数字。记 $A_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$，$B_i=b_1+b_2+\cdots+b_i$，并设 $A_{19}\geqslant B_{88}$（$A_{19}<B_{88}$ 的情形可同样处理）。记

$$n_i=\min\{n: A_n\geqslant B_i,\ 1\leqslant n\leqslant 19\},\ 1\leqslant i\leqslant 88.$$

由假设可知，n_i 是存在的。现在考察 88 个差数 $A_{n_i}-B_i$。它们的值都是整数，且在 0 与 87 之间。因为 $A_{n_i}-B_i=A_{n_i-1}-B_i+a_{n_i}<a_{n_i}\leqslant 88$。如果这 88 个数互不相同，则其中必有一个为 0，从而结论得证。如果有两个差数相同，不妨设 $A_{n_l}-B_l=A_{n_k}-B_k$，其中 $1\leqslant l<k\leqslant 88$。则 $A_{n_l}-A_{n_k}=B_l-B_k$，即 $a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \cdots, a_{n_l}$ 与 $b_{k+1}, b_{k+2}, \cdots, b_l$ 即为符合条件的两段数。

注： 题中的 19 与 88 可以换成任意两个自然数。

4.16 由条件(2)，$1\in M$，或 $-1\in M$。但是 $-1\notin M$，否则由条件(1)，$(-1)(-1)=1\in M$，与条件(2)矛盾。因此 $1\in M$。由条件(1)，$2=1+1\in M$，$3=1+2\in M$，等等，即 $N\subseteq M$。设 $m\in N$，如果 $-\frac{1}{m}\in M$，则由条件(1)，$\left(-\frac{1}{m}\right)m=-1\in M$，不可能。因此 $-\frac{1}{m}\notin M$。由条件(2)，$\frac{1}{m}\in M$。于是由条件(1)，对任意 $n, m\in N$，$n\cdot\frac{1}{m}=\frac{n}{m}\in M$。再由条件(2)，$-\frac{n}{m}\notin M$。此外，由条件(2)，$0\notin M$。结论证毕。

4.17 我们证明，有限的正数集合 M 具有基 B。设 S 是正数集合 M 的子集。如果 M 中每个数都可以表为

$$\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\cdots\alpha_m^{i_m},\quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\in S,\ i_1, i_2, \cdots, i_m\in Z,$$

则 S 称为 M 的上基。例如集合 M 自身即是 M 的上基。在 M 的所有上基中，取集合 $S_0=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$，使它所含元素最少（因为 M 是有限集合，所以 S_0 存在）。首先证明，如果 $n\geqslant 2$，则 S_0 即是 M 的基。设某个 $u\in M$ 可表为 S_0 中元素的两种不同形式的整数次幂之乘积

$$u=\beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2}\cdots\beta_n^{i_n}=\beta_1^{j_1}\beta_2^{j_2}\cdots\beta_n^{j_n}.$$

记 $k_l=i_l-j_l$，则 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0，且 $\beta_1^{k_1}\beta_2^{k_2}\cdots\beta_n^{k_n}=1$。不妨设 $k_n\neq 0$。则记 $\gamma_l=\beta_l^{\frac{1}{k_n}}$，$l=1, 2, \cdots, n-1$，并取 $S_1=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}\}$。于是集合 S_0 中每个元素都可表为 S_1 中元素的整数次幂之乘积：当 $l=1, 2, \cdots, n-1$ 时，$\beta_l=\gamma_l^{k_n}$，且 $\beta_n=\gamma_1^{-k_1}\gamma_2^{-k_2}\cdots\gamma_{n-1}^{-k_{n-1}}$。因此集合 S_1 是 M 的上基，且只含 $n-1$ 个元素，与 S_0 的选取矛盾。因此 S_0 是 M 的基。其次设 $n=1$，则 M 有上基 $S_0=\{\beta\}$。如果 $\beta\neq 1$，则因为当 $i\neq j$ 时不可能有 $\beta^i=\beta^j$，所以 S_0 是 M 的基。如果 $\beta=1$，则 $S_0=\{1\}$。于是 $M=\{1\}$，且集合 $S_1=\{2\}$ 是 M 的基。

4.18 **解法 1** 考虑多项式

$$P(x)=\left(x+\frac{1}{1}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{n}\right),$$

它的展开式记为

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n.$$

由韦达定理，

$$a_1=\sum_{i_1=1}^{n}\frac{1}{i_1},\ a_2=\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\frac{1}{i_1i_2},\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}.$$

于是题中的和式为

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=P(1)-1=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$

$$=\frac{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}-1=(n+1)-1=n.$$

解法 2 记

$$S_n=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{1}{i_1i_2\cdots i_k}.$$

对 n 用归纳法证明 $S_n=n$。当 $n=1$ 时，显然有 $S_1=1$。设 $n\geqslant 2$，且 $S_{n-1}=n-1$。则

$$S_n-S_{n-1}=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k=n}\frac{1}{i_1i_2\cdots i_k}$$

$$=\frac{1}{n}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant n-1}\frac{1}{i_1i_2\cdots i_l n}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{S_{n-1}}{n}.$$

即

$$S_n=S_{n-1}+\frac{S_{n-1}}{n}+\frac{1}{n}=(n-1)+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=n.$$

4.19 当 $n=1$ 时，排列 $(a_1)=(0)$ 满足题中条件。当 $n=4$ 时，排列 $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 3, 2, 0)$ 具有所需的性质。设 n 为素数。则由中国剩余定理(定理 23)，对每个 $k=2, 3, \cdots, n$，存在 b_k，使得

$$b_k\equiv 0(\bmod k-1),\ b_k\equiv k(\bmod n).$$

用 a_k 表示 $c_k=\frac{b_k}{k-1}$ 被 n 除的余数，则 $b_k=c_k(k-1)\equiv a_k(k-1)(\bmod n)$。令 $a_1=1$。下面证明，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同。事实上，有 $a_n=0$，且当 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 时，$a_k\neq a_n$，这是因为 $a_n(n-1)\equiv 0(\bmod n)$，$a_1=1$，且当 $k=2, 3, \cdots, n-1$ 时，$a_k(k-1)\equiv k(\bmod n)$。其次，如果 $a_l=a_k=a$，其中 $1<l<k<n$，则

$$a(kl-k)=a_l(l-1)k\equiv lk(\bmod n),$$

$$a(kl-l)=a_k(k-1)l\equiv kl(\bmod n).$$

所以 $a(k-l)=a(kl-l)-a(kl-k)\equiv 0(\bmod n)$，不可能，因为 $(a, n)=(k-l, n)=1$。最后，如果 $a_k=a_1$，其中 $1<k<n$，则 $k-1=a_k(k-1)\equiv k(\bmod n)$，矛盾。因此集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 由 n 个不同的数组成，并且对任意 k，有 $0\leqslant a_k\leqslant n-1$。所以 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{0, 1, \cdots, n-1\}$。下面再证明，所得到的排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 满足题中条件。事实上，有 $a_1=1$，$a_1a_2\cdots a_n=0$。而当 $k=2, 3, \cdots, n-1$ 时，

$$a_1a_2a_3\cdots a_k,\ 1a_2a_3\cdots a_k,\ 2a_3\cdots a_k,\ \cdots,\ (k-1)a_k,\ k$$

被 n 除的余数相同，即 $a_1a_2\cdots a_k\equiv k(\bmod n)$。因此 $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \cdots, a_1a_2\cdots a_n$ 被 n 除的余数集合为 $\{1, 2, \cdots, n-1, 0\}$。最后证明，任意合数 $n>4$ 都不合题中条件。如果 $n=p^2$，则记 $q=2p<n$；否则 n 可表为 $n=pq$，其中 $1<p<q<n$。在这两种情形下，都有 $pq\equiv 0(\bmod n)$。现在设排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 合乎题中条件。则当 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 时，$a_k\neq 0$，否则 $a_1a_2\cdots a_k\equiv 0(\bmod n)$，且 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\equiv 0(\bmod n)$，矛盾。取 $k, l<n$，使得 $a_k=p$，$a_l=q$。记 $m=\max(k, l)$。则 $a_ka_l|a_1a_2\cdots a_m$。因此

$$a_1a_2\cdots a_m\equiv 0(\bmod n),\ 且\ a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}\equiv 0(\bmod n).$$

与假设矛盾。于是符合题中条件的 $n\in N$ 为 1, 4, 以及所有的素数。

4.20 设 $n=pq$，其中 $p>1$，$q>1$，且 $(p, q)=1$。则对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，必有 $m\in\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$，$l\in\{1, 2, \cdots, q\}$，使得 $k=mq+l$。记 $i_k=r+1$，其中 r 是 $mq+lp-1$ 被 n 除的余数。于是 $i_1, i_2, \cdots, i_n\in\{1, 2, \cdots, n\}$。下面证明，$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 互不相同。否则，设有两个不同的下标 $k_1=m_1q+l_1$，$k_2=m_2q+l_2$，使得 $i_{k_1}=i_{k_2}$。因此，

$$(m_1q+l_1p)-(m_2q+l_2p)=(m_1-m_2)q+(l_1-l_2)p$$

被 $n=pq$ 整除。因为 p, q 互素，所以 m_1-m_2 被 p 整除，而 l_1-l_2 被 q 整除。又因为 $|m_1-m_2|<p$，$|l_1-l_2|<q$，所以只能 $m_1-m_2=l_1-l_2=0$，从而 $k_1=k_2$，与 $k_1\neq k_2$ 的假设矛盾。于是 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 1, 2,

…, n 的排列。利用函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的周期性，并将和式

$$S=\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2\pi i_k}{n}$$

中被加项以特定方式合并，便得到

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{q}(mq+l)\cos\frac{2\pi(mq+lp)}{pq}\\
&=\sum_{m=0}^{p-1}mq\sum_{l=1}^{q}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)\\
&\quad+\sum_{l=1}^{q}\sum_{m=0}^{p-1}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)\\
&=\sum_{m=0}^{p-1}mq\left(\cos\frac{2\pi m}{p}\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{2\pi m}{q}\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}\right)\\
&\quad+\sum_{l=1}^{q}l\left(\cos\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}-\sin\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\sin\frac{2\pi m}{p}\right)\\
&=0,
\end{aligned}$$

其中用到下面的结论：

$$\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}=\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}=0;$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}=\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}=0.$$

因此，上面给出的排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 合乎题中条件。

注：为证明上述两个等式，只需注意，由韦达定理，复数

$$x_l=\cos\frac{2\pi l}{q}+i\sin\frac{2\pi l}{q},\ l=1, 2, \cdots, q$$

与

$$y_m=\cos\frac{2\pi m}{p}+i\sin\frac{2\pi m}{p},\ m=0, 1, 2, \cdots, p-1$$

分别是多项式 x^q-1 与 x^p-1 的根，因此其和为 0。较初等的证明如下：在平面上引进坐标系，则点

$$\left(\cos\frac{2\pi j}{N},\ \sin\frac{2\pi j}{N}\right),\ j=1, 2, \cdots, N,\ N\geqslant 2$$

是中心在坐标原点的正 N 边形的顶点。由正 N 边形的中心作指向其顶点的向量，这 N 个向量之和关于平面绕其中心旋转角 $\frac{2\pi}{N}$ 而不变，因此等于 0。

4.21 对 $n\in N$ 用归纳法，当 $n=1$ 时结论显然成立，设结论对小于 n 的自然数都成立。记 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$。如果 $m=n$，则 $\frac{1}{2}(n+1)=k$ 为整数，所以可将 S_n 分成如下 k 个组：

$$\{n\},\ \{1, n-1\},\ \{2, n-2\},\ \cdots,\ \left\{\frac{1}{2}(n-1),\ \frac{1}{2}(n+1)\right\}.$$

如果 $m=n+1$，则 $n=2k$ 为偶数，因此 S_n 可以分为如下 k 个组：

$$\{1, n\},\ \{2, n-1\},\ \cdots,\ \left\{\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\right\}.$$

当 $m\neq n, n+1$ 时分三种情形讨论，情形 1：$n+1<m<2n$，且 m 为奇数，此时 $n\geqslant m-n-1$，且

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+(m-n-1)&=\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n)\\
&=\frac{1}{2}(m^2-m(2n+1))+\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\left(\frac{1}{2}(m-2n-1)+k\right)m
\end{aligned}$$

被 m 整除，由归纳假设，集合 $S_{m-n-1}=\{1, 2, \cdots, m-n-1\}$ 可以分成 $l=k-\left(n-\frac{m-1}{2}\right)$ 个组 $A_1, A_2,$

$\cdots, A_l$，每组数之和为 m。于是 S_n 可以分成 k 个组：

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_l,\ \{m-n,\ n\},\ \{m-n+1,\ n-1\},\ \cdots,\ \left\{\frac{m-1}{2},\ \frac{m+1}{2}\right\}.$$

情形 2：$n+1<m<2n$，且 m 为偶数。与情形 1 相仿，S_{m-n-1} 可以分成 $l=k-(n-m)-(n-k)+1=m+2k-2n+1$ 个组 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_l$，每组数之和为 $\frac{m}{2}$。注意 $l=2\left(k-n+\frac{m}{2}\right)+1$ 为奇数，于是 S_{m-n-1} 可以分成 $k-n+\frac{m}{2}+1$ 个组

$$A_1\cup A_2,\ A_3\cup A_4,\ \cdots,\ A_{l-2}\cup A_{l-1},\ A_l\cup\left\{\frac{m}{2}\right\},$$

每组数之和为 m。因此，S_n 可以分为 k 个组

$$A_1\cup A_2,\ \cdots,\ A_{l-2}\cup A_{l-1},\ A_l\cup\left\{\frac{m}{2}\right\},\ \{m-n,\ n\},\ \cdots,\ \left\{\frac{m}{2}-1,\ \frac{m}{2}+1\right\}.$$

情形 3：$m\geqslant 2n$。此时

$$k=\frac{n(n+1)}{2m}<\frac{1}{4}(n+1),$$

所以 $n-2k\geqslant 2k-1>0$。注意，

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(n-2k)&=\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)-k(2n+1)+2k^2=k(m-2n-1+2k).\end{aligned}$$

因此由归纳假设，S_{n-2k} 可分为 k 个组 $A_1,\ A_2\cdots,\ A_k$，每组数之和为 $m+2k-2n-1$。记 $B_i=\{n-2k+i,\ n-i+1\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$。则 S_n 可分成 k 个组 $A_1\cup B_1,\ A_2\cup B_2,\ \cdots,\ A_k\cup B_k$，每组数之和为 m。

4.22 分别用 A 与 B 表示具有严格单调(递增或递减)数字的自然数集合，用 $S(M)$ 表示集合 M 中所有数的和，把集合 B 分成如下两个不交子集 B_0 与 B_1：末位数字为 0 的数与末位数字非零的数，于是，$S(B)=S(B_0)+S(B_1)$，如果让 $b\in B_1$ 与 $10b\in B_0$ 相对应，则得到 B_1 与 B_0 间的一个双射。因此 $S(B_0)=10S(B_1)$，从而 $S(B)=11S(B_1)$。其次如果让 $a=\overline{a_1a_2\cdots a_k}\in A$ 与 $b=\overline{(10-a_1)(10-a_2)\cdots(10-a_k)}\in B_1$ 相对应，其中 $a+b=\frac{10}{9}(10^k-1)$，则得到集合 A 与 B_1 间的一个双射，因为集合 A 中每个数都可由数 123456789 删掉若干个数字得到，且对每个 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$，A 中恰有 C_9^k 个 k 位数，所以，

$$\begin{aligned}l=S(A)+S(B_1)&=\sum_{k=1}^{9}C_9^k\frac{10}{9}(10^k-1)\\&=\frac{10}{9}\left(\sum_{k=0}^{9}C_9^k\,10^k-\sum_{k=0}^{9}C_9^k\right)\\&=\frac{10}{9}\left((1+10)^9-(1+1)^9\right)=\frac{10}{9}(11^9-2^9).\end{aligned}$$

用 B_2 表示集合 B 中首位数为 9 的自然数集合，而 B 中其余的数与 0 组成的集合记作 B_3，则

$$S(B)=S(B_2)+S(B_3).$$

令 $a=\overline{a_1a_2\cdots a_k}\in A$ 与 $b=\overline{(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_k)}\in B_3$ 相对应，则 A 与 B_3 间建立了一个双射，且 $a+b=10^k-1$。因此，

$$m=S(A)+S(B_3)=\sum_{k=1}^{9}C_9^k(10^k-1)=11^9-2^9.$$

最后，如果当 $k\geqslant 1$ 时让 $b=\overline{9b_1b_2\cdots b_k}\in B_2$ 与 $a=\overline{(9-b_1)(9-b_2)\cdots(9-b_k)}\in A$ 相对应，而当 $k=0$ 时让 b 与 0 相对应，则 B_2 与 $A\cup\{0\}$ 间便建立了一个双射，且 $a+b=10^{k+1}-1$。因此，

$$n=S(A)+S(B_2)=\sum_{k=0}^{9}C_9^k(10^{k+1})=10\cdot 11^9-2^9,$$

且 $m+n=2S(A)+S(B)$。于是得到方程组

$$\begin{cases}S(A)+\dfrac{1}{11}S(B)=l=\dfrac{10}{9}(11^9-2^9),\\2S(A)+S(B)=m+n=11^{10}-2^{10}.\end{cases}$$

解得

$$S(A)=\frac{1}{9}(11\,l-m-n),\ S(B)=\frac{11}{9}(m+n-2\,l).$$

注意,集合A与B都含有9个一位数,它们之和为45,因此所求的和为

$$\begin{aligned}S(A)+S(B)-45&=\frac{10}{9}(m+n)-\frac{11}{9}l-45\\&=\frac{10}{9}(11^{10}-2^{10})-\frac{10}{81}\cdot 11^{10}+\frac{55}{81}\cdot 2^{10}-45\\&=\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}2^{10}-45.\end{aligned}$$

4.23 让n元自然数组$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$对应于由$b_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n$, $i=1, 2, \cdots, n$构成的n元自然数组,于是在所有适合$a_1+2a_2+\cdots+na_n=1979$的$n$元组$a$的集合$A_n$与所有适合$b_1+b_2+\cdots+b_n=1979$且$b_1>b_2>\cdots>b_n$的$n$元组$b$的集合$B_n$间建立一个双射。分别用$A$与$B$表示所有的$A_n$, $n\in N$与所有的B_n, $n\in N$的并集。对$b=(b_1b_2, \cdots, b_n)\in B_n$,用$\pi(b)$表示$n$元组$b$的最后一个数$b_n$,用$\sigma(b)$表示使$b_s=b_1-s+1$的下标$s$的最大值,其中$1\leqslant s\leqslant n$。因此如果$\sigma(b)=s$,则$b_2=a_1-1$, $b_3=b_2-1$, $\cdots$, $b_s=b_{s-1}-1$。在集合B上定义映射α与β。如果$\pi(b)\leqslant\sigma(b)$,则$b_n\leqslant n-1$,否则$n-1<b_n=\pi(b)\leqslant\sigma(b)\leqslant n$,即$\sigma(b)=n$,于是

$$1979=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=n+(n+1)+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n(3n-1),$$

但这对每个$n\in N$都不成立。因此对$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in B$,令$\alpha(b)=(b_1+1, b_2+1, \cdots, b_{\pi(b)}+1, a_{\pi(b)+1}, \cdots, b_{n-1})$。此时有$\pi(\alpha(b))=b_{n-1}>b_n=\pi(b)=\sigma(\alpha(b))$。如果$\pi(b)>\sigma(b)$,则令$\beta(b)=(a_1-1, b_2-1, \cdots, b_{\sigma(b)}-1, b_{\sigma(b)+1}, \cdots, b_n, \sigma(b))$。如果$\sigma(b)=n$,则$b_n-1>\sigma(b)$。否则,$n=\sigma(b)<b_n\leqslant\sigma(b)+1=n+1$,从而$b_n=n+1$, $b_{n-1}=n+2$, $\cdots$, $b_1=2n$,于是

$$1979=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=\frac{1}{2}n(3n+1),$$

但这对每个$n\in N$都不成立。因此,$\beta(b)=(b_1-1, b_2-1, \cdots, a_n-1, \sigma(b))$。这表明,$\sigma(\beta(b))=n=\sigma(b)$,从而$\pi(\beta(b))=\sigma(b)=\sigma(\beta(a))$。如果$\sigma(b)\leqslant n-1$,则容易验证,$\pi(\beta(b))=\sigma(b)\leqslant\sigma(\beta/\sigma))$。所以对任意$b\in B$, $\pi(\beta(b))\leqslant\sigma(\beta(b))$。分别用$E$与$F$表示所有$B_{2m-1}$与所有$B_{2m}$, $m\in N$的并集,定义映射$\gamma:E\longrightarrow F$如下:当$\pi(b)\leqslant\sigma(b)$时$\gamma(b)=\alpha(b)$,而当$\pi(b)>\sigma(b)$时,令$\gamma(b)=\beta(b)$。如前所证,设$b\in E$,如果$\pi(b)\leqslant\sigma(b)$,则$\pi(\gamma(b))>\sigma(\gamma(b))$,如果$\pi(b)>\sigma(b)$,则$\pi(\gamma(b))\leqslant\sigma(\gamma(b))$。因此$\gamma: E\longrightarrow F$是双射。这表明,集合$B$中偶组($F$的元素)与奇组($E$的元素)一样多。因此集合$A$中偶组与奇组也一样多。

4.24 (1) 考虑$a_1, a_2, \cdots, a_m$的二进制写法,并在某些数的前面添加若干个0,使得每个a_i都写成长为k的二进数。现在构造由0和1组成的$m x k$长方形表:对每个$i=1, 2, \cdots, m$,表中第i行是a_i的长为k的二进数;表中第j列是$a_1, a_2, \cdots, a_m$的二进数中自左至右的第j个数字,表中两个列称为相同的,如果这两列上每一行两个数字都相同。因为每一列有m个数字,所以在k个列中,所有不同的不全为0的列之列数不超过2^m-1。从k个列中取出n个不同的不全为零的列$C_{j1}, C_{j2}, \cdots, C_{jn}$,并让$C_{jl}$对应一个二进数$b_l$:如果表中第$j$列$C_j=C_{jl}$,则$b_l$的(从左至右)第$j$个数字取1,否则取0, $l=1, 2, \cdots, n$。于是n个二进数$b_1, b_2, \cdots, b_n$便符合题中条件。事实上,对每个$j\in\{1, 2, \cdots, k\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$中至多有一个$b_l$,它的第$j$个数字为1。因此$B$的不同的非空子集对应着不同的和数。最后,设$a_i$的二进数中第$i_1, i_2, \cdots i_l$个数字为1,其他数字为0。则从$b_1, b_2, \cdots b_n$中取出第$i_1, i_2, \cdots, i_l$个位数上为1的那些数,这些数之和即为$a_i$的二进数, $i=1, 2, \cdots, m$。

(2) 对$N=a_1+a_2+\cdots+a_m$用归纳法,如果$N=1$,则$m=1$, $a_1=1$,此时可取$b_1=1$。假设结论对和小于N的所有数集合都成立,设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$是适合$a_1+a_2+\cdots+a_m=N$的数集合。如果$n\leqslant m$,集合$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$的所有非空子集都有不同的和,而且这些和数中含所有的$a_1, a_2, \cdots, a_m$,则B称为A的容许集。我们证明,对每个$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,容许集都存在。如果每个$a_1, a_2, \cdots, a_m$都是偶

数，则令 $a'_i=\frac{1}{2}a_i$, $i=1, 2, \cdots, m$。因为 $a'_1+a'_2+\cdots+a'_m=\frac{N}{2}<N$，所以由归纳假设，存在集合 $\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_m\}$ 的容许集 $\{b'_1, b'_2, \cdots, b'_n\}$，从而集合 $\{2b'_1, 2b'_2, \cdots, 2b'_n\}$ 是 $\{2a'_1, 2a'_2, \cdots, 2a'_m\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 的容许集，如果 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 至少含有一个奇数，不妨设 a_m 是这些奇数之最小者。当 a_i 为偶数时，令 $a'_i=\frac{a_i}{2}$，当 a_i 为奇数，$i\neq m$ 时，令 $a'_i=\frac{1}{2}(a_i-a_m)$。因为对某些 $i\neq j$，可能有 $a'_i=a'_j$，所以集合 $\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_{m-1}\}$ 至多含有 $m-1$ 个元素，而且其和满足

$$a'_1+a'_2+\cdots+a'_{m-1}\leqslant\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{2}\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}<N.$$

因此由归纳假设，集合 $\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_{m-1}\}$ 具有容许集 $\{b'_1, b'_2, \cdots, b'_k\}$。当 $i=1, 2, \cdots, k$ 时，取 $b_i=2b'_i$，而 $b_{k+1}=a_m$，得到集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$。下面证明，集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$ 即是集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 的容许集，首先集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$ 的元素个数 $k+1\leqslant m-1+1=m$。其次，b_{k+1} 是集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$ 中唯一的奇数，且集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$ 的所有非空子集具有不同的和。事实上，设某两个非空子集具有相同的和。如果和是偶数，则这两个子集都不含 b_{k+1}，因此将这两个子集中的元素都除以 2，便得到集合 $\{b'_1, b'_2, \cdots, b'_k\}$ 的两个子集，且其和相同，与 $\{b'_1, b'_2, \cdots, b'_k\}$ 为容许集矛盾。如果和为奇数，则这两个子集都含有 b_{k+1}，因此这两个子集中删掉 b_{k+1} 后，就得到集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ 的两个子集，其和相同，也将导致矛盾，剩下来的是验证，每个 a_i, $1\leqslant i\leqslant n$ 都可表成集合 $\{b_1, b_2, \cdots b_{k+1}\}$ 的若干个不同元素之和，首先，a_m 本身即是这个集合的元素之和。其次，如果 $i<m$，且 a_i 为偶数，则有某些 $b'_1, \cdots, b'_p\in\{b'_1, b'_2, \cdots, b'_k\}$，使得 $\frac{a_i}{2}=a'_i=b'_1+\cdots+b'_p$，因此 $a_i=2b'_1+\cdots+2b'_p=b_1+\cdots+b_p$，如果 $i<m$，且 a_i 为奇数，则有某些 $b_1, \cdots, b_p\in\{b_1, b_2\cdots, b_k\}$，使得

$$a_i=a_m+2a'_i=b_{k+1}+2(b'_1+\cdots+b'_p)=b_{k+1}+b_1+\cdots+b_p.$$

结论证毕。

4.25 设题中所说的集合M存在。用 m_k 表示集合M中不超过 $k\in N$ 的数的个数，则适合 $10<a\leqslant k$ 的 $a\in M$ 的个数为 m_k-m_{10}，而且由这些数构成的不同数对之个数为

$$C^2_{m_k-m_{10}}=\frac{1}{2}(m_k-m_{10})(m_k-m_{10}-1).$$

让上述每对数 $a>b$ 与它们的差 $a-b$ 对应。注意，所有的差是互不相同的，否则设 $a>b$ 与 $c>d$ 具有相同的差 $a-b=c-d$，即 $a+d=c+b$，则由条件(2)，有 $a=b$，或 $a=c$，前者与 $a>b$ 相矛盾，后者与 $a>b$ 和 $c>d$ 为不同数对相矛盾。因为所有的差都小于 k，因此

$$k>C^2_{m_k-m_{10}}>\frac{1}{2}(m_k-m_{10}-1)^2.$$

但是 $m_{10}\leqslant10$，因此对任意 $k=11, 12, \cdots$，都有

$$m_k<\sqrt{2k}+m_{10}+1\leqslant\sqrt{2k}+11.$$

其次由条件(1)，任意 $n\in\{2, 3, \cdots, 2k\}$ 都可表为集合M中某两数之和，而且这两个数要么都不超过 k，要么恰有一个大于 ak 但小于 $2k$。因此所有这种数对的个数既不小于 $2k-1$，也不大于

$$\frac{1}{2}m_k(m_k-1)+m_k(m_{2k}-m_k)$$
$$=\frac{1}{2}m_k(2m_{2k}-m_k-1)\leqslant\frac{1}{2}m_k(2m_{2k}-m_k).$$

于是对 $k>10$，有 $m_k(2m_{2k}-m_k)\geqslant4k-2$。由于

$$m_{2k}<\sqrt{4k}+11=\alpha,\ m_k<\sqrt{2k}+11=\beta<\alpha,$$

所以

$$4k-2\leqslant m_k(2\alpha-m_k)=(\alpha-(\alpha-m_k))(\alpha+(\alpha-m_k))$$
$$=\alpha^2-(\alpha-m_k)^2\leqslant4k+44\sqrt{k}+121-k(2-\sqrt{2})^2,$$

即有 $k(2-\sqrt{2})^2-44\sqrt{k}-123\leqslant0$。因此对所有 $k>0$，二次三项式 $f(\sqrt{k})=k(2-\sqrt{2})^2-44\sqrt{k}-123$ 只能取非正值，不可能。这表明，满足题中条件的集合M不存在。

4.26 设结论不真，且集合 S 分为两组 A 和 B，其中 $1\in A$。如果 $2\in A$，则 $1, 2, 2-1\in A$，不可能。因此，$2\in B$。如果 $4\in B$，则 $2, 4, 4-2\in B$，不可能。因此，$4\in A$。如果 $3\in A$，则 $1, 4, 3=4-1\in A$，不可能。因此，$3\in B$。于是，由于 $1, 4\in A$，所以 $5\in B$，又因为 $2, 3\in B$，所以 $5\in A$。矛盾，因此结论成立。

4.27 设 $n\geqslant 3^5$，则 $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\in S_n$。设集合 S_n 分为两组 A 和 B，$3\in A$，且 A 和 B 不满足题中条件。如果 $3^2\in A$，则 $3, 3, 3^2\in A$，不可能。因此 $3^2\in B$。如果 $3^4\in B$，则 $3^2, 3^2, 3^4\in B$，不可能，因此，$3^4\in A$。如果 $3^3\in A$，则 $3, 3^3, 3^4=3\cdot3^3\in A$，不可能。因此，$3^3\in B$。于是，由于 $3, 3^4\in A$，所以 $3^5\in B$，又因为 $3^2, 3^3\in B$，所以 $3^5\in A$，矛盾。这表明，当 $n\geqslant 3^5$ 时，把集合 S_n 任意分为两组，总有某个组，具有题中性质，即所求最小值 $n_0\leqslant 3^5$。另一方面，取 $n=242$，且设

$$A=\{k\,|\,9\leqslant k\leqslant 80\},$$
$$B=\{k\,|\,3\leqslant k\leqslant 8 \text{ 或 } 81\leqslant k\leqslant 242\}.$$

则 $S_{242}=A\cup B$，而且 A 和 B 都不具有题中性质。当 $n<242$ 时，将 S_n 分为两组 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$。则 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$ 也都不具有题中性质，这表明，$n_0>242=3^5-1$。于是所求的 $n_0=243$。

注： 上述两题有深刻的图论背景。

4.28 设所有由正整数 $1, 2, \cdots, 1986$ 中 18 个数构成的算术级数集合为 M。设 $\alpha\in M$ 的首项为 a，公差为 d，则 $1\leqslant a\leqslant 1969$，而且 $1\leqslant d\leqslant\left[\dfrac{1986-a}{17}\right]$。对给定的正整数 a，$1\leqslant a\leqslant 1969$，当 d 取 $1, 2, \cdots, \left[\dfrac{1986-a}{17}\right]$ 中一个值时，便可得到一个首项为 a、公差为 d 的算术级数 $\alpha\in M$。因此 M 中首项为 a 的算术级数的个数为 $\left[\dfrac{1986-a}{17}\right]$。于是 M 中所含的算术级数的个数 A 为

$$A=\sum_{a=1}^{1969}\left[\frac{1986-a}{17}\right]\leqslant\sum_{a=1}^{1969}\frac{1986-a}{17}$$
$$\leqslant\frac{1}{17}(1986\times1969-985\times1969)<115940.$$

设 $\alpha\in M$，则 $1, 2, \cdots, 1986$ 中除出现在 α 的 18 个数外有 1968 个数，每个数有二种可能的染色方法。因此使 α 为单色算术级数的染色方法有 2^{1968} 种。由于 M 中共有 A 个 18 个项的算术级数，而一种染色方法可能染出两个以上的单色算术级数，因此染出 18 个项的单色算术级数的染色方法至多为 $A\cdot2^{1968}<115940\cdot2^{1968}$。另一方面，用两种方法染 1986 个数的所有染色方法种数为 2^{1986}。由于

$$2^{1986}-2^{1968}\cdot115940=(2^{18}-115940)2^{1968}=(262144-115940)2^{1968}>0,$$

所以至少有一种染色方法，使得二染色的正整数 $1, 2, \cdots, 1986$ 中不含 18 个项的算术级数。

4.29 可用 4.26 的证明方法证明。这里另给一种构造性的证明方法。我们证明更强的结论：可以用四种颜色染正整数 $1, 2, \cdots, 2916$，使得它不含 10 个项的单色算术级数。把正整数 $1, 2, \cdots, 2916=2^2\cdot3^2\cdot9^2$ 按自然顺序分为 9 个行，每行 36 个区组，每个区组含 9 个数，列表如下：

	c_1	c_2		c_1	c_2	c_3	c_4		c_3	c_4
1	1, 2, …, 9	10, 11, …, 18	…					…		
2			…					…		
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
9			…					…		
	1	2	…	17	18	19	20	…	35	36

把每行前18个区组中奇数区组里每个数都染第一种颜色C_1，偶数区组里每个数都染颜色C_2。在后18个区组中奇数区组里每个数都染颜色C_3，偶数区组里每个数都染颜色C_4。下面用反证法证明，在这种染法下，正整数1, 2, …, 2916中不含10个项的单色算术级数，设$\alpha=\{a, a+d, \cdots, a+9d\}$是单色算术级数。因为表中共有9个行，因此$\alpha$中必有两个相邻的数$a+id$和$a+(i+1)d$在同一行。但同一行上同色的两个数之差至多为$17\times9-1$，因此$d\leqslant17\times9-1$。如果$\alpha$中有两个相邻的数$a+jd$和$a+(j+1)d$在不同行上，则同色的两个数$a+jd$和$a+(j+1)d$之间至少相隔有19个区组，所以$d\geqslant19\times9+1$，不可能；如果$\alpha$中所有的数在同一行，则因每个区组只有9个数，所以$\alpha$中至少有两个相邻的数$a+kd$和$a+(k+1)d$在不同的区组，从而$d\geqslant10$。另一方面，$\alpha$中有10个数，每行有9个同色区组，因此至少有两个相邻的数$a+ld$和$a+(k+1)d$在同一个区组，从而$d\leqslant8$，矛盾。结论证毕。

§5 数的各种性质

5.1 因为$a, b, c\in Q$，所以

$$d=\frac{a-b}{c}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

为有理数。从而

$$\sqrt{a}=\frac{c+d}{2},\quad \sqrt{b}=\frac{c-d}{2}$$

也是有理数。

5.2 取正数$a=\sqrt{2}$，$b=\log_{\sqrt{2}}3$。则$a^b=\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}}3}=3$为自然数。显然$a$为无理数。下面证明$b$也是无理数。否则，设$b=\frac{p}{q}$，其中$p, q\in N$，则$\frac{p}{q}=2\log_2 3$，即$2^p=3^{2q}$。不可能。

5.3 设$k\in N$满足$2^k\leqslant n<2^{k+1}$，M表示所有不超过n的奇数之乘积。将和$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$的每个被加项都乘以$2^{k-1}M$。注意，任意$m\in N$都可表为$m=2^p q$，其中$p\in Z^+$，$q$为奇数，而且如果$m\leqslant n$，则$q=\frac{m}{2^p}\leqslant n$。如果$m\neq2^k$，则当$p>k$时，$m=2^p q\geqslant2^{k+1}>n$，当$p=k$时，$q\neq1$，且$m=2^k q\geqslant2^k\cdot3>2^{k+1}>n$，因此如果$2^k\neq m\leqslant n$，则$p<k$。所以，当$m=1, 2, \cdots, n$，且$m\neq2^k$时$a_m=\frac{1}{m}2^{k-1}M$都是整数。从而

$$S\cdot2^{k-1}M=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

不是整数，于是S也不是整数。

5.4 自1至1986的所有自然数中，被3^6整除的只有两个：$729=3^6$，$1458=2\cdot3^6$，而其他各数的素因子分解式中，3的幂指数至多是5。所以当$1\leqslant m<n<1986$时，所有的乘积mn中，除$729\times1458=2\times3^{12}$除，含有因数3的方幂的最高指数是11。于是，如果把所有形如$\frac{1}{mn}$的数$\left(除\frac{1}{729\cdot1458}外\right)$通分，然后求和，便得到一个形如$\frac{a}{3^{11}\cdot b}$的数，其中$a, b\in N$，且$b$不被3整除。因此如果所考虑的和记作$S$，则

$$S-\frac{a}{3^{11}b}=\frac{1}{2\cdot3^{12}},$$

经整理得到，$2\cdot3^{12}\cdot Sb-6a=b$。如果$S$为整数，则上式左端被3整除，但右端不被3整除，矛盾，因此S不是整数。

5.5 注意，如果$n\in N$合乎题中条件，则$2n+2$与$2n+9$也是。事实上，如果$n=a_1+a_2+\cdots+a_k$，其中$a_1, a_2, \cdots, a_k\in N$，且

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=1,$$

则

$$2n+2=2a_1+2a_2+\cdots+2a_k+2,$$

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

并且

$$2n+9=2a_1+2a_2+\cdots+2a_k+3+6,$$
$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,$$

现在归纳证明，所有自然数 $n\geqslant 33$ 都合乎题中条件。首先，直接验证可知，自然数 33, 34, …, 73 都合乎题中条件，设自 33 至 $n-1$ 的所有自然数都合乎条件，$n>73$。如果 n 为偶数，则它可表为 $2m+2$，如果 n 为奇数，则 n 可表为 $2m+9$，其中 $m\in N$，且 $n>m\geqslant\frac{74-9}{2}>32$。由上面的证明可知，在这两种情形下，$n$ 都合乎条件，因为由归纳假设，m 合乎条件，证毕。

5.6 因为 n 的二进制写法中恰有三个数字为 1，其余数字为 0，所以它可以表为 $n=2^k+2^l+2^m$，其中 $k, l, m\in Z^+$，且 $k<l<m$。如果 n 的二进制写法中 0 的个数小于 6，则 $m\leqslant 7$，且因为当 $i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 时，2^i 被 17 除的余数依次为 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8，经直接验证，其中任意三个不同的数之和都不被 17 整，所以 $n\not\equiv 0 \pmod{17}$，矛盾。因此在 n 的二进制写法中至少有 6 个 0。如果 n 的二进制写法中恰有 7 个 0，则 $m=9$。如果 n 为奇数，则 $k=0$，从而 $2^k+2^m\equiv 3 \pmod{17}$，但由于任意 $l\in\{1, 2, \cdots, 8\}$ 都不满足 $2^l\equiv -3 \pmod{17}$，所以 $n=2^k+2^l+2^m$ 不是 17 的倍数，矛盾。因此 n 为偶数。这样的数确实存在，比如 $n=2^1+2^6+2^9=578$ 即是一例。

5.7 用 $f(m)$ 表示 $m\in N$ 的十进制写法中数字的个数。则对所求的 n，$f(n^3)+f(n^4)=10$，且 $f(n^3)\geqslant 4$，否则 $n^3<1000$，即 $n<10$，从而 $n^4<100000$，因此

$$f(n^3)+f(n^4)<4+5<10,$$

不可能。于是 $f(n^3)=4$，$f(n^4)=6$，其次，由于 $n^3<10000$，而 $22^3>10000$，所以 $n<22$。同样，由于 $n^4\geqslant 100000$，而 $17^4<100000$，所以 $n>17$。于是 $18<n<21$。由于任意自然数都与它的十进制写法中数字之和模 9 同余，所以 $n^3+n^4\equiv(0+1+2+\cdots+9) \pmod 9$， 因此 $n^3(n+1)\equiv 0 \pmod 9$。$n=19$ 与 20 不合这个条件，而 21^3 与 21^4 的末位数字都是 1，所以 $n=21$ 也不合要求。最后，经直接验证，$18^3=5832$，$18^4=104976$，即只有 $n=18$ 合乎题中条件。

5.8 设 n 为所求的数，分别用 S 与 k 是它的十进制写法中数字之和与个数。则 $S^5=n^2$，$S\leqslant 9k$，$n\geqslant 10^{k-1}$。因此，$9^5k^5\geqslant S^5\geqslant 10^{2k-2}$。记 $a_k=\frac{9^5k^5}{10^{2k-2}}$。因为对每个 $k\in N$，都有

$$\frac{9^5(k+1)^5}{9^5k^5}=\frac{(k+1)^5}{k^5}\leqslant 2^5<10^2=\frac{10^{2(k+1)-2}}{10^{2k-2}}.$$

所以 $a_{k+1}<a_k$，即数列 $\{a_k\}$ 是递减的。又因为 $a_6<1$，所以对所有 $k\geqslant 6$，都有 $9^5k^5<10^{2k-2}$。这表明，k 不大于 5，因此 $S\leqslant 9\cdot 5=45$。由于 $S^5=n^2$，所以在 S^5（因而也在 S）的素因子分解中所有素因数都应有偶次幂。所以 S 只能是 1, 4, 9, 16, 25 或 36。直接计算表明，只有当 $S=1$ 与 9 时，$n=\sqrt{S^5}$ 的各数字之和为 S。因此合乎题中条件的只有 $n=1$ 与 $n=243$。

5.9 设 $m, n\in Z$，$m<n\leqslant 100$，且分数 $\frac{m}{n}$ 的十进制表示为

$$\frac{m}{n}=0.a_1a_2\cdots a_k\,167\,a_{k+1}\cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+4}, \cdots\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$。记 $p=10^k\frac{m}{n}$，则 $p-[p]=0.167a_{k+4}\cdots$。因此，

$$0.167\leqslant\frac{10^km-[p]n}{n}<0.168,$$

又记 $q=10^k m-[p]n\in Z$，则

$$1.002\leqslant\frac{6q}{n}<1.008.$$

因此
$$0<0.002\leqslant\frac{6q}{n}-1=\frac{6q-n}{n}<0.008<\frac{1}{100}.$$

由此得到，

$$0<6q-n<\frac{n}{100}\leqslant1,$$

即 $6q-n$ 不是整数，与 $q,n\in Z$ 矛盾，证毕。

5.10 设201人中分数为 k 的有 a_k 人，$k=0,1,\cdots,100$。则 $a_0+a_1+\cdots+a_{100}=201$。显然，这201人中无3人的分数相同的必要且充分条件是，对每个 k，$k=0,1,\cdots,100$，均有 $0\leqslant a_k\leqslant2$。设201人中无3人的分数相同，则 $0\leqslant2-a_k\leqslant2$，其中 $0\leqslant k\leqslant100$。由于 $1=202-201=(2-a_0)+(2-a_1)+\cdots+(2-a_{100})$，所以必有某个 i，$0\leqslant i\leqslant100$，使得 $2-a_i=1$，即 $a_i=1$，而当 $j\neq i$ 时，$a_j=2$。因此201人的总分 s 为

$$S=\sum_{k=0}^{100}ka_k=\sum_{k=0}^{100}2k-\sum_{k=0}^{100}k(2-a_k)=10100-i.$$

从而 $10000\leqslant S\leqslant10100$，其中当且仅当 $i=100$，即1人得100分，2人得0分时左端等式成立，即得(3)，而当且仅当 $i=0$，即1人得0分，2人得100分时右端等式成立，即(4)得证。对(1)，由于201人的总分 $9999<10000\leqslant S$，所以其中必有3人的分数相同。同样，对于(2)，由于201人的总分 $10101>10100\geqslant S$，所以其中也必有3人的分数相同。

5.11 否则，设有 $m,n,k\in N$，使得 $2^{2^n}+1=m^5-k^5$。因为

$$m^5-k^5=(m-k)(m^4+m^3k+m^2k^2+mk^3+k^4)$$

是素数，所以 $m-k=1$，而且

$$2^{2^n}+1=(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1.$$

因此 $2^{2^n}=5(k^4+2k^3+2k^2+k)$ 被5整除，不可能。证毕。

5.12 设有某个 $n\in N$，使得 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是整数的立方。注意，因为 2^n-1 不被2整除，所以乘积中2的幂指数为 $n-1$。因此 $n-1=3k$，即 $n=3k+1$，其中 $k\in Z^+$。但是

$$2^{n+1}-1=2^{3k+2}-1\equiv4(7+1)^k-1\equiv3(\mathrm{mod}\ 7),$$

而任意整数的立方被7除的余数只能是0，1或6：

$$(7m)^3\equiv0(\mathrm{mod}\ 7),\ (7m\pm1)^3\equiv\pm1(\mathrm{mod}\ 7),$$
$$(7m\pm2)^3\equiv\pm1(\mathrm{mod}\ 7),\ (7m\pm3)^3\equiv\mp1(\mathrm{mod}\ 7).$$

因此 $2^{n+1}-1$ 不能是整数的立方，于是对任意 $n\in N$，$2^{n+1}-1$ 与 $2^{n-1}(2^n-1)$ 不能同时是整数的立方。

5.13 只需证明，由 $n\sqrt{7}-m>0$ 可以推出 $n\sqrt{7}-m>\frac{1}{m}$，其中 $m,n\in N$。如果 $n\sqrt{7}-m=1$，则 $\sqrt{7}=\frac{1+m}{n}$ 为有理数，不可能。设 $0<n\sqrt{7}-m<1$。注意，因为 m^2 被7除的余数不能是6或5事实上，

$$(7k)^2\equiv0(\mathrm{mod}\ 7),\ (7k\pm1)^2\equiv1(\mathrm{mod}\ 7),$$
$$(7k\pm2)^2\equiv4(\mathrm{mod}\ 7),\ (7k\pm3)^2\equiv2(\mathrm{mod}\ 7).$$

所以 $7n^2-m^2=(n\sqrt{7}-m)(n\sqrt{7}+n)$ 不能是1或2，因此 $7n^2-m^2\geqslant3$。由于

$$3m\geqslant2m+1>2m+(n\sqrt{7}-m)=n\sqrt{7}+m,$$

所以 $n\sqrt{7}-m\geqslant\frac{3}{n\sqrt{7}+m}>\frac{1}{m}$。证毕。

5.14 首先证明，$m=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}$ 是整数，并求出它的最后一位数字。记

$$a_n=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n.$$

设 $\alpha=(5+2\sqrt{6})^n$，$\beta=(5-2\sqrt{6})^n$，则

$$a_n=\alpha+\beta,\ a_{n+1}=(5+2\sqrt{6})\alpha+(5-2\sqrt{6})\beta,$$
$$\begin{aligned}a_{n+2}&=(5+2\sqrt{6})^2\alpha+(5-2\sqrt{6})^2\beta=(49+20\sqrt{6})\alpha+(49-20\sqrt{6})\beta\\&=(50+20\sqrt{6})\alpha+(50-20\sqrt{6})\beta-(\alpha+\beta)=10a_{n+1}-a_n.\end{aligned}$$
所以对任意 $n\in Z^+$，$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$。因为 $a_0=2$，$a_1=10$ 为整数，所以当 $n\in Z^+$ 时，$a_n\in Z$。另外 $a_n+a_{n+2}=10a_{n+1}$ 被 10 整除，因此 $a_{n+4}-a_n=(a_{n+4}+a_{n+2})-(a_{n+2}+a_n)$ 也被 10 整除。这表明，$a_2, a_6, a_{10}, \cdots, a_{990}$ 被 10 除的余数相同。由于 $a_2=98$，所以 $m=a_{990}$ 的十进制写法中末位数字为 8。最后由于
$$m=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}>(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}>m-0.5^{1980}>m-0.1,$$
所以$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}$ 的十进制写法中个位数(小数点左侧)为 7，而十分位数(小数点右侧)为 9。

5.15 由牛顿二项式定理，对给定的 $m,n\in N$，有
$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\sqrt{m})^{n-i}(\pm\sqrt{m-1})^i.$$
当 $n=2j$，$j\in N$ 时，
$$\begin{aligned}(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n&=\sum_{i=0}^{j}C_n^{2i}(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\\&\quad\pm\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i+1}(\sqrt{m-1})^{2i-1}\\&=\sum_{i=0}^{j}C_n^{2i}m^{j-i}(m-1)^i\pm\sqrt{m(m-1)}\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}m^{j-i}(m-1)^{i-1}\\&=a\pm b\sqrt{m(m-1)},\end{aligned}$$
其中 $a,b\in Z^+$。当 $n=2j-1$，$j\in N$ 时，
$$\begin{aligned}(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n&=\sum_{i=0}^{j-1}C_n^{2i}(\sqrt{m})^{2j-1-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\\&\quad\pm\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i-1}\\&=\sqrt{m}\sum_{i=0}^{j-1}C_n^{2i}m^{j-i-1}(m-1)^i\pm\sqrt{m-1}\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}m^{j-i}(m-1)^{i-1}\\&=c\sqrt{m}\pm d\sqrt{m-1},\end{aligned}$$
其中 $c,d\in Z^+$。总之有
$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}\pm\sqrt{l},$$
其中 $k,l\in Z^+$，并且
$$\begin{aligned}k-l&=(\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{k}-\sqrt{l})=(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})^n\\&=((\sqrt{m})^2-(\sqrt{m-1})^2)^2=1,\end{aligned}$$
所以 $l=k-1$，且
$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}.$$
证毕。

5.16 取整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，并让每个数对 $x,y\in[0,1)$ 对应于数对 u,v，其中 $u=[Nx]$，$v=[Ny]$。如果两个数对(x_1,y_1)与(x_2,y_2)对应于同一个数对(u,v)，则
$$\begin{aligned}|x_1-x_2|&=\left|\frac{1}{N}(u+\{Nx_1\})-\frac{1}{N}(u+\{Nx_2\})\right|\\&=\frac{1}{N}|\{Nx_1\}-\{Nx_2\}|<\frac{1}{N}<\varepsilon,\end{aligned}$$
同理，$|y_1-y_2|<\varepsilon$。因为 $u,v\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$，所以不同数对 (u,v) 的个数为 N^2。考虑由 N^2+1 个数对 $x=\{la\}$，$y=\{lb\}$，$l=0,1,2,\cdots,N^2$ 的集合。由狄利克雷原理(定理 1)，这个集合中至少有两个数对(例如取 $l=i$ 与 $l=j$，$l>j$)对应于同一个数对(u,v)。记 $n=i-j$，$k=[ia]-[ja]$，$m=[ib]-[jb]$，便得到所需的不等式：
$$|na-k|=|(ia-[ia])-(ja-[ja])|=|\{ia\}-\{ja\}|<\varepsilon,$$

$$|nb-m|=|(ib-[ib])-(jb-[jb])|=|\{ib\}-\{jb\}|<\varepsilon.$$

注： 上述证明的几何意义是：设坐标平面上的正方形 $K=\{(x,y)|0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1\}$ 被分为 N^2 个边长为 $\frac{1}{N}$ 的小正方形，则在上述证明中，两个数对 x_1，y_1 与 x_2，y_2 对应于同一个整数对 u，v 的必要且充分条件是，点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 落在同一个小正方形里。

5.17 我们证明，对任意 $k\in N$，有无限多个 $m\in N$，使得 $5^m\equiv1 \pmod{2^k}$，事实上，由狄利克雷原理，在 5^0，5^1，5^2，…，5^{2^k} 中至少有两个 5^p 与 5^q，$p>q$，它们被 2^k 除的余数相同。于是它们的差 $5^p-5^q=5^q(5^{p-q}-1)$ 被 2^k 整除。因而 $5^{p-q}-1$ 以及 $5^{r(p-q)}-1$，$r\in N$，都被 2^k 整除，于是对每个 $m=r(p-q)$，$r\in N$，

$$5^m\equiv1 \pmod{2^k},\ 5^{m+k}\equiv5^k \pmod{10^k},$$

即 5^{m+k} 的末尾 k 个数字构成 5^k 的十进制表示。取 $k\in N$，使得 $2^k>10^{1976}$，则

$$5^k=\frac{10^k}{2^k}<10^{k-1976},$$

即 5^k 的十进制写法中至多含有 $k-1976$ 个数字。因此 5^{m+k} 的末尾 k 个数字中，非零的数字只能是最后那 $k-1976$ 个，而其余(接连出现的)1976 个数字都是 0。结论证毕。

5.18 首先，对 $j\in Z^+$ 用归纳法证明，$5^{2^j}-1$ 被 2^{j+2} 整除，但不被 2^{j+3} 整除。当 $j=0$ 时，$5^{2^0}-1=4$，结论正确。设对某个 $j\geqslant0$，$5^{2^j}-1$ 被 2^{j+2} 整除，但不被 2^{j+3} 整除。则因 $5^{2^j}+1\equiv(4+1)^{2^j}+1\equiv2 \pmod 4$，故 $5^{2^{j+1}}-1\equiv(5^{2^j}-1)(5^{2^j}+1)$ 被 2^{j+3} 整除，但不被 2^{j+4} 整除。再对 $m\in N$ 用归纳法证明题中结论成立。当 $m=1$ 时，由于有无限多个 $n\in N$，使得 5^n 的十进制写法中最后一个数字 5（奇数）与其最后第二个数字 2（偶数）相邻，所以结论对 $m=1$ 成立。设结论对某个 $m\geqslant1$ 成立，即有无限多个 $n\in N$，使得 5^n 的末尾 $m+1$ 个数字交替变换奇偶性。设 5^n 即是其中一个，且 $5^n>10^{m+2}$，现在构造 5^k，使它的末尾 $m+2$ 个数字交替变换奇偶性。如果上面取定的 5^n 的（自右算起的）第 $m+2$ 位与第 $m+1$ 位数字的奇偶性不同，则取 $k=n$。否则取 $k=n+2^{m-1}$，则

$$5^{k-(m+2)}-5^{n-(m+2)}\equiv5^{n-(m+2)}(5^{2^{m-1}}-1)\equiv2^{m+1} \pmod{2^{m+2}}.$$

因为 $5^{2^{m-1}}-1$ 被 2^{m+1} 整除，但不被 2^{m+2} 整除，所以 $5^k-5^n\equiv5\cdot10^{m+1} \pmod{10^{m+2}}$。这表明，$5^k$ 与 5^n 的末尾 $m+1$ 个数字完全相同，但它们的（自右算起的）第 $m+2$ 位数字的奇偶性不同。这样，第 $m+2$ 位与第 $m+1$ 位数字的奇偶性不同的数 5^k 便构造出来了（并且由于只要求 k 适合 $5^k\geqslant5^n$，所以这样的 5^k 有无限多个）。所以结论对 $m+1$ 成立。

5.19 只需证明，$0.a_1a_2a_3\cdots$ 是循环小数。把 100 个数 $(n+1)^2$，$(n+2)^2$，…，$(n+100)^2$ 排成下表：

$$(n+1)^2,\ (n+2)^2,\ \cdots,\ (n+10)^2,$$
$$(n+11)^2,\ (n+12)^2,\ \cdots,\ (n+20)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+91)^2,\ (n+92)^2,\ \cdots(n+100)^2.$$

由于 k^2 与 $(k+10)^2$ 的个位数字相同，所以表中每一列的十个数的个位数都相同，它们的和必是 10 的倍数，即个位数字为 0。因此将这 100 个数相加，其和的个位数字也是 0。于是，对任意 $n\in N$，都有 $a_{n+100}=a_n$，这就证明 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 为循环小数，(即是有理数)，而且循环节的长 n_0 是 100 的因数。

注： 如果具体考察前 20 个自然数相应的 a_n 的变化规律，还可以求出 $n_0=20$。

5.20 用 x_1 与 x_2 表示矩形内某一点 P 到两条对边的距离，用 y_1 与 y_2 表示 P 到另一组对边的距离，则由条件，矩形的边长 $A=x_1+x_2$ 与 $B=y_1+y_2$ 为奇数。设有 a_{11}，a_{12}，a_{21}，$a_{22}\in Z$，使得 $x_i^2+y_j^2=a_{ij}^2$，i，$j=1$，2，下同此。记 $u_i=x_iA\cdot B$，$v_j=y_jA\cdot B$，则

$$u_1-u_2=(x_1-x_2)A\cdot B=(x_1^2-x_2^2)B=((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_1^2))B$$
$$=(a_{11}^2-a_{21}^2)B=C,$$
$$u_1+u_2=(x_1+x_2)A\cdot B=A^2\cdot B=D.$$

同理，$v_1-v_2=(a_{11}^2-a_{12}^2)A=E$，$v_1+v_2=A\cdot B^2=F$。最后有，

$$u_i^2+v_j^2=(x_i^2+y_j^2)A^2\cdot B^2=a_{ij}^2A^2\cdot B^2=b_{ij}^2.$$

注意，C, E 与 b_{ij} 为整数，而D与F为奇数。设所有的 u_i, v_j 为整数，则因为 u_1+u_2 为奇数，故 u_1, u_2 有一个为奇数。同理，v_1, v_2 也有一个为奇数，用 u 与 v 表示这两个奇数，再用 b^2 表示它们的平方和，则有 $u^2\equiv 1(\bmod 4)$, $v^2\equiv 1(\bmod 4)$且 $u^2+v^2=b^2$，与 $b^2\not\equiv 2(\bmod 4)$ 矛盾。这表明，u_i, v_j 不全是整数。因此 $U_i=2u_i=D\pm C$, $V_j=2v_j=F\pm E$ 至少有一个是奇数。不妨设这个奇数为 U_1（其他情形仿此讨论）。则由 $u_1^2+v_1^2=b_{11}^2$ 得到，$U_1^2+V_1^2=4b_{11}^2$。但这是不可能的，因为

$$U_1^2\equiv 1(\bmod 4),\ 4b_{11}^2\equiv 0(\bmod 4),\ 而 V_1^2\not\equiv 3(\bmod 4).$$

5.21 设题中所说的棱锥存在。用 g 表示其底面正方形的边长，用 h 表示棱锥的高，则棱锥的侧棱棱长、表面积与体积分别为

$$f=\sqrt{h^2+2\left(\frac{g}{2}\right)^2},\quad s=g^2+2g\sqrt{h^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2}.$$

$$v=\frac{1}{3}g^2h.$$

因为 g, f, s, $v\in N$，所以 $x=g^3$, $y=6v$, $z=g(s-g^2)$, $u=2g^2f$ 都是自然数，且

$$x^2+y^2=g^6+36v^2=4g^4\left(\left(\frac{g}{2}\right)^2+h^2\right)=g^2(s-g^2)^2=z^2,$$

$$x^2+z^2=g^6+4g^4\left(h^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2\right)=4g^4\left(h^2+2\left(\frac{g}{2}\right)^2\right)=u^2.$$

于是方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ x^2+z^2=u^2\end{cases}$$

有自然数解。取其中一个解 (x_0, y_0, z_0, u_0)，使得 x_0 是所有解中 x 的最小值。则 x_0, y_0, z_0, u_0 两两互素。事实上，如果其中某两个同时被某个素数 p 整除，则由

$$x_0^2+y_0^2=z_0^2,\ x_0^2+z_0^2=u_0^2,\ y_0^2+u_0^2=2z_0^2$$

可知，另两个数也被 p 整除。于是，

$$\left(\frac{x_0}{p},\ \frac{y_0}{p},\ \frac{z_0}{p},\ \frac{u_0}{p}\right)$$

也是方程组的解，而且 $\frac{x_0}{p}<x_0$，与 x_0 的选取矛盾。另外，因为 f 为自然数，所以 g 为偶数，因此 x_0 为偶数，从而 y_0, z_0, u_0 为奇数。于是由 $x_0^2=z_0^2-y_0^2$ 得到，

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2=\frac{z_0+y_0}{2}\cdot\frac{z_0-y_0}{2}.$$

如果自然数 $\frac{z_0+y_0}{2}$ 和 $\frac{z_0-y_0}{2}$ 不是互素的，则

$$(z_0, y_0)=(z_0, z_0-y_0)\geqslant\left(z_0, \frac{z_0-y_0}{2}\right)=\left(z_0-\frac{z_0-y_0}{2}, \frac{z_0-y_0}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{z_0+y_0}{2}, \frac{z_0-y_0}{2}\right)>1,$$

即 z_0 和 y_0 不是互素的，不可能。因此，$\frac{z_0+y_0}{2}$ 和 $\frac{z_0-y_0}{2}$ 互素，从而 $\frac{z_0+y_0}{2}$ 和 $\frac{z_0-y_0}{2}$ 分别是某两个互素的数 k, $l\in N$ 的平方。所以 $x_0=2kl$, $y_0=k^2-l^2$, $z_0=k^2+l^2$。同理，由 $x_0^2=u_0^2-z_0^2$ 得到，$x_0=2mn$, $z_0=m^2-n^2$, $u_0=m^2+n^2$，其中 m, $n\in N$。于是得到方程组

$$\begin{cases}kl=mn\\ k^2+l^2=m^2-n^2.\end{cases}$$

记$(k, m)=a$，则 $k=ab$, $m=ac$，其中 a, b, $c\in N$，且$(b, c)=1$。由于 $kl=mn$，所以 $abl=acn$，即 $bl=cn$，且 $l=cd$，其中 $d\in N$(因为 $c|bl$，且 $(b, c)=1$)。从而 $bcd=cn$，故 $n=bd$，又由 $1=(k, l)=(ab, cd)$可得，$(a, d)=1$。其次有 $a^2b^2+c^2d^2=a^2c^2-b^2d^2$。由此得到，$(a^2+d^2)(b^2+c^2)=2a^2c^2$。因为 $(a^2+d^2, a^2)=(d^2, a^2)=1$，而且$(b^2+c^2, c^2)=(b^2, c^2)=1$，所以由上式得到，

$$\begin{cases} c^2+d^2=2c^2, \\ b^2+c^2=a^2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a^2+d^2=c^2 \\ b^2+c^2=2a^2. \end{cases}$$

由此分别得到，

$$\begin{cases} b^2+d^2=c^2, \\ b^2+c^2=a^2. \end{cases} \text{或} \begin{cases} d^2+b^2=a^2, \\ d^2+a^2=c^2. \end{cases}$$

从而得到，(b, d, c, a)和(d, b, a, c)中必有一个是(x_0, y_0, z_0, u_0)所满足的原方程组的解。因为$x_0=2mn=2\times bd$，所以$b<x_0$，且$d<x_0$，与x_0的选取矛盾。结论证毕。

5.22 先证明结论对$k=0, 1, \cdots, n-1$成立。构造一个次数不高于$n-1$次的多项式，使它在每个点a_i处取值为a_i^k，$i=1, 2, \cdots, n$。由拉格朗日插值公式(定理62)，这个多项式为

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i^k \prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i} \prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} (x-a_j),$$

其中x^{n-1}的系数为$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i}$。另一方面，多项式$p(x)$和多项式$x^k$相等，因此，当$k<n-1$时，$x^{n-1}$的系数为0，而当$k=n-1$时则为1。这就证明，对

$$k=0, 1, \cdots, n-1, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i}\text{都是整数。}$$

现在证明，如果对某个$k\geq n$，满足

$$\begin{cases} \frac{a_1^{k-1}}{p_1}+\frac{a_2^{k-1}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-1}}{p_n}=b_1, \\ \frac{a_1^{k-2}}{p_1}+\frac{a_2^{k-2}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-2}}{p_n}=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_1^{k-n}}{p_1}+\frac{a_2^{k-n}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-n}}{p_n}=b_n \end{cases}$$

的$b_1, b_2, \cdots, b_n\in Z$，则

$$b_0=\frac{a_1^k}{p_1}+\frac{a_2^k}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^k}{p_n}$$

也是整数。于是，由数学归纳法，所欲证的结论对每个$k\in N$成立。设多项式$x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$的根为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则由韦达定理，这个多项式的系数$c_1, c_2, \cdots, c_n$为整数，并且对每个$j=1, 2, \cdots, n$，有$a_j^n=-\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i}$。方程组中的方程依次乘以$c_1, c_2, \cdots, c_n$，然后求和，得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \frac{a_j^{k-i}}{p_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k-n}}{p_j} \sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k-n}}{p_j} a_j^n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^k}{p_j} = -b_0, \end{aligned}$$

即 $b_0=-\sum_{i=1}^{n} c_i b_i$为整数。这正是所要证明的。

5.23 设$p_1, p_2, \cdots, p_n$与$q_1, q_2, \cdots, q_n$是$2n$个不同的素数。由中国剩余定理(定理23)，存在$m\in N$，满足

$$m\equiv -k \pmod{p_k q_k},\ k=1, 2, \cdots, n.$$

即$m+k\equiv 0 \pmod{p_k q_k}$，$k=1, 2, \cdots, n$。于是，$n$个连续的自然数$m+1, m+2, \cdots, m+n$即为所求。

第二章　方程与不等式

§6　方程与方程组

6.1 $\frac{1}{3}$ 是原方程的解，我们证明，没有其它的解。当 $x>-\frac{1}{3}$ 时，函数 $y_1(x)=8^x$ 与 $y_2(x)=3x+1$ 都取正值，并且递增，所以它们的乘积(方程左端)也是递增函数，因此，在区间 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上方程至多有一个解。其次，当 $x\leqslant-\frac{1}{3}$ 时，$y_1(x)>0$，$y_2(x)\leqslant0$，因而 $y_1(x)y_2(x)\leqslant0$，于是在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 上方程无解。因此，原方程有唯一解 $x=\frac{1}{3}$。

6.2 记 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，如果 $a=b$ 或 $b=c$，则 $f(b)=(b-a)(b-c)=0$。如果 $a<b<c$，则 $f(b)<0$，而 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$。因为 $f(x)$ 是连续函数，所以存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$。

6.3 我们证明，$f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-16$ 恰在两个点上取零值。为此考察它的导数

$$f'(x)=4x^3+15x^2+12x-4=(x+2)^2(4x-1).$$

当 $x<-2$ 或 $-2<x<\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)<0$；而当 $x>\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)>0$。因此 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ 上递减，而在区间 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上递增。因为 $f(-10)>0$，$f(10)>0$ 且 $f\left(\frac{1}{4}\right)<f(0)<0$，所以函数 $f(x)$ 在上述两个区间上各有一次取零值，从而方程 $f(x)=0$ 恰有两个实数解。

6.4 方程 $a^x=x^b$ 等价于方程 $c^x=x$，其中 $c=a^{\frac{1}{b}}>1$。因为函数 $f(x)=c^x-x$ 的导数 $f(x)=c^x\ln c-1$ 当 $c^x>\log_c e$ 时为正的，而当 $c^x<\log_c e$ 时为负的，所以函数 $f(x)$ 在满足 $c^{x_0}=\log_c e$ 的点 $x_0>0$ 处有极小值。如果 $f(x_0)>0$，则原方程无解；如果 $f(x_0)=0$，则方程有唯一正数解 $x=x_0$；又如果 $f(x_0)<0$，则因为 $f(0)>0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，所以方程有两个解(在区间 $(0,x_0)$ 与 (x_0,∞) 上各有一解)。于是，原方程满足题目要求的必要且充分的条件是 $x_0=c^{x_0}=\log_c e$，即 $x_0=c^{\log_c e}=e$ 且 $c=e^{\frac{1}{e}}$。因此，所求的 a,b(且只有它们)满足 $a^e=e^b$，其中 $b>0$，即 $a=t$，$b=e\ln t$，其中 $t\in(1,\infty)$。此时方程的唯一正数解是 $x=e$。

6.5 将方程左端通分并整理得到

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)$$

$$=(a-1)\left(\frac{\cos x+\sin x+1}{\sin x\cos x}\right)=(a-1)\left\{\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}}\right\}.$$

即

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq\frac{1}{2}.$$

因此

$$\frac{2(a-1)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}=2$$

即
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

后一方程当 $|a|>\sqrt{2}$ 或 $|a|=1$ 时无解，而对其他的 a 有解。当 $|a|\in\{1\}\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 时原方程无解。当 $|a|\in[0,1)\cup(1,\sqrt{2}]$ 时，原方程有解，其解为

$$x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)-\frac{\pi}{4}+n\pi,$$

其中当 $|a|\in[0,1)\cup(1,\sqrt{2}]$ 时 $n\in Z$ 而当 $|a|=\sqrt{2}$ 时，$\frac{n}{2}\in N$。

6.6 将方程左端变形得

$$\begin{aligned}\cos^8 x+\sin^8 x&=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4\\&=\frac{1}{16}(2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x)\\&=\frac{1}{32}(4+12(1+\cos 4x)+(1+\cos 4x)^2)\\&=\frac{1}{32}(\cos^2 4x+14\cos 4x+17).\end{aligned}$$

因此得到与原方程等价的方程

$$\cos^2 4x+14\cos 4x=\frac{29}{4}$$

即
$$\left(\cos 4x+\frac{19}{2}\right)\left(\cos 4x-\frac{1}{2}\right)=0,\quad 或\ \cos 4x=\frac{1}{2}.$$

因为 $4x\in[0,2\pi]$，所以 $4x\in\left\{\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}\right\}$。因此得到原方程的解

$$x=\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}.$$

6.7 设对 A, B, 原方程组有解。由第一个方程得 $\cos Bx=-\cos Ax$, 因此 $\sin Bx=\varepsilon\sin Ax$, 其中 $\varepsilon\in\{-1,1\}$。由第二个方程得

$$(A+\varepsilon B)\sin Ax=0.$$

因为 A, $B\in N$, 且 $A\neq B$, 所以 $A+\varepsilon B\neq 0$。于是 $\sin Ax=0=\sin Bx$, 由此得到

$$Ax=k\pi,\ Bx=n\pi,\ k,\ n\in Z.$$

将这些 Ax 与 Bx 代入第一个方程可知，k 与 n 的奇偶性不同，消去 x 即得到 $Bk=An$。因为 k 与 n 的奇偶性不同，所以 A, $B\in N$ 的素因子分解式中 2 的指数不同。反之，如果 $A=2^l p$, $B=2^m q$, 其中 $l,m\in Z^+$, $l\neq m$, p, $q\in N$ 且 p, q 为奇数，则原方程有解 $x=\frac{\pi}{2^s}$，其中 $s=\min\{l,m\}$。

6.8 将方程组中的两个方程相加得到，对方程的任意一组解 x, y, 都有

$$\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\cos y\sin y}=2\quad 即\quad \frac{\sin(x+y)}{\sin 2y}=1,$$

因此
$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+3y}{2}\right)=0,$$

而且因为 x, $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $x=y$, 或者 $x+3y=\pi$。其次，由方程组中两个方程相减，得到

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin 2y}=\cos 2y\ 即\ \sin(y-x)=\frac{1}{2}\sin 4y.$$

如果 $x=y$, 则 $\sin 4y=0$, 因此 $y=\frac{\pi}{4}\left(因为\ y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, 于是 $x=y=\frac{\pi}{4}$。又如果 $x=\pi-3y$, 则

$$\sin(4y-x)=\frac{1}{2}\sin 4y \text{ 或 } -\sin 4y=\frac{1}{2}\sin 4y,$$

即 $\sin 4y=0$, 因此仍得到

$$y=\frac{\pi}{4}, \quad \text{且 } x=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

于是 $x=y=\frac{\pi}{4}$。经验证, $x=y=\frac{\pi}{4}$ 的确满足原方程组。

6.9 因为 $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$, 所以

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1)\leqslant 6.$$

其中等式仅当 $\sin(x-y)=1$ 且 $\cos(2x-y)=1$ 时成立。因此,方程等价于方程组

$$\begin{cases}\sin(x-y)=1,\\ \cos(2x-y)=1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}+2m\pi, & (m\in Z),\\ 2x-y=2n\pi, & (n\in Z).\end{cases}$$

由此得到原方程的解为

$$x=-\frac{\pi}{2}+2(n-m)\pi=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in Z,$$
$$y=(2(n-2m)-1)\pi=(2(k-m)-1)\pi=(2l+1)\pi,\ l\in Z.$$

6.10 设 $n=1$, 则

$$1=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

于是方程的解为 $x=2m\pi$, 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $m, k\in Z$。

设 $n=2$, 则

$$1=\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x=\cos(2x-x)=\cos x,$$

于是得到方程的解 $x=2m\pi$, $m\in Z$。

最后,设 $n>2$, 则

$$\begin{aligned}1&=\sin x\sin 2x\cdots\sin nx+\cos x\cos 2x\cdots\cos nx\\ &\leqslant|\sin x\sin 2x\cdots\sin nx|+|\cos x\cos 2x\cdots\cos nx|\\ &\leqslant|\sin x\sin 2x|+|\cos x\cos 2x|\\ &=\max\{|\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x|,\ |\sin x\sin 2x-\cos x\cos 2x|\}\\ &=\max\{|\cos x|,\ |\cos 3x|\}.\end{aligned}$$

因此, 如果某个 x 是原方程的解, 则 $|\cos 3x|=1$, 或者 $|\cos x|=1$。但是如果 $|\cos 3x|=1$, 则 $\sin 3x=0$, 因此 $\cos x\cos 2x\cdots$, $\cos nx=1$, 仍有 $|\cos x|=1$。所以只需考虑 $|\cos x|=1$ 的情形, 经验证, 对任意 $n\geqslant 3$, $x=2m\pi$, $m\in Z$ 满足原方程, 又如果 $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$, 则由于 $\sin rx=0$, $\cos rx=(-1)^r$, $r=1, \cdots, n$。因此仅当

$$1=\sin x\sin 2x\cdots\sin nx+\cos x\cos 2x\cdots\cos nx=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

即 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数时, $x=(2k+1)\pi$ 满足原方程, 但当且仅当 n 或 $n+1$ 有一个被 4 整除时 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数。于是,最后的答案是:

如果 $n=1$, 则 $x=2m\pi$ 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $m, k\in Z$;

如果 $n=4l-2$ 或 $n=4l+1$, $l\in N$, 则 $x=2m\pi$, $m\in Z$;

如果 $n=4l$, 或 $n=4l-1$, $l\in N$, 则 $x=m\pi$, $m\in Z$。

6.11 把前两个方程相加, 得到 $\sin\theta=\frac{x+y}{2}$。由第 3 个方程得到,

$$\sin\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)+y^2=xy+y^2=(x+y)y.$$

于是$\frac{x+y}{2}=(x+y)y$，从而$(x+y)\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$。所以$x=-y$，或$y=\frac{1}{2}$。当$x=-y$时，$\sin\theta=0$。由于$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，所以$\cos^2\theta=1$，即$\cos\theta=\pm1$。把前两个方程相减，得到$\cos\theta=\frac{x-y}{2}=-y$，所以，$y=-\cos\theta=\pm1$，从而$x=-y=\mp1$；当$y=\frac{1}{2}$时，把$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$代入第3个方程，得到

$$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=-\frac{1}{4},$$

即有$8\sin^2\theta-4\sin\theta-3=0$。因此$\sin\theta=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$。但是

$$\sin\theta=\frac{x+y}{2}=\frac{2x+1}{4},\ \text{所以}\ x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

因此至多有四组x, y的值：

$$(1,-1),(-1,1),\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

容易验证，当$x=1, y=-1$，而$\sin\theta=0$，$\cos\theta=1$时原方程组成立。即$x=1, y=-1, \theta=2k\pi$是原方程组的解。同样，

$$x=-1,\ y=1,\ \theta=(2k+1)\pi;\ x=\frac{\sqrt{7}}{2},\ y=\frac{1}{2},$$

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4},\ \cos\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

以及

$$x=-\frac{\sqrt{7}}{2},\ y=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4},\ \cos\theta=\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$$

都满足原方程组。于是所求的(x, y)为：

$$(1,-1),(-1,1),\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

6.12 当$n=1$时，x与y可以是任意的数。其次，考虑任意大于1的$n\in N$。分三种情形：

(1) $xy=0$。此时，如果$x=0$，则任意y都满足方程；如果$y=0$，则任意x都满足方程；

(2) $xy\neq0$但$x+y=0$，此时，当且仅当n为奇数时x、y满足方程；

(3) $xy(x+y)\neq0$。此时，x, y不满足方程。下面给出证明。为确定起见，设$|x|\geqslant|y|$，并记$z=\frac{y}{x}\neq-1$，则$|z|\in(0,1)$，且方程化为

$$(1+z)^n=1+z^n.$$

如果$z>0$，则$(1+z)^n=1+nz+\cdots+z^n>1+z^n$，如果$z<0$，则$(1+z)^n=(1-|z|)^n<1-|z|<1-|z|^n\leqslant1+z^n$。总之，$(1+z)^n\neq1+z^n$。

因此得到方程的解：

当$n=1$时，$(x, y)\in R^2$；

当$n=2k$，$k\in N$时，$(x, y)\in\{(0, t)\mid t\in R\}\cup\{(t, 0)\mid t\in R\}$；

当$n=2k+1$，$k\in N$时，$(x, y)\in\{0, t)\mid t\in R\}\cup\{(t, 0)\mid t\in R\}\cup\{(t, -t)\mid t\in R\}$。

6.13 将第一个方程乘以2，并与第二个方程相加，得到

$$x^2+2xy+y^2+2(x+y)=(x+y)^2+2(x+y)=10+6\sqrt{2},$$

即$(x+y+1)^2=(3+\sqrt{2})^2$，从而$x+y+1=\pm(3+\sqrt{2})$。如果$x+y=-4-\sqrt{2}$，则$xy=6+4\sqrt{2}$，且

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(4+\sqrt{2})^2-4(6+4\sqrt{2})=-6-8\sqrt{2}<0,$$

不可能。因此，

$$x+y=2+\sqrt{2},\ xy=2\sqrt{2},$$

由此得到

$$x_1=2,\ y_1=\sqrt{2}\ \text{与}\ x_2=\sqrt{2},\ y_2=2.$$

经验证,它们都满足原方程组。

6.14 由前一个方程得到，$x+2y-8=0,\ 2-x=0$。解得 $x=2,\ y=3$。把它们代入第2个方程，得到，

$$2z^2+3z-5\sqrt{2z^2+3z+9}+3=0.$$

令 $w=\sqrt{2z^2+3z+9}$。则上面的方程化为 $w^2-5w-6=0$。解得 $w_1=6,\ w_2=-2$。由于 $w\geqslant0$, 所以 $w_2=-2$ 为增根,舍去。于是 $2z^2+3z+9=36$, 解得 $z_1=3,\ z_2=-\frac{9}{2}$。经检验,

$$x_1=2,\ y_1=3,\ z_1=3\ \text{和}\ x_1=2,\ y_2=3,\ z_2=-\frac{9}{2}$$

都是原方程组的解。

6.15 由平均值定理(定理6), 有

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2$$
$$\geqslant\frac{1}{n+1}\left((1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_m)+x_n\right)=\frac{1}{n+1},$$

且等式仅当

$$1-x_1=x_1-x_2=\cdots=x_{n-1}-x_n=x_n=\frac{1}{n+1}$$

即

$$x_i=1-\frac{i}{n+1}\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

时成立。因此,存在唯一的数组 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 满足题中的方程。

6.16 记 $R=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, 其中$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$是方程组的解。由平均值定理得到

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{n}{R},$$
$$9=x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant nR.$$

即 $R\geqslant n$ 且 $R\leqslant\frac{9}{n}$。于是 $n^2\leqslant9$ 即 $n\leqslant3$。如果 $n=3$, 则上述不等式变为等式。而这只当 $x_1=x_2=x_3=3$ 时才可能(而且实际上成立)。因此 $n=3$ 满足题中的条件,而且此时方程组有唯一正数解 (3, 3, 3)。如果 $n=1$, 则得到一对不相容的方程,因此方程组无解。当 $n=2$ 时,方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2=9,\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1.\end{cases}$$

因为 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$, 所以方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2=9,\\ x_1x_2=9.\end{cases}$$

由韦达定理的逆定理, $x_1,\ x_2$ 是多项式 t^2-9t+9 的两个根: $t_1,\ t_2=\frac{9\pm3\sqrt{5}}{2}$。于是得到两个解: $(t_1,\ t_2)$, $(t_2,\ t_1)$。因为 $t_1,\ t_2>0$, 所以 $n=2$ 满足题中的条件。

6.17 注意,对任意 $i\in\{1,\ \cdots,\ n\}$, 数组

$$x_i=1,\ x_1=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots=x_n=0$$

满足原方程组。下面证明,除上述 n 个数组外, 方程组没有其它非负解。注意, 如果 $x_i\geqslant0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 且 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k=1$, 则 $x_i\in[0,\ 1]$。因此,如果 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 是方程组的解,则

$$2=(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)=1+(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\cdots+x_1x_2\cdots x_n$$
$$\geqslant1+(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$$

因此, $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=0$。由此得到,在 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中,除可能有一个例外之外, 其余都应为 0。否则, 设

$x_p\neq 0$, $x_q\neq 0$, $p\neq q$, 则 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\geqslant x_px_q>0$, 不可能。最后，如果对某个下标 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, 所有的 $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 都为 0, 则代入方程组得到, $x_i=1$。

6.18 首先证明,当 $n<20$ 时,原方程组无解。事实上,从第二个方程减去第一个方程乘以 10, 得到

$$-9\sin x_1-8\sin x_2-\cdots-\sin x_9+\sin x_{11}+\cdots+(n-10)\sin x_n=100.$$

把上式左端记作 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$、由于 $n<20$ 且 $|\sin x_i|\leqslant 1$, 所以

$$\begin{aligned}100=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)&\leqslant 9+8+\cdots+1+1+\cdots+(n-10)\\&<2(1+2+\cdots+9)+10=100.\end{aligned}$$

矛盾。因此,当 $n<20$ 时原方程组无解。当 $n=20$ 时,容易验证,

$$x_1=\cdots=x_{10}=-\frac{\pi}{2},\ x_{11}=\cdots=x_{20}=\frac{\pi}{2}$$

是原方程组的解。所以,使原方程组有解的最小 $n\in N$ 是 20。

6.19 设数组 (x, y, z) 满足原方程组,如果记 $x=\operatorname{tg}\alpha$, 其中 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,则由方程组中第一个方程得到

$$y=\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{tg}2\alpha,$$

由第二个方程得到 $\qquad z=\operatorname{tg}4\alpha,$

由第三个方程得到 $\qquad x=\operatorname{tg}8\alpha.$

因此, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}8\alpha$, 即 $7\alpha=\pi k$, $k\in Z$, 所以 $\alpha=\frac{k\pi}{7}$, 从而

$$x=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{7},\ y=\operatorname{tg}\frac{2k\pi}{7},\ z=\operatorname{tg}\frac{4k\pi}{7}.$$

检验表明,当 $k\in\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 时,得到的七组不同的数组 x, y, z 确实满足原方程组。

6.20 令 $X=\sqrt{x}$, $Y=-\frac{1}{y}$, $W=2w$, $Z=-3z$, 方程组就可改写成

$$X+Y=W+Z+1, \quad ①$$
$$X^2+Y^2=W^2+Z^2+3, \quad ②$$
$$X^3+Y^3=W^3+Z^3-5, \quad ③$$
$$X^4+Y^4=W^4+Z^4+15, \quad ④$$

将①两边平方,并利用②得

$$XY=-1+W+Z+WZ, \quad ⑤$$

①×②, 并利用③, ⑤, ①得

$$WZ=3+W+Z, \quad ⑥$$
$$XY=2+2W+2Z. \quad ⑤'$$

将②平方,并利用④得

$$X^2Y^2=-3+3W^2+3Z^2+W^2Z^2. \quad ⑦$$

将⑤′平方,结合⑦和⑥,就得

$$3WZ=1-W-Z. \quad ⑧$$

从⑥, ⑧, 我们可以解得 $\qquad W=Z=-1.$

从①, ⑤, 解得 $X=-2, Y=1$ 或 $X=1, Y=-2$。因为 $X=\sqrt{x}\geqslant 0$, 所以 $X=-2$ 应舍去, 答案为

$$x=1,\ y=\frac{1}{2},\ w=-\frac{1}{2},\ Z=\frac{1}{3}.$$

6.21 注意,对任意 $i\in\{1, \cdots, n\}$, 数组

$$x_i=a,\ x_1=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots=x_n=0$$

满足原方程组。下面证明,方程没有其他的解。

(1) 当 $n=1$ 时,原方程组即为 $x_1=a$。

(2) 当 $n=2$ 时,方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2=a, \\ x_1^2+x_2^2=a^2. \end{cases}$$

由此得到 $(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2=0$, 因此, 要么 $x_1=a$, $x_2=0$, 要么 $x_1=0$, $x_2=a$.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时,方程组的解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$应满足

$$\begin{cases} x_1^2+\cdots+x_n^2=a^2, \\ x_1^3+\cdots+x_n^3=a^3. \end{cases}$$

如果 $a=0$, 则由上述第一个方程得到 $x_1=\cdots=x_n=0$. 如果 $a\neq 0$, 则

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{a}\right)^2=1,$$

因此对每个 $i=1, \cdots, n$, 有

$$\left|\frac{x_i}{a}\right|\leqslant 1, \text{从而} \left(\frac{x_i}{a}\right)^3\leqslant\left(\frac{x_i}{a}\right)^2.$$

于是

$$1=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^3\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2=1,$$

因此, 对每个 $i=1, \cdots, n$, 有 $\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\left(\frac{x_i}{a}-1\right)=0$, 即,要么 $x_i=0$, 要么 $x_i=a$. 另一方面,如果对某个 $i\in\{1, \cdots, n\}$, 有 $x_i=a$, 则代入方程组得到其他的 $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 都为 0. 反之亦然。总之,方程组的所有解为:

$$x_i=a, x_j=0, j\neq i, i=1, 2, \cdots, n.$$

注: 上题解法中顺带证明了, 当 $n\geqslant 3$ 时, 由原方程组的第二个和第三个方程可以推出该方程组所有其他的方程.

§7 不 等 式

7.1 由定理 4 得到

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)$$
$$-\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0,$$

即,所给的两个数彼此相等.

7.2 因为 $a<b<c<d$, 所以

$$y-x=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0,$$
$$z-y=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0,$$

因此, $x<y<z$.

7.3 设 a, b, c 合乎题中条件, 即

$$abc=1 \text{ 与 } a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

则

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1$$
$$=(abc-1)+(a+b+c)-abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>0.$$

于是三个因子$(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$的乘积是正的,从而,要么恰有一个因子是正的,要么所有三个因子

$a-1$, $b-1$, $c-1$ 都是正的。但后一情形是不可能的，因为如果 $a>1$, $b>1$, $c>1$, 则 $abc>1$, 与条件 $abc=1$ 矛盾。

7.4 因为 $B<A$, 所以 $B<\frac{A+B}{2}<A$. 但是，

$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}=\frac{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}=\frac{A+B}{2},$$

由此便得到所欲证的不等式。

7.5 注意，$\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ 都是正的，且它们的乘积等于 1，于是由平均值定理即得到

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geqslant\frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c}.$$

由此便可推出所需的不等式。

7.6 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$. 将不等式右端与左端之差变形为

$$3abc+a^2(a-b-c)+b^2(b-a-c)+c^2(c-a-b)$$
$$=3abc+a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2a-a^2c-b^2c-c^2a-c^2b$$
$$=a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)$$
$$=(a-b)(a^2-b^2)-c(a-b)^2+c(c-a)(c-b)$$
$$=(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c).$$

最后，因为 $a+b>c$, $b\geqslant c$, $a\geqslant c$, $c>0$, 所以 $(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)\geqslant 0$. 证毕。

7.7 如果 $a=b=c=0$, 则不等式成立，设 $s=a+b+c>0$, 则

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$=\frac{a}{s}-\frac{a(1-a)}{s(b+c+1)}+\frac{b}{s}-\frac{b(1-b)}{s(a+c+1)}+\frac{c}{s}-\frac{c(1-c)}{s(a+b+1)}$$
$$+(1-a)(1-b)(1-c)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)$$
$$-\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)$$
$$-\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right)\leqslant 1.$$

其中用到如下事实：

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1,\quad \frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)\geqslant 0,$$
$$\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)\geqslant 0,$$
$$\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right)\geqslant 0.$$

为了证明后三个不等式中的第一个，只需注意 $\frac{a(1-a)}{s}\geqslant 0$, 并且

$$\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)=\frac{(b+c)^2-(b+c+1)bc}{b+c+1}$$
$$\geqslant\frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1}=\frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1}\geqslant 0.$$

仿此可证其他两个不等式。

7.8 设 $p=a+b+c>0$, $q=ab+bc+ca>0$, $r=abc>0$, 则由韦达定理的逆定理，多项式 $P(x)=x^3-px^2+qx-r$ 的三个根即是 a、b、c。又因为当 $x\leqslant 0$ 时, $P(x)=x^3-px^2+qx-r<0$, 所以，三个根都是正的。

7.9 设 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 首先注意，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$。令 $x=\cos\alpha$, 便得到 $\sin(\cos\alpha)<\cos\alpha$。其次，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，函数 $\cos x$ 是递减的，因此由 $\alpha\geqslant\sin\alpha$ 得到，$\cos\alpha\leqslant\cos(\sin\alpha)$。所以 $\sin(\cos\alpha)<\cos\alpha\leqslant\cos(\sin\alpha)$，即题中的不等式对 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$成立。由于当$\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$\sin(\cos\alpha)\leqslant 0<\cos(\sin\alpha)$，所以不等式当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时也成立。最后，由函数 $\sin(\cos x)$与 $\cos(\sin x)$都是偶函数知，题中不等式对 $\alpha\in[-\pi,\pi]$成立。由于 2π 是这些函数的周期，所以不等式对所有 $\alpha\in R$ 成立。

7.10 记 $\beta_i=2-\alpha_i>0(i=1,\cdots,n)$。则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=2n-1$ 与平均值定理得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}-1\right)-n=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}-n$$
$$\geqslant\frac{2n}{\sqrt[n]{\beta_1\cdots\beta_n}}-n\geqslant\frac{2n^2}{\beta_1+\cdots+\beta_n}-n=\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}.$$

这正是所要证明的。

7.11 记 $b_i=s-a_i>0(i=1,\cdots,n)$。则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=(n-1)s$ 与平均值定理得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+1\right)-n=s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}-n$$
$$\geqslant\frac{s_n}{\sqrt{b_1\cdots b_n}}-n\geqslant\frac{sn^2}{b_1+\cdots+b_n}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$

这正是所要证明的。

7.12 记 $\frac{a_i}{a_{i+1}}=b_i$, $(i=1,\cdots,n)$，并令 $b_{n+1}=1$。则 $\prod\limits_{i=1}^{n+1}b_i=1$，再利用平均值定理便得到

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{b_i}=\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j\neq i}b_j\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}b_j^n\right)=\sum_{i=1}^{n+1}b_i^n,$$

由此推得

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i},$$

因此对题中提出的问题应当给出肯定的答案。

7.13 引进记号 $1-a=b$。首先考虑 $0<x<1$ 的情形。由贝努利不等式（定理5），因为 $0<b<1$. 所以 $(1+x)^b\leqslant 1+bx$，因此 $(1+x)^{-b}\geqslant\frac{1}{1+bx}$，再由贝努利不等式得到

$$(1+b)x^b=(1+b)(1-(1-x))^b\leqslant(1+b)(1-b(1-x))=1+bx+b^2(x-1)<1+bx.$$

即
$$1+bx>(1+b)x^b\text{ 或 }x^a+bx^{a+1}>(1+b)x,$$

于是
$$(1+x)^{-b}-\frac{1-x^a}{1-x}\geqslant\frac{1}{1+bx}-\frac{1-x^a}{1-x}$$
$$=\frac{1-x+(x^a-1)(1+bx)}{(1+bx)(1-x)}=\frac{x^a+bx^{a+1}-(1+b)x}{(1+bx)(1-x)}>0.$$

其中用到$(1+bx)(1-x)>0$。于是，当 $0<x<1$ 时

$$(1+x)^{-b}>\frac{1-x^a}{1-x}.$$

此即所要证明的。至于 $x>1$ 的情形，可通过变换 $x=\frac{1}{t}$ 化为上述情形，此时 $0<t<1$ 且

$$\frac{1-x^a}{1-x}=\frac{1-\frac{1}{t^a}}{1-\frac{1}{t}}=t^b\frac{1-t^a}{1-t}<t^b(1+t)^{-b}=\left(\frac{1}{t}+1\right)^{-b}=(1+x)^{-b}.$$

证毕。

7.14 对$n\in Z^+$，用归纳法。当$n=0$时，由于$1^\alpha=1$，所以不等式成立。设不等式对n成立，下面证明，它对$n+1$也成立。我们有

$$\begin{aligned}&(1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})^\alpha-(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\\&=(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\left(\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_r}\right)^\alpha-1\right)\\&\leqslant(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}x_{n+1}\leqslant((n+1)x_{n+1})^{\alpha-1}x_{n+1}=(n+1)x_{n+1}^\alpha,\end{aligned}$$

其中不等式

$$(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}x_{n+1}\leqslant((n+1)x_{n+1})^{\alpha-1}x_{n+1}$$

的正确性可由条件

$$1+x_1+\cdots+x_n\geqslant(n+1)x_{n+1}$$

与$\alpha-1\leqslant0$推出。由已证得的不等式及归纳法假设便得到

$$\begin{aligned}&(1+x_1+\cdots+x_{n+1})^\alpha\leqslant(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha\\&\leqslant1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+\cdots+n^{\alpha-1}x_n^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha.\end{aligned}$$

此即所要证明的。

7.15 不妨设$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_i-a_j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|+\sum_{1\leqslant\ <\ \leqslant n}|a_i-a_j|=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|\\&=2\sum_{1\leqslant i<m\leqslant n}a_m-2\sum_{1\leqslant m<j\leqslant n}a_m=2\sum_{m=1}^n(2m-n-1)a_m.\end{aligned}$$

和数S取到最大值的必要且充分条件是：对满足$2m-n-1>0$的下标m，a_m都等于2，而对满足$2m-n-1<0$的下标m，a_m都等于0。因此，

$$S\leqslant4\sum_{\frac{n+1}{2}<m\leqslant n}(2n-n-1).$$

令$n=2k+1$，$k\in N$，则

$$S\leqslant4\sum_{m=k+2}^{2k+1}(2m-2k-2)=8(1+2+\cdots+k)=4k(k+1)=(2k+1)^2-1<n^2,$$

而且其中等式$S=n^2$不能成立。令$n=2k$，则

$$S\leqslant4\sum_{m=k+1}^{2k}(2m-2k-1)=4(1+3+\cdots+(2k-1))=4k^2=n^2.$$

其中，当且仅当a_1，a_2，…，a_{2k}中恰有k个数等于2，而余下的k个数等于0时，等式$S=n^2$成立。

7.16 因为对任意x_1，…，$x_n\in\{-1,1\}$有

$$\sum_{j=1}^n|a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n|\leqslant M.$$

所以

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}\left(\sum_{j=1}^n|a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n|\right)\leqslant M$$

可改写成

$$\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}|a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n|\right)\leqslant M.$$

对每个固定的$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，在和式

$$S_j=\sum_{(x_1,\cdots,x_n)}|a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n|$$

中把所有2^n个被加项分成2^{n-1}对，使得在每一对中，x_1，…，x_{j-1}，x_{j+1}，…，x_n的值相同，即都取1或都取-1，而x_j的值不同，即分别取1及-1。于是每一对被加项之和便具有形式$|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|$，

其中 $$A=a_{j1}x_1+\cdots+a_{jj-1}x_{j-1}+a_{jj+1}x_{j+1}+\cdots+a_{jn}x_n,$$

但是 $$|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|\geqslant|A+a_{jj}-(A-a_{jj})|=2|a_{jj}|.$$

因此，$S_j\geqslant 2^{n-1}\cdot 2|a_{jj}|=2^n|a_{jj}|$。于是得到

$$|a_{11}|+\cdots+|a_{nn}|=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}2^n|a_{jj}|\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}S_j\right)\leqslant M.$$

这正是所要证明的。

7.17 注意，和 $S=\sum_{i=1}^{n}b_ia_i$ 可以表示为

$$\begin{aligned}S&=b_1a_1+\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\cdots+a_i)-\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\cdots+a_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\cdots+a_i)b_i-\sum_{i=1}^{n-1}(a_1+\cdots+a_i)b_{i+1}\\&=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\cdots+a_i)(b_i-b_{i+1}).\end{aligned}$$

这里约定 $b_{n+1}=0$。其次，设 A_k 是 $A_i=|a_1+\cdots+a_i|\,(i=1,\cdots,n)$ 中最大者，则对这个 k 有

$$\begin{aligned}|S|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_1+\cdots+a_i|\cdot|b_i-b_{i+1}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}A_k(b_i-b_{i+1})\\&=A_k\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})=A_k(b_1-b_{n+1})\leqslant A_k.\end{aligned}$$

这正是所要证明的。

7.18 对 $n\in N$ 用归纳法。首先，因为

$$(1-x_1)^m+(1-y_1^m)=y_1^m+(1-y_1^m)=1,$$

所以当 $n=1$ 时结论正确，设结论对 $n-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}&(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m)=(1-x_1\cdots x_{n-1}(1-y_n))^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m)\\&\geqslant(1-x_1\cdots x_{n-1}+x_1\cdots x_{n-1}y_n)^m+(1-(1-x_1\cdots x_{n-1})^m)(1-y_n^m)\\&=(a+(1-a)y_n)^m+(1-a^m)(1-y_n^m)=(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m).\end{aligned}$$

其中 $a=1-x_1\cdots x_{n-1}$ 与 $b=y_n$。其次，对 $m\in N$ 用归纳法证明，对任意 a、$b\in[0,1]$，有

$$(a+b-ab)^m\geqslant a^m+b^m-a^mb^m.$$

当 $m=1$ 时这个不等式即成为等式．设对 $m-1$ 这个不等式成立．即 $(a+b-ab)^{m-1}\geqslant a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}\times b^{m-1}$。则(注意 $a+b-ab\geqslant 0$)可以证明这个不等式对 n 也成立，事实上，

$$\begin{aligned}&(a+b-ab)^m-a^m-b^m+a^mb^m\geqslant(a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}b^{m-1})(a+b-ab)-a^m-b^m+a^mb^m\\&=2a^mb^m+ab^{m-1}+ba^{m-1}-a^mb^{m-1}-b^ma^{m-1}-a^mb-b^ma\\&=a^m(b^m-b^{m-1})+a(b^{m-1}-b^m)+b^m(a^m-a^{m-1})+b(a^{m-1}-a^m)\\&=(b^{m-1}-b^m)(a-a^m)+(a^{m-1}-a^m)(b-b^m)\geqslant 0.\end{aligned}$$

最后的不等式用到 $a\geqslant a^{m-1}\geqslant a^m$，$b\geqslant b^{m-1}\geqslant b^m$。这就证明，对任意 $m\in N$，上述不等式成立．这个不等式可改写为 $(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m)\geqslant 1$，将 $a=1-x_1\cdots x_{n-1}$，$b=y_n$ 代入上面的不等式，即得到，题中的不等式对 n 也成立，这就完成了归纳证明。

7.19 作代换 $b=ax$，$c=ay$，$d=az$，则由题中条件，有 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z$，而题中的不等式化为

$$a^{ax}(ax)^{ay}(ay)^{az}(az)^a\geqslant(ax)^a(ay)^{ax}(az)^{ay}a^{az}.$$

约去 $a^aa^{ax}a^{ay}a^{az}$ 之后，不等式的两端都取 $\frac{1}{a}$ 次幂，便得到等价的不等式

$$x^yy^zz\geqslant xy^xz^y.$$

又令 $y=xs$，$z=xt$，则因 $x\leqslant y\leqslant z$，故 $1\leqslant s\leqslant t$，且因为 $x\geqslant 1$，故 $y\geqslant s$。于是上述不等式又化为

$$x^{xs}y^{xt}xt\geqslant xy^x(xt)^{xs}.$$

约去 $x^{xs}y^xxt$ 之后，不等式两端都取 $\frac{1}{x}$ 次幂，得到等价的不等式 $y^{t-1}\geqslant t^{\frac{s-1}{x}}$。如果 $y=1$，则由于

$$x=1,\ s=\frac{y}{x}=1,\ y^{t-1}=1=t^{1-1}=1,$$

所以不等式成立，如果 $t=1$，则由于 $y^{t-1}=y^0=1=1^{\frac{s-1}{x}}=1$，所以不等式也成立．如果 $y>1$，$t>1$，则在上述不等式两端各取$\frac{1}{t-1}\cdot\frac{y}{y-1}(>0)$次幂，得到等价的不等式

$$y^{\frac{y}{y-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}},\ 1\leqslant s\leqslant t,\ s\leqslant y.$$

下面分两种情况证明这个不等式

(1) 设 $y\geqslant t$．则当 $\alpha>1$ 时函数 $f_1(\alpha)=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ 是递增的，这可由定理引及下述不等式加以证明．

$$f_1'(\alpha)=\left(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\ln\alpha}\right)'=e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{(\alpha-1)^2}(\alpha-1-\ln\alpha)>0.$$

最后的不等式可由不等式 $g_1(\alpha)=\alpha-1-\ln\alpha>0$ 推出．因为

$$g_1'(\alpha)=1-\frac{1}{\alpha}>0\ 且\ g_1(1)=0,$$

故后者当 $\alpha>1$ 时成立，因此得到

$$y^{\frac{y}{y-1}}=f_1(y)\geqslant f_1(t)=t^{\frac{t}{t-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}.$$

(2) 设 $y<t$．则当 $\alpha>1$ 时函数 $f_2(\alpha)=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 是递减的，其根据是

$$\begin{aligned}f_2'(\alpha)&=\left(e^{\frac{1}{\alpha-1}\ln\alpha}\right)'=e^{\frac{1}{\alpha-1}\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)\\&=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}(\alpha-1-\alpha\ln\alpha)<0.\end{aligned}$$

最后的不等式可由不等式 $g_2(\alpha)=\alpha-1-\alpha\ln\alpha<0$ 推出．因为 $g_2'(\alpha)=1-\ln\alpha-1<0$ 且 $g_2(1)=0$，故后者当 $\alpha>1$ 时成立．因此得到

$$y^{\frac{y}{y-1}}=(f_2(y))^y\geqslant(f_2(t))^y=t^{\frac{y}{t-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}.$$

7.20 将不等式的左端化为

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}&=\left(\frac{1}{1+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{n^i}\right).\end{aligned}$$

再注意，对任意 $i\in N$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{n^i}&=\left(\frac{1}{1\cdot n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n^{i-1}}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2\cdot n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{3\cdot n^{i-1}}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{(n-1)n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{n\cdot n^{i-1}}\right)\\&=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{(m-1)n^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{mn^{i-1}}\right)>\sum_{m=2}^{n}\left(n^{i-1}\frac{1}{m\cdot n^{i-1}}\right)=\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

这样便得到所需的不等式

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}>\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}.$$

7.21 记 $b_k=\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}=k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$，$(k=1,\ \cdots,\ n)$．

由于 $b_k\leqslant ke$（见定理 7），$b_1b_2\cdots b_k=(k+1)^k$ 以及平均值定理，所以

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}&=\frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1b_1)\cdots(a_kb_k)}\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)\\&=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j.\end{aligned}$$

其次

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{j}\leqslant e\sum_{j=1}^{n}a_j.$$

这正是所要证明的。

7.22 我们约定，$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$(除顺序上差异外)与 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$ 是相同的。则

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}\right)$$
$$=5+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)=25+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right),$$

其中求和遍历 $C_5^2=10$ 对下标 $1\leqslant i<j\leqslant 5$。其次，有

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2.$$

记 $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$。则题中的不等式可改写为

$$\sum_{i<j}f(x_i,x_j)\leqslant 6f(p,q).$$

首先证明，对正数 $x\leqslant y\leqslant z$，有 $f(x,y)+f(y,z)\leqslant f(x,z)$，即

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\leqslant\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2.$$

因为 $\frac{x}{y}\leqslant 1$，$1\geqslant\frac{y}{z}$，所以

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{x}{z}-1=\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\leqslant 0.$$

同理可得

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\frac{z}{x}-1\leqslant 0.$$

将上面两个不等式相加，便得到所需的不等式。其中当且仅当 $x=y$ 或 $y=z$ 时等式成立。其次，反复应用不等式 $f(x,y)+f(y,z)\leqslant f(x,z)$，便得到下面一系列不等式：

$$f(p,x_1)+f(x_1,x_2)+f(x_2,x_3)+f(x_3,x_4)+f(x_4,x_5)+f(x_5,q)\leqslant f(p,q),$$
$$f(p,x_1)+f(x_1,x_3)+f(x_3,x_5)+f(x_5,q)\leqslant f(p,q).$$
$$f(p,x_1)+f(x_1,x_4)+f(x_4,q)\leqslant f(p,q).$$
$$f(p,x_2)+f(x_2,x_5)+f(x_5,q)\leqslant f(p,q).$$
$$f(p,x_2)+f(x_2,x_4)+f(x_4,q)\leqslant f(p,q).$$
$$f(p,x_1)+f(x_1,x_5)+f(x_5,q)\leqslant f(p,q).$$

把它们相加，并舍去形如 $f(p,x_i)$ 与 $f(x_i,q)$ 的非负被加项，便得到所需的不等式，现在确定等式成立的条件。注意，如果 $p<x_2$，或 $x_3<q$，则不能得到等式，因为此时上面舍去的被加项 $f(p,x_2)$ 或 $f(x_4,q)$ 是非零的。因此，为了使等式成立，必需有 $x_1=x_2=p$ 与 $x_4=x_5=q$。于是由上面六个不等式中的第二个得到

$$f(p,x_3)+f(x_3,q)\leqslant f(p,q).$$

因为这个不等式也应成为等式，所以应有 $p=x_3$ 或 $x_3=q$。于是得到，题中的不等式当且仅当 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ 中有两个与区间 $[p,q]$ 的一个端点相同，而其他三个与另一个端点相同时等式成立。

7.23 我们约定 a,b,c,d(除顺序差异外)与 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4$ 相同，先求多项式

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

的导数。一方面，由韦达定理有

$$P'(x)=\left(x^4-\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)x^3+\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)x^2-\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k\right)x+x_1x_2x_3x_4\right)'$$
$$=4x^3-\left(3\sum_{i=1}^{4}x_i\right)x^2+\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\right)x-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k.$$

另一方面，由罗尔定理，如果对某个 $i\in\{1,2,3\}$ 有 $x_i<x_{i+1}$，则存在 $y\in(x_i,x_{i+1})$ 使导数 $P'(y)=0$。又如果多项式 $P(x)$ 有 m 重根 x_0，则多项式 $P'(x)$ 有 $m-1$ 重根 x_0。因此三次多项式 $P'(x)$ 有三个根 y_1，y_2，y_3，使得 $x_1\leqslant y_1\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant x_4$，因此

$$P'(x)=4(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)=4x^3-4(y_1+y_2+y_3)x^2$$
$$+4(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)x-4y_1y_2y_3.$$

由平均值定理,有

$$\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}\leqslant\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3}{3},$$

于是得到 $\sqrt[3]{A}\leqslant\sqrt{B}$，其中

$$A=y_1y_2y_3=\frac{1}{4}(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4),$$

$$B=\frac{1}{3}(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)=\frac{1}{6}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4).$$

这就证明了所需的不等式，而且其中当且仅当 $y_1y_2=y_2y_3=y_3y_1$ 即 $y_1=y_2=y_3$ 时等式成立。而当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 即 $a=b=c=d$ 时有 $y_1=y_2=y_3$。

7.24 因为 $0\leqslant\sin^2\beta\cos^2\beta=\frac{1}{4}\sin^2 2\beta\leqslant\frac{1}{4}$，所以

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}=1+\mathrm{tg}^2\alpha+4(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$$
$$=5+\mathrm{tg}^2\alpha+4\mathrm{ctg}^2\alpha=5+2\left(\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{2}+\frac{2}{\mathrm{tg}^2\alpha}\right)\geqslant5+2\times2=9.$$

上式中第一个不等式当且仅当 $\sin2\beta=1$ 即 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立，而第二个不等式当且仅当 $\mathrm{tg}^2\alpha=2$ 即 $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ 时等号成立。所以原不等式当且仅当 $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ 且 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立。

7.25 由平均值定理,有

$$\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant2x_1,\quad\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant2x_2,\quad\cdots,$$
$$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant2x_{n-1},\quad\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant2x_n.$$

把上述不等式相加,并加以整理,便得所要证明的不等式。

7.26 由牛顿二项式定理,有

$$(1\pm x)^n=1\pm nx+a_2x^2\pm a_3x^3+a_4x^4\pm a_5x^5+\cdots\pm(-1)^{n+1}a_nx^n,$$

其中 $a_i=c_n^i\geqslant0(i=2,\cdots,n)$。因此有

$$(1+x)^n-(1-x)^n-2nx=2a_3x^3+2a_5x^5+\cdots.$$

当 $x=\frac{1}{2n}$ 时,上式右端是非负的,所以,

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\geqslant1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n.$$

两边乘以 $(2n)^n$ 便得所要证明的不等式。

7.27 对 $n\in N$ 用归纳法,当 $n=1$ 时结论显然成立,设 $n=k$ 时不等式成立,即有

$$(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant2^{2k}-2^{k+1}.$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k.$$

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，所以 $ab=a+b$。由 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$ 得到 $ab=a+b\geqslant4$，从而有

$$a^kb+ab^k\geqslant2\sqrt{a^kbab^k}=2(ab)^{\frac{k+1}{2}}\geqslant2^{k+2}$$

于是

$$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}\geqslant4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}=2^{2(k+1)}-2^{k+2}.$$

即不等式对 $n=k+1$ 成立。这就证明不等式对所有的 $n\in N$ 成立。

§8 含整数部分 $[x]$ 的问题

8.1 当 $x\neq 1$ 时，原方程等价于

$$|x-1|(|x+1|-1)=\{x\}.$$

分别考虑下列三种情形：$x>1$，$-1\leqslant x<1$ 与 $x<-1$。当 $x>1$ 时，方程可改写为 $x(x-1)=\{x\}$。因为 $x(x-1)>x-1\geqslant\{x\}$，所以方程无解；当 $-1\leqslant x<1$ 时，方程可改写为 $x(1-x)=\{x\}$。因为 $\{x\}\geqslant 0$ 与 $1-x>0$，所以 $x\geqslant 0$，但当 $0\leqslant x<1$ 时，$\{x\}=x$，因此得到 $x(1-x)=x$。于是方程有一个解 $x=0$；当 $x<-1$ 时，方程可改写为 $(2+x)(x-1)=\{x\}$。因为 $x-1<0$ 且 $\{x\}\geqslant 0$，所以 $2+x\leqslant 0$，即 $x\leqslant -2$。显然 $x=-2$ 是方程的解。如果 $-3\leqslant x<-2$，则 $\{x\}=x+3$，而方程又可改写为 $(2+x)(x-1)=3+x$，且有解 $x=-\sqrt{5}\in[-3,-2)$。最后，当 $x<-3$ 时，有

$$|(2+x)(1-x)|=|2+x|\cdot|1-x|>1\cdot 4>\{x\},$$

即方程无解。总之，原方程有三个解：0，-2，$-\sqrt{5}$。

8.2 设 x 是题中方程的解，并且 $n=[x]$，因此 $x^2+7=8n$，即有 $n\geqslant 0$。再由 $n\leqslant x<n+1$，得到

$$n^2+7\leqslant x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$$

即

$$n^2+7\leqslant 8n<n^2+2n+8.$$

由此解得 $n=1,5,6,7$。代入 $x^2=8n-7$，得 $x^2=1,33,41,49$。经验证，知 $x=1$，$\sqrt{33}$，$\sqrt{41}$，7 是方程的解。

8.3 设 $[x]=x-y$，由数 $[x]$ 的定义有 $0\leqslant y<1$。原方程可改写为

$$x^3-x+y=3.$$

注意不等式 $0\leqslant y<1$，可得 $2<x^3-x\leqslant 3$。设 $x>2$，此时 $x^3-x=x(x^2-1)>2\times 3=6$，这说明当 $x>2$ 时不等式 $x^3-x\leqslant 3$ 不满足；设 $x<-1$，则 $x^2-1>0$，$x(x^2-1)<0$，与条件 $x(x^2-1)>2$ 矛盾，剩下只需研究 x 由 -1 到 0，由 0 到 1 及由 1 到 2 的情况：

(1) 设 $-1\leqslant x<0$，此时 $[x]=-1$，方程成为 $x^3+1=3$。由此 $x=\sqrt[3]{2}$，但这个值 x 不在 $[-1,0)$ 中，即在此区间中方程无解。

(2) 设 $0\leqslant x<1$，此时，$[x]=0$，方程成为 $x^3=3$，由此 $x=\sqrt[3]{3}$，但这个数大于 1，所以在 $[0,1)$ 也无解。

(3) 最后，当 $1\leqslant x<2$ 时，有 $[x]=1$。方程成为 $x^3-1=3$，它有解 $x=\sqrt[3]{4}$，它满足 $1\leqslant x<2$。

这样，$x=\sqrt[3]{4}$ 是原方程的唯一解。

8.4 注意，对固定的 $k\in N$，等式 $[\sqrt[3]{m}]=k$ 等价于不等式 $k^3\leqslant m\leqslant(k+1)^3-1$，其中 $m\in N$。满足这个条件的自然数 m 的个数为 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$。因为原方程左端等于 $\sum\limits_{k=1}^{x-1}s_k$，其中

$$s_k=k(3k^2+3k+1).$$

因为当 $k\in N$ 时，$s_k>0$，$s_1=7$，$s_2=38$，$s_3=111$，$s_4=244$，且 $s_1+s_2+s_3+s_4=400$，所以原方程有唯一自然数解 $x=5$。

8.5 首先证明，对任意 $k\in N$，有

$$k[x]\leqslant[kx]\leqslant k[x]+k-1.$$

事实上，记 $m=[x]$，$\alpha=\{x\}$，则 $x=m+\alpha$，$m\in Z$，$0\leqslant\alpha<1$ 且

$$km=[km]\leqslant[kx]=[km+k\alpha]\leqslant km+k\alpha\leqslant km+k-1,$$

于是

$$\begin{aligned}s&=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\\&\leqslant 63[x]+(1+3+7+15+31)=63[x]+57.\end{aligned}$$

而且 $s\geqslant 63[x]$，因此存在 $m\in Z$，使得

$$63m\leqslant s\leqslant 63m+57.$$

另一方面，$12345=63\cdot195+60$，因此 $s=12345$ 对任意 $x\in R$ 都不成立。

8.6 令 $m=[x]$，$\alpha=\{x\}$。则 $x=m+\alpha$，且原方程化为

$$(m+\alpha)^2-[m^2+2m\alpha+\alpha^2]=\alpha^2$$

即

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2].$$

但 $m^2\in Z$，所以 $2m\alpha=[2m\alpha+\alpha^2]$ 并且当 $0\leqslant\alpha<1$ 时，此等式等价于 $2m\alpha\in Z$，因此 $\alpha=\frac{k}{2m}$，其中 $k\in\{0,1,\cdots,2m-1\}$。于是，对每个 $m=1,\cdots,n-1$，$n\geqslant2$，α 可以取 $2m$ 个值；而当 $m=n$ 时，因为 $x\leqslant n$，所以 $\alpha=0$。因此解的个数等于

$$2+4+\cdots+2(n-1)+1=n(n-1)+1=n^2-n+1.$$

8.7 首先，因为对任意 $n\in N$，$4n(n+1)<(2n+1)^2$，所以 $2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$。因此

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2,$$

于是

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\text{，从而}$$

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+2}].$$

其次，设对某个 $n\in N$，有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]<[\sqrt{4n+2}],$$

则存在 $m\in N$，使得

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<m\leqslant\sqrt{4n+2}.$$

因此

$$2\sqrt{n(n+1)}<m^2-(2n+1)\leqslant2n+1,$$

即

$$4n(n+1)<(m^2-(2n+1))^2\leqslant4n(n+1)+1$$

因为 $(m^2-(2n+1))^2$ 是自然数，所以 $m^2-(2n+1)=2n+1$，因此 $m^2=2(2n+1)$ 被 2 整除，但不被 4 整除，不可能。于是，对任意 $n\in N$，都有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

8.8 记 $f(n)=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$，$n\in N$，则

$$f(n+1)-f(n)=\left[n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right],$$

于是，当且仅当 $\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]>\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$，也即存在某个 $m\in N$ 使得 $\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m\leqslant\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}$ 时 $f(n+1)-f(n)>1$。由 $\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m\leqslant\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}$ 得到 $n<m^2-m+\frac{1}{4}\leqslant n+1$，即存在 $m\in N$，使得 $n=m^2-m$。另一方面，对任意 $n\in N$，因为 $\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2}$，所以

$$f(n+1)=n+2+\left[\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\right]\leqslant n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]+2=f(n)+2.$$

于是，得到

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases}2,\ \text{当 } n=m^2-m,\ m=2,3,\cdots\text{时},\\1,\ \text{其他}.\end{cases}$$

而且因为当 $m\geqslant2$ 时，$m-1<\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}<m$，因此

$$f(m^2-m)+1=m^2+\left[\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}\right]-m+1=m^2.$$

于是 $f(n)$ 可以取除形如 $f(m^2-m)+1=m^2$ 的数以及小于 $f(1)=2$ 的数之外的所有自然数，这就证明，一个自然数不能表为 $\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ 的必要且充分条件是，它是某个自然数的平方。

8.9 $f(n)=\left[n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]=n+\left[\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\right]=n+k$，正整数 k 满足 $k+1>\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k$，于是

$$k+2>\sqrt{\frac{n}{3}}+1+\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k,$$

$$f(n+1)=\left[n+1+\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\right]=n+1+\left[\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\begin{cases}n+k+1, & \text{当 } \sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}<k+1,\\ n+k+2, & \text{当 } \sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1.\end{cases}$$

不发生 $\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1$ 的情况时，$f(n)$随 n 的增加逐次增加1．发生 $\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1$ 的情况时，$f(n)$跳过 1 个自然数 $n+k+1$．由于

$$\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1>\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}$$

等价于

$$n+1\geqslant 3\left(k+\frac{1}{2}\right)^2>n$$

即

$$n+1\geqslant 3k^2+3k+\frac{3}{4}>n$$

即

$$n=3k^2+3k.$$

所以 $f(n)$跳过的数为

$$n+k+1=3k^2+3k+k+1=3(k+1)^2-2(k+1)=a_{k+1}.$$

又 $f(1)=2$，所以 $f(n)$历遍除数列

$$a_1=1,\ a_2=8,\ \cdots,\ a_k=3k^2-2k,\ \cdots$$

外的所有自然数．

8.10 设数列$\{a_n\}$中只有有限多个奇数项，则取奇数项 a_m，使它的下标为最大．于是，对所有 $n\in N$，a_{m+n} 都是偶数．因为 $a_1>0$ 且数列是递增的，所以 $a_{m+1}\neq 0$．设 $a_{m+1}=2^pq$，其中 q 为奇数且 $p\in N$．因此

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=2^{p-1}\cdot 3q.$$

同理得到，$a_{m+3}=2^{p-2}\cdot 3^2\cdot q$．如此继续，最后得到，$a_{m+p+1}=3^pq$ 为奇数，与下标m的取法矛盾．现在设数列$\{a_n\}$只有有限多个偶数项，并设 a_m 为偶数，且它的下标m为最大，则 a_{m+1} 是奇数，且 $a_{m+1}-1=2^pq$，其中 q 是奇数，$p\in N$ 于是

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=\left[\frac{3}{2}(a_{m+1}-1)+\frac{3}{2}\right]=2^{p-1}\cdot 3q+1,$$

即 $a_{m+2}-1=2^{p-1}\cdot 3q$，同理得到，$a_{m+3}-1=2^{p-2}\cdot 3^2q$，如此继续，最后得到，$a_{m+p+1}-1=3^pq$，即 $a_{m+p+1}=3^p\cdot q+1$ 为偶数，与下标m的取法矛盾．题中结论证毕．

8.11 $[n\sqrt{2}]=k$ 等价于

$$\frac{k}{\sqrt{2}}\leqslant n<\frac{k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad ①$$

当且仅当$\left\{\frac{k}{\sqrt{2}}\right\}+\frac{1}{\sqrt{2}}>1$ 时，有 n 满足不等式①，因此，当 $\left\{\frac{k}{\sqrt{2}}\right\}\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{2}$ 时，①中 n 无解．若 $\{x\}<\frac{1}{2}$，则 $\{2x\}=2\{x\}$、假设 $\frac{2^k}{\sqrt{2}}\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 对所有 k 成立，将导致 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\leqslant 2^{-k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 对所有 k 成立，这意味着$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=0$．因此，一定有 k_1 和 n_1，使得 $[n_1\sqrt{2}]=2^{k_1}$．用类似方法，我们得到 $k_1<k_2<\cdots$和 $n_1<n_2<\cdots$ 使得 $[n_j\sqrt{2}]=2^{k_j}$．

8.12 记 $a_n=(3+\sqrt{11})^n+(3-\sqrt{11})^n$。设 $\alpha=(3+\sqrt{11})^n$, $\beta=(3-\sqrt{11})^n$, 则

$$a_n=\alpha+\beta,\ a_{n+1}=(3+\sqrt{11})\alpha+(3-\sqrt{11})\beta,$$

$$a_{n+2}=(3+\sqrt{11})^2\alpha+(3-\sqrt{11})^2\beta=(20+6\sqrt{11})\alpha+(20-6\sqrt{11})\beta$$
$$=(18+6\sqrt{11})\alpha+(18-6\sqrt{11})\beta+(2\alpha+2\beta)=6a_{n+1}+2a_n.$$

因此,对 $n\in Z^+$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+2a_n$。于是,由 $a_0=2$, $a_1=6$ 得到,对任意 $n\in Z^+$, a_n 为整数。因为 $-1<3-\sqrt{11}<0$, 所以当 $n\in N$ 时,

$$a_{2n-1}=(3+\sqrt{11})^{2n-1}+(3-\sqrt{11})^{2n-1}<(3+\sqrt{11})^{2n-1}<a_{2n-1}+1.$$

即 $a_{2n-1}=[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$。现在对 $n\in N$ 用归纳法证明,a_{2n-2} 被 2^n 整除,而 a_{2n-1} 被 2^n 整除,但不被 2^{n+1} 整除。当 $n=1$ 时,因为 $a_0=2$, $a_1=6$, 所以结论成立。设结论对某个 $n\in N$ 成立,于是,因为 a_{2n-1} 与 a_{2n-2} 都被 2^n 整除,所以 $a_{2n}=6a_{2n-1}+2a_{2n-2}$ 被 2^{n+1} 整除,且因为 a_{2n} 与 a_{2n-1} 都被 2^n 整除,但 a_{2n-1} 不被 2^{n+1} 整除,所以 $a_{2n+1}=6a_{2n}+2a_{2n-1}$ 被 2^{n+1} 整除,但不被 2^{n+2} 整除。于是,由上述结论即可得到,能整除 a_{2n-1} 的 2 的最高次幂等于 2^n, 即 $k=n$。

8.13 对给定的 $n\in N$, 记 $m=[n\sqrt{2}]$。因为 $m\neq n\sqrt{2}$, $\left(\text{否则}\sqrt{2}=\frac{m}{n}\text{为有理数}\right)$, 所以 $m<n\sqrt{2}$, 且 $m^2<2n^2$, 因此 $1\leqslant 2n^2-m^2=(n\sqrt{2}-m)(n\sqrt{2}+m)=\{n\sqrt{2}\}(n\sqrt{2}+m)<\{n\sqrt{2}\}2n\sqrt{2}$。定义数列 $\{n_i\}$ 与 $\{m_i\}$ 如下:

$$n_1=m_1=1,\ n_{i+1}=3n_i+2m_i,\ m_{i+1}=4n_i+3m_i,\ i\in N.$$

下面对 $i\in N$ 用归纳法证明,对所有 $i\in N$, 有 $2n_i^2-m_i^2=1$。事实上,当 $i=1$ 时显然有 $2n_1^2-m_1^2=1$。设结论对某个 $i\in N$ 成立,则

$$2n_{i+1}^2-m_{i+1}^2=2(9n_i^2+12n_im_i+4m_i^2)-(16n_i^2+24n_im_i+9m_i^2)=2n_i^2-m_i^2=1,$$

即结论对 $i+1$ 也成立。现在给定 $\varepsilon>0$, 因为数列 $\{n_i\}$ 是递增的,故存在 $n=n_{i_0}$, 使得

$$n>\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

于是

$$\varepsilon(2n\sqrt{2}-1)>1,\ (1+\varepsilon)(2n\sqrt{2}-1)>2n\sqrt{2}.$$

因为

$$0<n\sqrt{2}-m=\frac{1}{n\sqrt{2}+m}<1,$$

所以,由上述不等式和等式 $2n_{i_0}^2-m_{i_0}^2=1$ 得到

$$\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}}>\frac{1}{2n\sqrt{2}-1}>\frac{1}{n\sqrt{2}+m}=n\sqrt{2}-m=\{n\sqrt{2}\}.$$

证毕。

8.14 (1) 考虑函数

$$f(x,y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]-[x]-[y].$$

并且证明,当 $x,y\in R$ 时,$f(x,y)\geqslant 0$。设对某些 $x,y\in[0,1)$, $x\leqslant y$, 有

$$f(x,y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]<0,$$

则因为 $f(x,y)\in Z$, 所以 $f(x,y)\leqslant -1$, 且

$$f(x,y)>(5x-1)+(5y-1)-(3x+y)-(3y+x)=x+y-2,$$

即 $x+y-2<-1$, 从而 $x+y<1$。因为

$$[5y]-[3y+x]\geqslant[5y]-[4y]\geqslant 0,$$

所以

$$[5x]-[3x+y]=f(x,y)-([5y]-[3y+x])\leqslant -1.$$

另一方面,

$$[5x]-[3x+y]\geqslant[5x]-[3x+1-x]=[5x]-[2x+1],$$

即

$$[5x]<[2x+1],$$

由此得到 $5x<2x+1$，从而 $x<\frac{1}{3}$. 但此时 $[2x+1]\leqslant\left[2\cdot\frac{1}{3}+1\right]=1$，即 $[5x]<1$ 从而 $x<\frac{1}{5}$. 因为 $[3x+y]\geqslant 1+[5x]=1$，所以 $y\geqslant 1-3x>\frac{2}{5}$，即 $[5y]\geqslant 2$. 如果 $y<\frac{3}{5}$，则

$$3y+x<3\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=2,$$

即 $[3y+x]\leqslant 1$，再注意到 $[3x+y]\leqslant\left[3\cdot\frac{1}{5}+1\right]=1$，则有

$$f(x,y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]\geqslant 0+2-1-1=0,$$

与 $f(x,y)<0$ 的假设矛盾. 如果 $y\geqslant\frac{3}{5}$，则 $[5y]\geqslant 3$，$[3y+x]=[y+x+2y]\leqslant[y+x]+2\leqslant 2$，且 $f(x,y)\geqslant 0+3-1-2=0$，也与 $f(x,y)<0$ 的假设矛盾. 这就证明，当 $x,y\in[0,1)$ 时 $f(x,y)\geqslant 0$，但因为函数 $f(x,y)$ 关于每个变量 x,y 的周期为 1，所以对所有 $x,y\in R$，都有 $f(x,y)\geqslant 0$，最后，当 $x,y\geqslant 0$ 时，有

$$[5x]+[5y]=f(x,y)+[3x+y]+[3y+x]+[x]+[y]\geqslant[3x+y]+[3y+x].$$

这就是所要证明的.

(2) 只需证明，在分母 $m!n!(3n+m)!(n+3m)!$ 的素因子分解式中，任意素数 p 的指数不会超过分子 $(5m)!(5n)!$ 的素因子分解式中素数 p 的指数(如果不含素因子 p，则其指数为 0)，因为 p 在 $q!$ 的素因子分解式中的指数等于

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{q}{p^2}\right]+\cdots,$$

所以它在分子的素因子分解式中的指数等于

$$\left[\frac{5m}{p}\right]+\left[\frac{5m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{5n}{p}\right]+\left[\frac{5n}{p^2}\right]+\cdots,$$

而在分母的素因子分解式中的指数等于

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{3m+n}{p}\right]$$
$$+\left[\frac{3m+n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{3n+m}{p}\right]+\left[\frac{3n+m}{p^2}\right]+\cdots,$$

记 $\frac{m}{p^k}=x_k$，$\frac{n}{p^k}=y_k$，其中 $k\in N$，由(1)中所证明的不等式，有

$$[5x_k]+[5y_k]\geqslant[x_k]+[y_k]+[3x_k+y_k]+[3y_k+x_k],$$

再对所有 $k\in N$ 求和(对充分大的 k，不等式两端都等于 0)，便得到所要证的结论.

8.15 因为 $x=m+\alpha$，其中 $m=[x]$，$\alpha=\{x\}$，所以对任意 $k\in N$，有

$$[kx]=[km+k\alpha]=km+[k\alpha],$$

因此原不等式化为

$$nm+[n\alpha]\geqslant\left(m+\frac{[\alpha]}{1}\right)+\left(m+\frac{[2\alpha]}{2}\right)+\cdots+\left(m+\frac{[n\alpha]}{n}\right),$$

从而

$$[n\alpha]\geqslant\frac{[\alpha]}{1}+\frac{[2\alpha]}{2}+\cdots+\frac{[n\alpha]}{n}.$$

因此，只需考虑 $0\leqslant x<1$ 的情形，当 $x\in[1,0)$ 时，不等式左右两端是不减的分段常量函数. 而且它们的间断点都是 $[0,1)$ 中的有理数，即形如 $x=\frac{p}{q}$ 的点，其中 $p,q\in N$ 是互素的数，即 $(p,q)=1$，且 $2\leqslant q\leqslant n$，$1\leqslant p\leqslant q-1$. 因此只需证明不等式对 $x=0$ 及 $x=\frac{p}{q}$ 成立. 当 $x=0$ 时，不等式显然成立. 设 $x=\frac{p}{q}$，此时，如果记 $\left[\frac{kp}{q}\right]=a_k$，$q\left\{\frac{kp}{q}\right\}=b_k$，$k=1,\cdots,n$，则 $0<b_k<q$，$kp=a_kq+b_k$，所要证明的不等式可以改写为

$$a_n\geqslant\frac{a_1}{1}+\cdots+\frac{a_n}{n}.$$

注意，$b_1, \cdots, b_{q-1}$ 都不为 0，且两两不同。否则如果 $b_i = b_j$，$i > j$，则 $ip - a_i q = jp - a_j q$，由此得到 $(i-j) \cdot p = (a_i - a_j)q$，$0 < i - j < q$，但这不可能，因为 $(p, q) = 1$。因此 $\{b_1, \cdots, b_{q-1}\} = \{1, \cdots, q-1\}$。应用平均值定理，有

$$\frac{\frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{2} + \cdots + \frac{b_{q-1}}{q-1}}{q-1} \geqslant \sqrt[q-1]{\frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{q-1}}{1 \cdot 2 \cdots (q-1)}} = \sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}} = 1.$$

因此，

$$\frac{b_1}{1} + \cdots + \frac{b_n}{n} \geqslant \frac{b_1}{1} + \cdots + \frac{b_{q-1}}{q-1} \geqslant q - 1.$$

于是

$$\begin{aligned} a_n + \frac{q-1}{q} &\geqslant a_n + \frac{b_n}{q} = \frac{np}{q} = \frac{p}{q} + \frac{2p}{2q} + \cdots + \frac{np}{nq} \\ &= \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \frac{1}{q}\left(\frac{b_1}{1} + \cdots + \frac{b_n}{n}\right) \\ &\geqslant a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \frac{q-1}{q}. \end{aligned}$$

这就是所要证明的。

8.16 首先注意，由题中条件可以推出 $c = a + b$。事实上，如果 $c > a + b$，则取 $n \geqslant \frac{1}{c - a - b}$，从而

$$[nc] > nc - 1 \geqslant na + nb \geqslant [na] + [nb],$$

如果 $c < a + b$，则取 $n \geqslant \frac{2}{a + b - c}$，从而有

$$[nc] \leqslant nc \leqslant na - 1 + nb - 1 < [na] + [nb].$$

都与题中条件矛盾，此外，当 $n = 1$ 时，有 $[a] + [b] = [c]$。其次，如果记 $a = [a] + \alpha$，$b = [b] + \beta$，$c = [c] + \gamma$。则 $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$，且由

$$[an] + [bn] = ([a]n + [\alpha n])([b]n + [\beta n]) = ([a] + [b])n + [\alpha n] + [\beta n] = [c]n + [\gamma n]$$

可以推得

$$[\alpha n] + [\beta n] = [\gamma n].$$

因此，不失一般性，可设 $0 \leqslant a < 1$，$0 \leqslant b < 1$ 且 $c = a + b < 1$。设 $a \neq 0$，$b \neq 0$，分两种情形讨论。

(1) 设 a、b 为有理数，即 $a = \frac{k}{m}$，$b = \frac{l}{m}$，$c = \frac{k+l}{m}$，其中 $k, l, m \in N$，且 $k + l < m$。于是，如果 $n = m - 1$，则

$$[an] = \left[\frac{k(m-1)}{m}\right] = \left[k - \frac{k}{m}\right] = [k - a] = k - 1.$$

同理，$[bn] = l - 1$，$[cn] = k + l - 1$。因此，等式 $[an] + [bn] = [cn]$ 对这样的 n 不成立。

(2) 设 a、b 至少有一个为无理数，不妨设为 a，则 $p \in N$，使得 $a + pb < 1 \leqslant a + (p+1)b$。下面证明：对某个 $n \in N$，有 $a + pb < \{na\}$。事实上，记 $\varepsilon = 1 - (a + pb)$，并考虑数 $\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \cdots, \{ta\}$，其中 $t > \frac{1}{\varepsilon} + 1$。因为所有这些数都属于区间 $(0, 1)$。故其中必有这样的两个数 $\{ra\}$ 和 $\{qa\}$ $(r < q)$，其差小于 ε，否则这些数中最大者和最小者之差不小于 $\varepsilon(t-1) > \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$。因此，要么 $\{(q-r)a\} > 1 - \varepsilon$，要么 $\{(q-r)a\} < \varepsilon$。对前者，取 $n = q - r$，可得 $a + pb = 1 - \varepsilon < \{na\}$；对后者，记 $\delta = \{(q-r)a\}$，并取 $s \in N$，使得 $\delta s < 1 \leqslant \delta(s+1)$。此时，设 $n = s(q-r)$，得

$$\{na\} = s\{(q-r)a\} = \delta s > 1 - \varepsilon.$$

因此，对后者，有 $a + pb < \{na\}$，对于所求的 n 值，应有等式

$$[na] + [nb] = [nc],$$

$$\{na\} + \{nb\} = n(a + b) - ([na] + [nb]) = \{nc\},$$

于是有

$$\{na\} > a,\ \{nc\} = \{na\} + \{nb\} \geqslant \{nb\} > a + pb \geqslant a + b = c,$$

$$\{nb\} = \{nc\} - \{na\} < 1 - (a + pb) = 1 - (a + (p+1)b - 1) \leqslant 1 - (1 - b) = b.$$

由此得到 $n > 1$，且

$$[(n-1)a] = [na],\ [(n-1)c] = [nc],\ [(n-1)b] = [nb] - 1,$$

这表明，等式

$$[(n-1)a] + [(n-1)b] = [(n-1)c]$$

不成立。这就证明，a 和 b 至少有一个为 0，矛盾。因此，题中的结论是正确的。

8.17 取 $\lambda = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$，$\mu = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$，则 λ 和 μ 是二次方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个根。于是

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0,\ \mu^2 - 3\mu - 2 = 0.$$

上两式分别乘以 λ^n 和 μ^n，得到

$$\lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} - 2\lambda^n = 0,\ \mu^{n+2} - 3\mu^{n+1} - 2\mu^n = 0.$$

上两式相加，并记 $S_n = \lambda^n + \mu^n$，则有 $S_{n+2} - 3S_{n+1} - 2S_n = 0$。由此得到，$S_{n+2} \equiv S_{n+1} \pmod 2$。显然，$S_0 = 2$，$S_1 = 3$，$S_2 = 13$，因此当 $n \geqslant 1$ 时，$S_n \equiv 1 \pmod 2$。另一方面，因为 $-1 < \mu < 0$，所以，当 n 为奇数时，$[\lambda^n] = S_n$，当 n 为偶数时，$[\lambda^n] = S_n - 1$。于是，当 n 为奇数时，$[\lambda^n] = S_n \equiv 1 \equiv n \pmod 2$，当 n 为偶数时，$[\lambda^n] = S_n - 1 \equiv 0 \equiv n \pmod 2$。即 $[\lambda^n]$ 与 n 有相同的奇偶性。

第三章　　平面几何

§9 三　角　形

9.1 反证法。设不等边锐角$\triangle ABC$的高AH，中线BM与角平分线CL相交构成等边三角形。线段AH与BM，BM与CL，CL与AH的交点依次用P，Q，R表示，则在$\triangle CRH$中，$\angle CHR=90°$，$\angle CRH=60°$，从而$\angle RCH=30°$。其次，在$\triangle CMQ$中，$\angle QCM=\angle RCH=30°$，$\angle MQC=60°$（$\angle BQC=60°$是不可能的。否则$\angle ABC>\angle QBC=180°-\angle BQC-\angle QCB=90°$，即$ABC$是钝角三角形）。因此，$BM\perp AC$。于是中线$BM$也是$\triangle ABC$的高。因此

$$\angle BAC=\angle BCA=\angle ACL+\angle BCL=60°,$$

即$\triangle ABC$是等边三角形，矛盾。

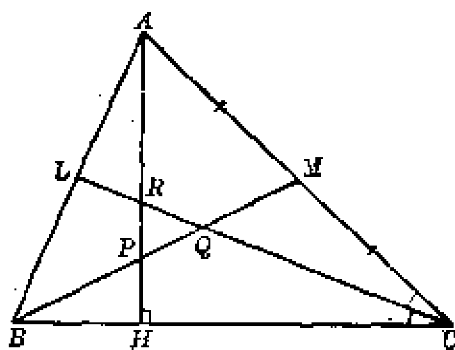


图 9.1

9.2 不妨设$a\leqslant b\leqslant c$。如果$c>b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{c^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{c^n}=0$，从而对充分大的$n$，$a^n+b^n>c^n$不成立。所以不存在边长为$a^n$，$b^n$，$c^n$的三角形。因此$b=c$，并且所有的三角形都是等腰的。

9.3 设$\triangle ABC$的内切圆圆心是O，它是三个内角平分线的交点，而傍心O_1，O_2，O_3分别是内角B和外角A，内角A和外角C，内角C和外角B的角平分线的交点(图9.2)。由此易知，点O_1,C,O_2，点O_2，B，O_3，点O_3，A，O_1各在一条直线上。下面证明$\angle O_1O_2O_3=\angle CO_2B$是锐角。在四边形$OBO_2C$中，$\angle OBO_2=\angle OCO_2=90°$，所以$\angle CO_2B+\angle BOC=180°$。于是

$$\angle CO_2B=\angle OCB+\angle OBC$$

$$=\frac{1}{2}\angle BCA+\frac{1}{2}\angle CBA<\frac{1}{2}\cdot180°=90°.$$

同理，$\angle O_2O_3O_1$和$\angle O_3O_1O_2$也是锐角。

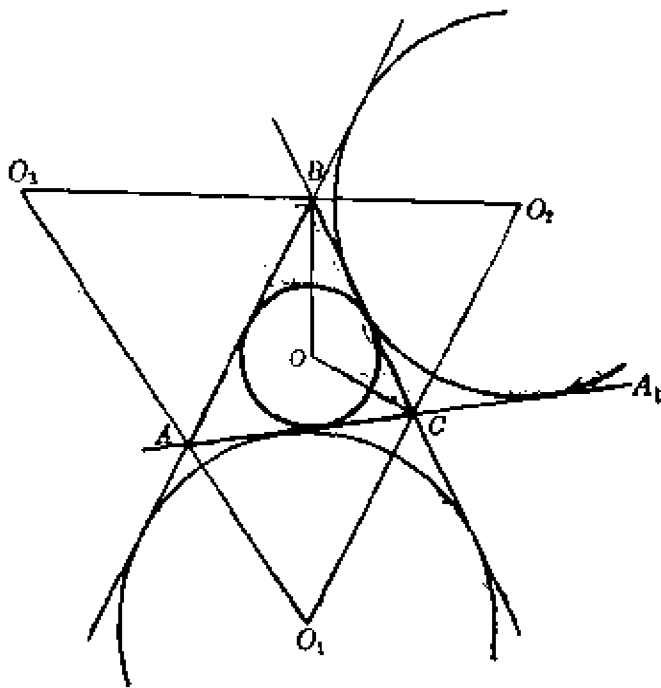


图 9.2

9.4 设m，$n\in N$满足题中条件，则$m=CE<AC=21$。又从$\triangle ADE$看出$21-m=AE<AD+DE=2m$，即$7<m<21$。另外，由于$AD=DE$，所以$\cos\alpha=\frac{AE}{2AD}=\frac{21-m}{2m}$，其中$\alpha=\angle BAC$，对$\triangle ABC$应用余弦定理，得到

$$n^2=BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha=33^2+21^2-2\cdot33\cdot21\cdot\frac{21-m}{2m}$$

$$=2223-\frac{27\cdot 49\cdot 11}{m}.$$

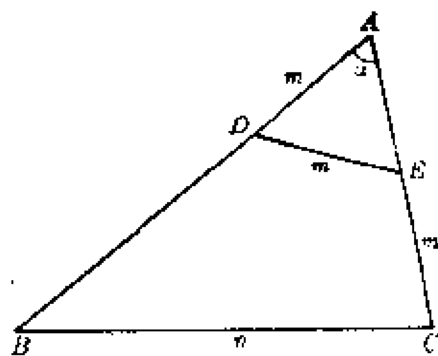


图 9.3

由此可知，m 是 $27\cdot 49\cdot 11$ 的因数。由于 $7<m<21$，所以 $m=9$ 或 $m=11$，当 $m=9$ 时，$n^2=606$，不可能。当 $m=11$ 时，$n^2=900$，即 $n=30$。经验证，当 $n=30$ 时，题中条件全部满足。

9.5 设 $a, b, c\in N$ 是直径为 $2R=6.25$ 的圆内接三角形的边长。其面积为 S，半周长 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$。因为 $a, b, c\leqslant 2R$，所以 $a, b, c\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，并且

$$(abc)^2=(4SR)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)(4R)^2.$$

由此得到，
$$64a^2b^2c^2=625(a+b+c)(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c).$$
因此 $64a^2b^2c^2$ 被 625 整除，从而 a, b, c 至少有两个等于 5，不妨设 $a=b=5$。则 $64c^2=(10+c)c^2(10-c)$。即 $64=100-c^2$，于是 $c=6$。因此所求的三个数只能是 5，5，6。容易验证，它确实符合题目的条件。

9.6 设 R 是外接于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的圆的半径。则由正弦定理，有

$$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\frac{BC+AC+AB}{2R}=\frac{p_1}{2R},$$

其中 p_1 是 $\triangle ABC$ 的周长。同理

$$\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F=\frac{p_2}{2R},$$

其中 p_2 是 $\triangle DEF$ 的周长。因此等式 $\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\sin\angle D+\sin\angle E+\sin\angle F$ 与等式 $p_1=p_2$ 是等价的。

9.7 设直线分别与 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 相交于点 K 和 M（图 9.4）。现在证明，

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+AC+BC}$$

当且仅当直线 KM 通过 $\triangle ABC$ 内切圆圆心时才能成立。其中 S_{ABC} 表示 $\triangle ABC$ 的面积。题中结论只是上述结论在条件 $S_{AKM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$ 下的特例。这是因为 $S_{AKM}=S_{KBCM}$ 等价于下述条件：$AK+AM=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$，而 $AK+AM+KM=KB+MC+BC+KM$。

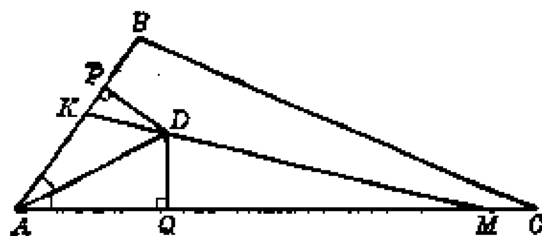


图 9.4

设 r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径。则 $2S_{ABC}=r(AB+BC+AC)$。另一方面，设 ρ 是圆心在 KM 上并与边 AK，AM 相切的圆的半径，则 $2S_{AKM}=\rho(AK+AM)$。因此，上面所说的等式与等式 $r=\rho$ 等价。而这当且仅当两个圆的圆心重合时才成立。

$$S_{B''OC''}=S_{BOC}+2S_{BOC'}+2S_{COB'}+4S_{B'OC'}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}S_{A''B''C''}&=S_{A''OB''}+S_{A''OC''}+S_{B''OC''}\\&=S_{ABC}+2(S_{AOB'}+S_{BOC'}+S_{COA'}+S_{A'OB}+S_{B'OC}+S_{C'OA})\\&\quad+4S_{A'B'C'}=3S_{ABC}+4S_{A'B'C}.\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

9.9 令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$. 则

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}),\quad \overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

而

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AC}^2)-3(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2)\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\frac{1}{3}((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2)\\&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0.\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

9.10 设 $\triangle ABC$ 的边界的重心和三角形本身的重心，亦即它的中线的交点 O 重合。用 a, b, c 分别表示边 BC, CA, AB 的长。用 A_1, B_1, C_1 表示它们的中点(它们也是这些边的重心)。则

$$a\cdot\overrightarrow{OA_1}+b\cdot\overrightarrow{OB_1}+c\cdot\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{0}.$$

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_1}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1},\end{aligned}$$

所以，

$$(a-c)\overrightarrow{OA_1}+(b-c)\overrightarrow{OB_1}=a\cdot\overrightarrow{OA_1}+b\cdot\overrightarrow{OB_1}+c\cdot\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{0}.$$

由于向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OB_1}$ 的线性无关，因此 $a=b=c$。这就证明了 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

9.11 利用下面的关系(图 9.6)

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}),$$

$$AB=AC,\quad \overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BC},$$

得到

$$12\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=(2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2$$

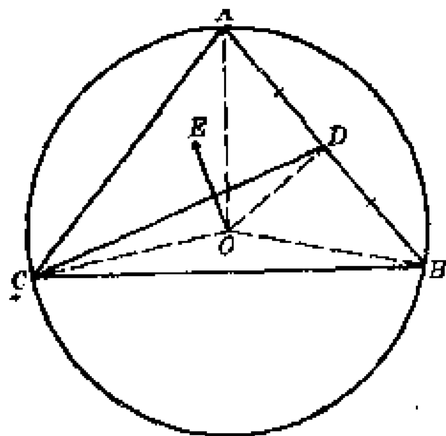


图 9.6

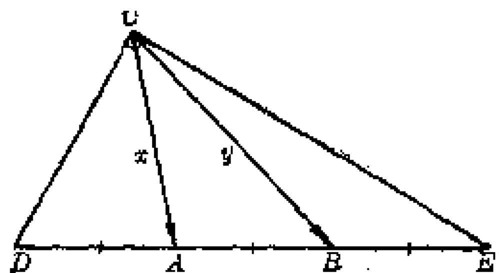


图 9.7

$$+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3R^2+R^2-4R^2+4\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=0.$$

其中 $R=OA=OB=OC$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。这表明，$OE\perp CD$。

9.12 记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{y}$（图 9.7）。则

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\ \overrightarrow{CE}=2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\ \overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},$$

而条件 $CD\perp CE$ 等价于 $(2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=0$，即 $5(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2$。后一条件表明，$\triangle ABC$ 的边 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$ 应满足 $5c^2=a^2+b^2$。这样的三角形当且仅当值 a，b 满足三角形不等式

$$|a-b|<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}<a+b,$$

即 $5(a-b)^2<a^2+b^2<5(a+b)^2$ 时才能存在。上式右端不等式当 a，$b>0$ 时成立，而左端不等式等价于 $(2a-b)(2b-a)>0$。因此答案为 $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$。

9.13 用复数表示平面上点的位置，并设 P_0 在原点。以 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，…依次表示序列 A，B，C，A，B，C…。于是，在第 k 步之后，将有

$$P_k=A_k+(A_k-P_{k-1})\,e^{\frac{\pi i}{3}},\ k=1,2,\cdots.$$

记 $u=e^{\frac{\pi i}{3}}$，则有（并反复利用上述递推公式）

$$P_k=(1+u)(A_k-uA_{k-1}+u^2A_{k-2}+\cdots+(-)^{k-1}u^{k-1}A_1).$$

由题中条件，有

$$0=P_0=P_{1986}=A_{1986}-uA_{1985}+u^2A_{1984}-\cdots+u^{1984}A_2-u^{1985}A_1.$$

因为 $A_1=A_4=A_7=\cdots$，$A_2=A_5=A_8=\cdots$，$A_3=A_6=A_9=\cdots$，所以上式化为

$$(1-u^2+u^6-\cdots-u^{1983})(A_3-uA_2+u^2A_1)=0,$$

即 $662(A_3-uA_2+u^2A_1)=0$。于是

$$A_3-A_1=u(A_2-A_1),$$

从而证得 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

9.14 取角 α，使得 $6\alpha<90°$，且 $\mathrm{tg}\alpha\in Q$。$\left(\text{适合 } \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{4} \text{ 的 } \alpha \text{ 即是一例。}\right)$则 $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$，$\mathrm{tg}3\alpha=\frac{\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}\alpha}$，

$$\cos\,2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},\ \sin\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 6\,\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2 3\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 3\,\alpha},\ \sin 6\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,3\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 3\,\alpha},$$

都是有理数。因此当直角 $\triangle A_1B_1C_1$ 适合 $\angle C_1=90°$，$\angle A_1=6\alpha$，$A_1B_1=1$，$A_1C_1=\cos 6\,\alpha$，$B_1C_1=\sin 6\alpha$ 时，各边长都是有理数。于是它相似于一个边长为整数的 $\triangle ABC$（例如当 $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{4}$ 时，$\triangle ABC$ 的边长为 $AB=4913$，$AC=495$，$BC=4888$）。另一方面，适合 $\angle C_2=90°$，$\angle A=2\alpha$，$A_2B_2=1$，$A_2C_2=\cos 2\,\alpha$，$B_2C_2=\sin 2\,\alpha$ 的三角形的各边长也都是有理数。因此可以借助圆规和直尺作出角 $2\alpha=\frac{1}{3}\angle A_1$，即将 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A$ 三等分。因为等于 $30°$ 的角同样也能作出，而 $\frac{1}{3}\angle B=\frac{1}{3}(\angle C-\angle A)=30°-2\,\alpha$，所以 $\triangle ABC$ 的每一个角都可以用圆规直尺三等分，从而 $\triangle ABC$ 满足所需的条件。

9.15 在 $\triangle ABC$ 中，记 $\alpha=\angle A$，$\beta=\angle B$，$\gamma=\angle C$，$a=BC$，$b=AC$，$c=AB$，R 为外接圆半径。等式 $BC=XY$ 当且仅当 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{YX}$，或者 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{XY}$ 时成立。由于

$$|\overrightarrow{XY}\pm\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CY}\pm\overrightarrow{BC}|$$

$$=\left|-\frac{c}{2\cos\beta}+a-\frac{b}{2\cos\gamma}\pm a\right|=R\left|-\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}+2(1\pm1)\sin\alpha\right|$$

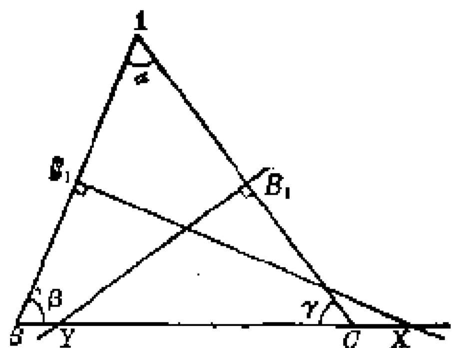


图 9.8

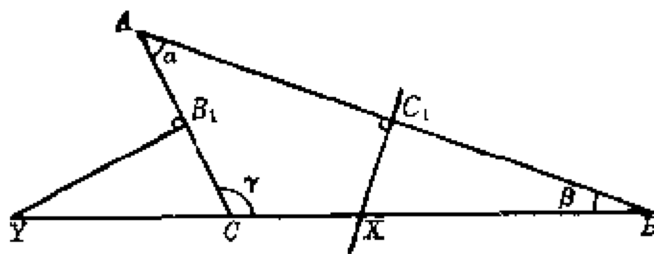


图 9.9

等价于 $2(1\pm1)\sin\alpha=\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$（"+"号相应于图 9.8 所示的情形，而"−"号相应于图 9.9 所示的情形）。通过计算

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin2\gamma+\sin2\beta}{2\cos\beta\cos\gamma}$$
$$=\frac{\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta)$$

得到等价条件 $2(1\pm1)=1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta$。它当且仅当 $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=3$ 或 $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=-1$ 时成立。因此 $M=\{-1,3\}$ 并且结论(1)得证。为证明 (2)，只须指出 $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=-1$ 的情形是可以实现的，例如取 $\alpha=\beta=30°$，$\gamma=120°$ 即可。

9.16 用 B_2 和 C_2 分别表示 AC 和 AB 边上高的垂足。通过比较，得

$$\triangle AB_1C\backsim\triangle AB_2B_1,\ \triangle ABB_2\backsim\triangle ACC_2,\ \triangle AC_1B\backsim\triangle AC_2C_1,$$

（每一对都是有相等锐角的直角三角形。图 9.10。）于是有

$$AB_1^2=AB_2\cdot AC=AC_2\cdot AB=AC_1^2.$$

由此便得到所需的等式 $AB_1=AC_1$。

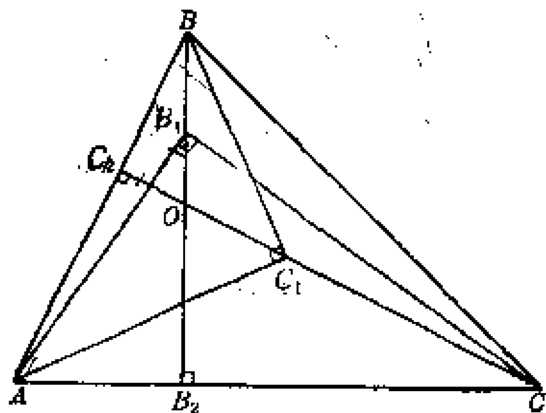


图 9.10

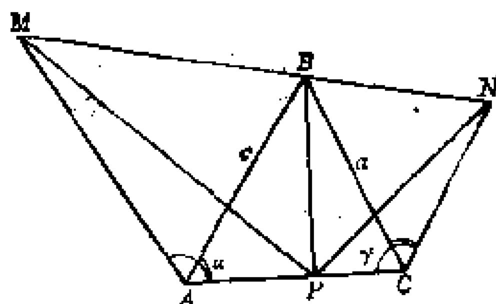


图 9.11

9.17 我们证明，$\triangle APM$ 与 $\triangle CPN$ 相似(图 9.11)，由此可得 $\angle APM=\angle CPN$，也即 $\angle MPB=\angle NPB$。设 $AB=c$，$BC=a$，$\angle BAC=\alpha$，$\angle BCA=\gamma$。在等腰 $\triangle AMB$ 中，$\angle MAB$ 是切线与弦 AB 的夹角，所以它的大小为圆周角 $\angle ACB$，即 $\angle MAB=\gamma$。因此 $\angle MAP=\alpha+\gamma$，且 $AM=\frac{c}{2\cos\gamma}$。同理，$\angle NCB=\alpha$，$\angle NCP=\gamma+\alpha$，$CN=\frac{a}{2\cos\alpha}$。另外还有 $AP=c\cos\alpha$，$PC=a\cos\gamma$。于是，在 $\triangle APM$ 与 $\triangle CPN$ 中，$\angle MAP=\angle NCP$，且 $\frac{AP}{AM}=2\cos\alpha\cos\gamma=\frac{CP}{CN}$。这就证明 $\triangle APM$ 和 $\triangle CPN$ 相似。

注： 只需对证明略加修改，即可证明，结论对钝角三角形也成立。

9.18 设 EF 依次和边 AB 与 AC 交于点 G 与 H，和 AD 交于点 M(图 9.12)。首先证明，EF 和 BC 平行。事实上，设 O 为圆心，连结 OB 和 OC，则由 $BD=DC$ 可知，直角 $\triangle OBD$ 和直角 $\triangle OCD$ 全等，因

此$\angle DBO=\angle DCO$。但$\angle DBE=2\angle DBO$，$\angle DCF=2\angle DCO$，所以$\angle DBE=\angle DCF$。于是等腰$\triangle DBE$和等腰$\triangle DCF$全等，从而$DE=DF$。因此$\triangle DEF$是等腰三角形，所以$\angle DEF=\angle DFE$。由于$\angle BDE$是弦DE的弦切角，$\angle DFE$是弦DE所对的圆周角，所以$\angle BDE=\angle DFE$。于是，$\angle DEF=\angle BDE$。这就证明，EF和BC平行。过点A作圆的切线，它和切线CF的延长线交于点N。由于AN和BC都垂直于AD，所以AN和BC平行，从而AN和EF平行。由于BC和EF平行，所以$\frac{MH}{CD}=\frac{AH}{AC}$，又由于$AN$和$EF$平行，所以$\frac{AH}{AC}=\frac{NF}{NC}$。于是，$\frac{MH}{CD}=\frac{NF}{NC}$，即$MH=\frac{CD\cdot NF}{NC}$。同理，由于$AN$和$EF$平行，所以$\frac{HF}{AN}=\frac{CF}{NC}$，即$HF=\frac{AN\cdot CF}{NC}$。但

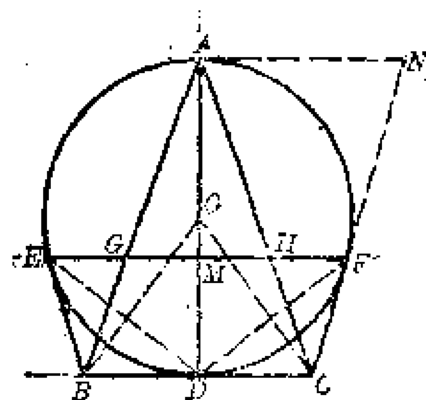


图 9.12

AN和NF是点N到圆的切线，所以$AN=NF$。同样，$CF=CD$。于是，$MH=\frac{CD\cdot NF}{NC}=\frac{CF\cdot AN}{NC}=HF$。同理可证，$EG=GM$。于是，$GH=GM+MH=EG+HF$。结论证毕。

注：本题用解析几何方法证明更简捷。

9.19 用A_2，B_2，C_2分别表示边BC、CA和AB上高的垂足。则有等式$AO\cdot A_2O=BO\cdot B_2O=CO\cdot C_2O$（第一个等式由$\triangle AOB_2$相似于$\triangle BOA_2$得到，第二个由$\triangle COB_2$相似于$\triangle BOC_2$得到）。其次，由于$B_1C_1$是$\triangle ABC$的中位线，所以它与$AA_2$的交点$Q$平分高线$AA_2$，并且$OQ\perp D_1D_2$。由勾股定理，有

$$AD_i^2=AQ^2+(R^2-OQ^2)$$
$$=R^2+(AQ-OQ)(AQ+OQ)\,(i=1,2)$$

其中R是圆的半径。不论点O在AA_2上的位置的情形，可以得到

$$AD_i^2=R^2\pm AO\cdot A_2O.$$

其中点O在$\triangle ABC$内部时，上式中取+号，否则取−号(例如在图9.13中所示的情形下，有$AQ-OQ=A_2Q-OQ=A_2O$，$AQ+OQ=AO$)。同理可证，

$$BE_i^2=R^2\pm BO\cdot B_2O,\ CF_i^2=R^2\pm CO\cdot C_2O.$$

由此即可得所要证明的结论。

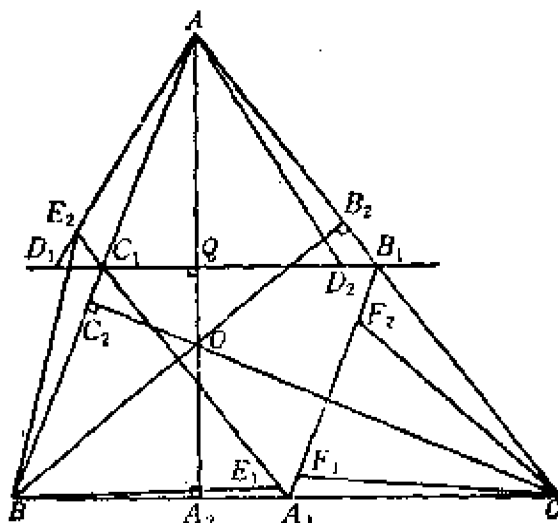


图 9.13

9.20 设E与F分别是线段AP和BP的中点。因为DE和DF是$\triangle APB$的中位线，所以四边形$DFPE$是平行四边形。由直角$\triangle APM$与直角$\triangle BPL$得到

$$ME=\frac{1}{2}AP=DF,\ LF=\frac{1}{2}BP=DE.$$

其次，$\angle PEM=2\angle EAM=2\angle FBL=\angle PFL$，$\angle PED=\angle PFD$。

根据两边一夹角法则，$\triangle DEM$与$\triangle DFL$全等(如图9.14所示情形下，有$\alpha=\angle PEM+\angle PED=\angle PFL+\angle PFD$，此时$\alpha<180°$。如果$\alpha>180°$，则$\angle PEM+\angle PED=\angle PFL+\angle PFD=360°-\alpha$。如果$\alpha=180°$，则直接有$DM=ME+DE=DF+LF=DL$)。由此即得$DM=DL$。

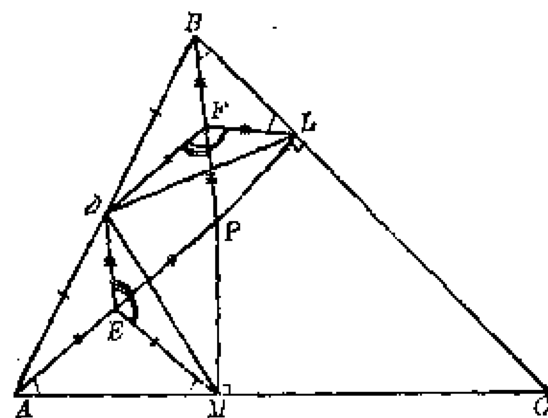


图 9.14

9.21 等边$\triangle ABC$的高上每个点都满足题中条件。例如设M_1是从顶点A引出的高上的点(图9.15)，则$\angle M_1AB+\angle M_1BC+\angle M_1CA=\angle M_1AB+\angle M_1BC+\angle M_1BA=\angle M_1AB+\angle ABC=90°$。下面证明，其它的点不合条件。否则，设点$M$满足题中条件，但不在任意一条高上，则直线$BM$分别与从顶点$A$与$C$引出的高交于点$M_1$与$M_2$。如果三个点$M$，$M_1$，$M_2$(肯定互不相同)都满足题中条件，则根

应有，$\angle MAM_1=\angle MCM_1$，$\angle MAM_2=\angle MCM_2$，但这时点$C$关于直线 BM 的对称点 C' 将在$\triangle AMM_1$的外接圆周上，同时也在 $\triangle AMM_2$ 的外接圆周上。因此这两个圆同时过三个不同的点 A，M、C' ($C'\neq A$，因为直线 BM 不与边 AC 垂直)。从而两圆重合。但这是不可能的，因为点 M，M_1，M_2 不可能在一个圆上。

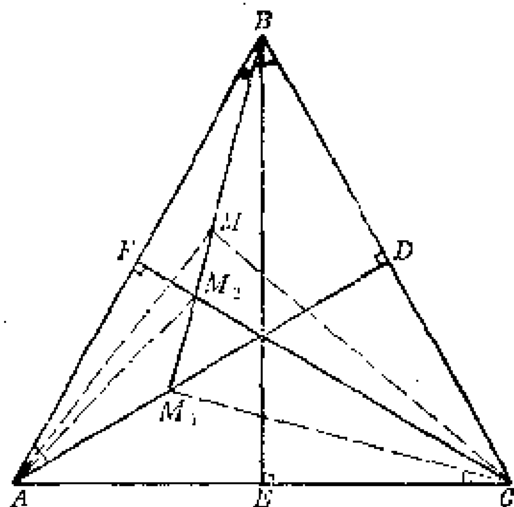


图 9.15

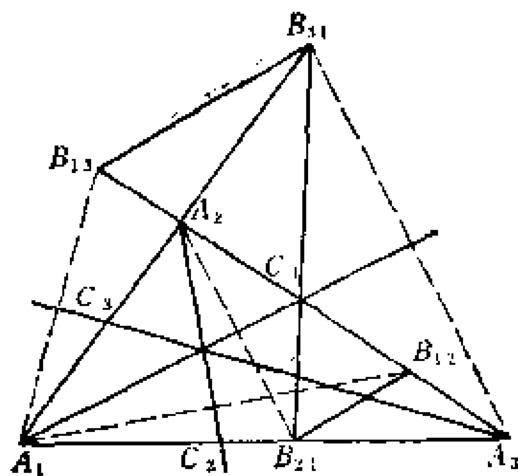


图 9.16

9.22 设 A_1C_1 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一条角平分线 (图9.16)。因为线段 A_2A_3 在关于直线 A_1C_1 的对称变换下的象是线段 $B_{21}B_{31}$，所以直线 A_2A_3 与 $B_{21}B_{31}$ 交于点 C_1。由角平分线的性质得到，

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{C_1A_2}{C_1A_3},$$

因此
$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1}=\frac{B_{12}A_2-C_1A_2}{B_{13}A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2-C_1A_2}{A_1A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}.$$

其中用到，$B_{12}A_2=A_1A_2$，$B_{13}A_3=A_1A_3$。同理可得 $\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$。因此 $\triangle B_{12}C_1B_{21}$ 与 $\triangle B_{13}C_1B_{31}$ 相似。所以 $B_{12}B_{21}\parallel B_{13}B_{31}$。同理可证 $B_{23}B_{32}\parallel B_{13}B_{31}$。

注：可以证明直线 $B_{12}B_{21}$，$B_{13}B_{31}$ 与 $B_{23}B_{32}$ 垂直于连接 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外心与内心的直线。

9.23 设点 A，L，B，M 依次分布在直线 AB 上 (图9.17，当这些点的次序为 M，A，L，B 时与此相仿)。则$\angle LCM=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$。且因为 $CL=CM$，所以$\angle CLM=45^\circ$ 因此，$2\angle BAC+\angle BCA=2$ ($\angle LAC+\angle LCA$) $=2\angle CLM=90^\circ$，且$\angle BAC+\angle BCA=180^\circ-\angle ABC$。从而 $\angle BAC=\angle ABC-90^\circ$。因为$\angle ABC$ 为钝角，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 AD 在三角形外部，又因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 是圆内接四边形的对角，因此，

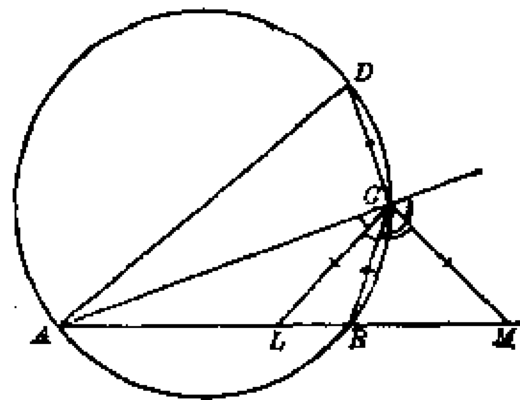


图 9.17

$$\angle DAC=(180^\circ-\angle ADC)-\angle ACD=\angle ABC-90^\circ=\angle BAC.$$

于是 $DC=BC$，并且 $4R^2=AD^2=AC^2+CD^2=AC^2+BC^2$。这正是所要证明的。

9.24 设 $\triangle ABC$ 的高 CH 与直线 BM 交于点E(图9.18)。则 $AE=BE$，而

$$\angle EAM=\angle EAB-\angle MAB=30^\circ-10^\circ=20^\circ,$$
$$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=40^\circ,$$
$$\angle EAC=\angle CAH-\angle EAB=(90^\circ-40^\circ)-30^\circ=20^\circ,$$
$$\angle AME=\angle MAB+\angle MBA=10^\circ+30^\circ=40^\circ.$$

由两角夹一边法则，$\triangle AME$ 与 $\triangle ACE$ 全等。因此 $AM=AC$，$\angle AMC=\angle ACM=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CAM)=70^\circ$。

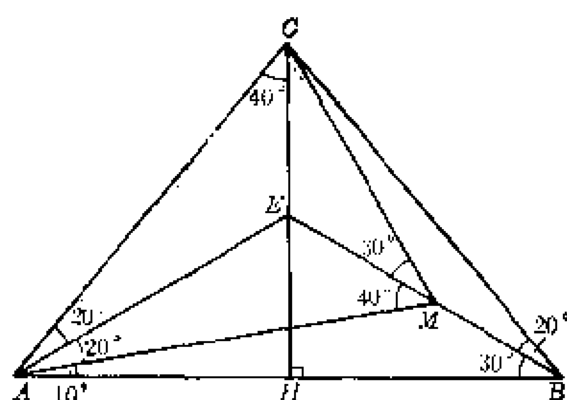


图 9.18

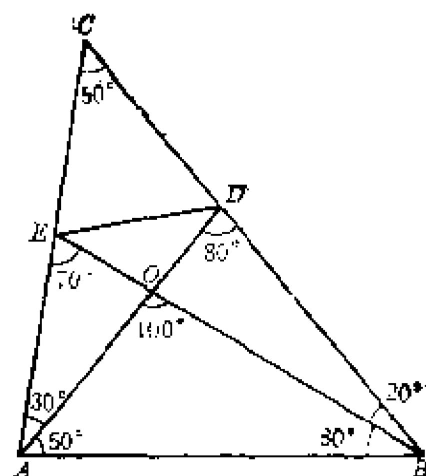


图 9.19

9.25 设O为直线AD与BE的交点(图9.19)，则

$$\angle AOB=180°-30°-50°=100°,\ \angle BDA=180°-50°-50°=80°,$$
$$\angle CBE=50°-30°=20°,\ \angle AEB=\angle CBE+\angle ECB=70°,$$
$$\angle CAD=180°-\angle ACB-\angle ABC-\angle BAD=30°.$$

根据正弦定理，

$$\frac{OD}{OB}=\frac{\sin 20°}{\sin 80°},\ \frac{OB}{OA}=\frac{\sin 50°}{\sin 30°},\ \frac{OA}{OE}=\frac{\sin 70°}{\sin 30°}.$$

由此得到

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OE}=\frac{\sin 20°\sin 50°\sin 70°}{\sin 80°\sin^2 30°}$$
$$=\frac{4\sin 20°\cos 40°\cos 20°}{\sin 80°}=\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\sin 80°}=\frac{\sin 80°}{\sin 80°}=1.$$

即$OD=OE$，且$\angle BED=\angle ODE=\frac{1}{2}(180°-\angle EOD)=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$.

9.26 如果C_1是点C关于直线AP的对称点（图9.20），则$C_1P=CP=2BP$，$\angle C_1PB=180°-\angle APC-\angle APC_1=180°-60°-60°=60°$．因为$\triangle C_1PB$相似于斜边为2、直角边为1的直角三角形．因此$\angle C_1BP=90°$，而$BA$是$\angle C_1BP$的平分线．因此与直线$C_1P$，$PC$，$C_1B$等距的点$A$位于$\angle PC_1D$的平分线上，其中点$D$位于线段$BC_1$中$C_1$一端的延长线上．于是$\angle ACB=\angle AC_1P=\frac{1}{2}(180°-\angle BC_1P)=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$.

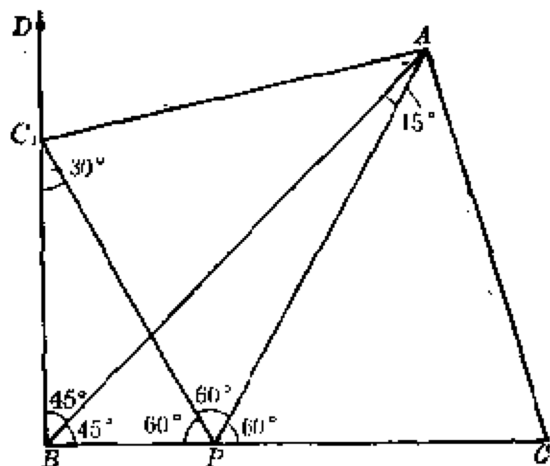


图 9.20

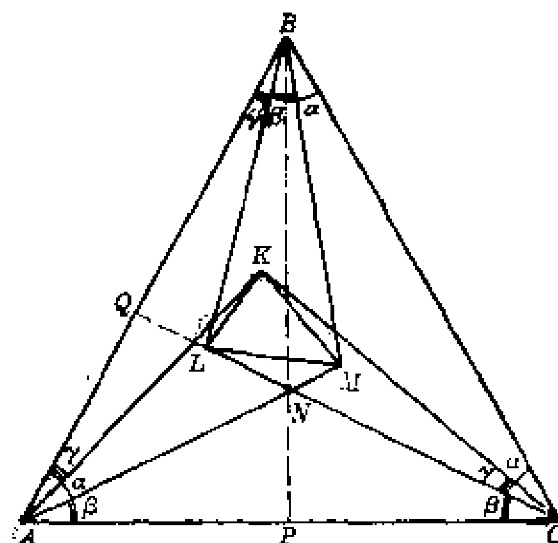


图 9.21

9.27 记$\alpha=20°$，$\beta=25°$，$\gamma=15°$(图9.21)，则$\alpha,\ \beta,\ \gamma<30°$，且$\alpha+\beta+\gamma=60°$．$\angle KAM=60°-\angle MAC-\angle KAB=\alpha$，同理，$\angle LBM=\beta$，$\angle KCL=\gamma$．设线段$AM$与$CL$交于点$N$，直线$BN$与

AC 交于点 P，且直线 CL 与 AB 交于点 Q. 由于 $AB=BC$ 与 $AN=NC$（因为 $\angle NAC=\angle NCA=\beta$），$\angle ANC$ 的平分线 BP 即是 $\angle LNM$ 的平分线. 在 $\angle LNM$ 内部且在 $\triangle LMN$ 外面取一点 B'，使它与直线 LN，LM 与 MN 距离相等. 这个点一定位于直线 NB 上，以及在 $\triangle LMN$ 中 $\angle NLM$ 与 $\angle LMN$ 的外角的平分线上. 因此

$$\angle LB'M=180^\circ-\angle B'LM-\angle B'ML=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle NLM}{2}-\frac{180^\circ-\angle NML}{2}$$

$$=\frac{\angle NLM+\angle NML}{2}=\frac{180^\circ-\angle LNM}{2}=\frac{\angle NAC+\angle NCA}{2}=\beta=\angle LBM.$$

因此，$B'=B$，且

$$\angle BLM=\angle BLQ=180^\circ-\angle CQB-\angle ABL=\angle ABC+\angle BCQ-\angle ABL$$

$$=60^\circ+\alpha+\gamma-\gamma=60^\circ+\alpha.$$

因为

$$\angle BLC=180^\circ-\angle LBC-\angle LCB=180^\circ-(\beta+\alpha)-(\alpha+\gamma)$$

$$=120^\circ-\alpha,$$

并注意 $\alpha<30^\circ$，所以 $\angle MLC=\angle BLC-\angle BLM=120^\circ-\alpha-(60^\circ+\alpha)=60^\circ-2\alpha$.

同理可证 $\angle KLB=60^\circ-2\alpha$.

于是 $\angle KLM=\angle BLC-\angle KLB-\angle MLC=(120^\circ-\alpha)-(60^\circ-2\alpha)-(60^\circ-2\alpha)=3\alpha$，

即 $\angle KLM=3\alpha=60^\circ$. 同理可证，$\angle LKM=3\beta=75^\circ$，$\angle KML=3\gamma=45^\circ$.

§10 圆

10.1 如果圆周上两个点是一条直径的两个端点，则这两点组成一个点对. 圆周上每个点恰属于一个点对. 将每个点对中一个点归到第一个集合，另一个点归到第二个集合. 因为任意一个内接直角三角形的斜边必是圆的直径，所以三角形中两个锐角的顶点分属不同的集合.

10.2 设正方形 $ABCD$ 内接于直径为 d 的圆，而点 P 在 AD 弧上(图 10.1). 记 $\alpha=\angle ACP$. 这时，如果 $AP=d\sin\alpha$，$CD=d\cos\alpha$ 是有理数，则 $BP=d\sin\angle PDB=d\sin(\angle ADB+\angle ADP)=d\sin(45^\circ+\alpha)=d(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(AP+CP)$ 就是无理数.

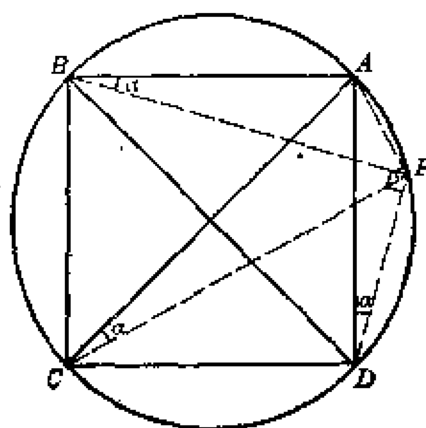


图 10.1

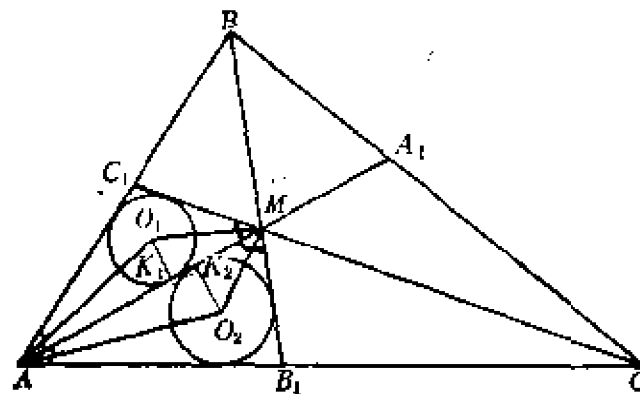


图 10.2

10.3 考虑以 O_1 与 O_2 为圆心，分别内切于 $\triangle AC_1M$ 与 $\triangle AB_1M$ 的两个等圆. 设它们与线段 AM 切于点 K_1 和 K_2(图 10.2). 则由于 $O_1K_1=O_2K_2$，$\angle O_1AK_1=\frac{1}{2}\angle C_1AM=\frac{1}{2}\angle B_1AM=\angle O_2AK_2$，所以直角 $\triangle AO_1K_1$ 与 $\triangle AO_2K_2$ 全等. 于是 $K_1=K_2$，并且直角 $\triangle O_1K_1M$ 与 $\triangle O_2K_2M$ 也全等. 因此，$\angle O_1MK_1=\angle O_2MK_2$，且 $\angle C_1MA=\angle B_1MA$. 从而 $\angle AC_1C=\angle AB_1B$（因为 $\triangle AC_1M$ 与 $\triangle AB_1M$ 有两对对应角相等），$\angle ABB_1=\angle ACC_1$（注意，$\triangle ABB_1$ 与 $\triangle ACC_1$），以及 $\angle ABC=\angle ACB$. 同理可以证明，$\angle ACB=\angle BAC$.

10.4 设题中结论不真，则在绕定圆圆心O按顺时针方向依次排列的七个点O_1，…，O_7都不和点O重合(图10.3)。因为$\angle O_1OO_2$，$\angle O_2OO_3$，…，$\angle O_7OO_1$之和等于360°，所以其中必有一个小于60°。不妨设$\angle O_1OO_2<60°$。如果$\angle O_1OO_2=0$，则$O_1O_2<1$，不可能。设$\angle OO_1O_2$是$\triangle O_1OO_2$中其它两个角中较大者，则$\angle OO_1O_2>60°>\angle O_1OO_2$。因而$O_1O_2<O_2O<1$，与题中条件矛盾。

10.5 设题中结论不真，则存在一个点O，它属于所有六个圆。用O_1，O_2，…，O_6表示这些圆的圆心，并且它们是绕点O按顺时针方向排列的。(见图10.3，根据条件，点O不可能是其中某个圆的圆心)。因为$\angle O_1OO_2$，$\angle O_2OO_3$，…，$\angle O_6OO_1$之和为360°，所以其中至少有一个不超过60°。不妨设$\angle O_1OO_2\leqslant 60°$。又设$\angle OO_1O_2$是$\triangle O_1OO_2$中其它两个角中较大者(如果$\angle O_1OO_2=0$，则立即有$O_2O\geqslant O_2O_1$)。则$\angle OO_1O_2\geqslant 60°\geqslant\angle O_1OO_2$，因此$O_2O\geqslant O_2O_1$。于是以$O_2$为圆心的圆含点$O$与另一个圆的圆心$O_1$，与题中条件矛盾。

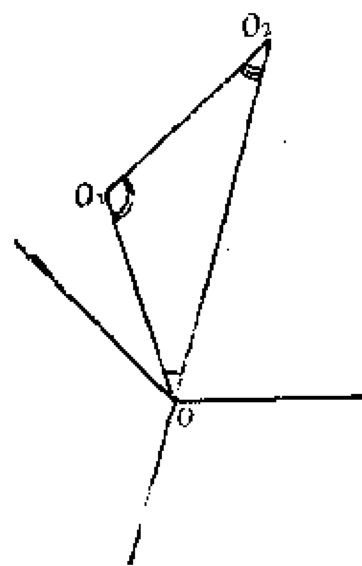


图 10.3

10.6 如图10.4所示，记三圆圆心为A，B，C。设O为$\triangle XYZ$内的任一点，那么$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$中至少有一个不小于120°，不妨设$\angle AOB\geqslant 120°$，为了证明本题只需证明$|AO|+|OB|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}|AX|+\frac{2}{\sqrt{3}}|XB|=\frac{2}{\sqrt{3}}|AB|$。而这只需应用余弦定理及平均值不等式即可。因为

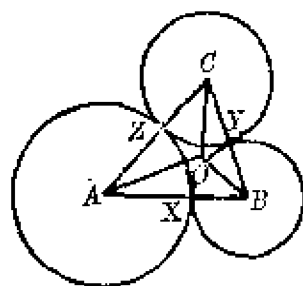


图 10.4

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|AO|^2+|OB|^2-2|AO|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB\\&\geqslant|AO|^2+|OB|^2+|AO|\cdot|OB|\\&=(|AO|+|OB|)^2-|AO|\cdot|OB|\geqslant\frac{3}{4}(|AO|+|OB|)^2,\end{aligned}$$

即得所欲证的不等式。

10.7 设圆的集合是有限的，则以O为圆心且有最小半径r的圆和以O_1，O_2，…，O_6为圆心，半径分别为r_1，r_2，…，r_6的圆相切，其中设圆心O_1，O_2，…，O_6是按顺时针方向排列的。在$\triangle O_1OO_2$中，边$O_1O_2\geqslant r_1+r_2$是最大的。因此，$\angle O_1OO_2\geqslant 60°$。同理可得$\angle O_2OO_3\geqslant 60°$，…，$\angle O_6OO_1\geqslant 60°$。但上述六个角之和为360°，所以每个角是60°，并且$\triangle O_1OO_2$，$\triangle O_2OO_3$，…，$\triangle O_6OO_1$中其他每一个角也是60°，即这些三角形都是等边三角形。因此，$r=r_1=\cdots=r_6$。由于(比如说)以O_1为圆心的圆也具有最小半径，所以同理可证，它一定与一个以直线OO_1上的点$O_7\neq O$为圆心且半径相等的圆相切。同样，后一个圆又与一个圆心在同一直线上的点$O_8\neq O_1$且半径相等的圆相切。如此继续。于是，圆的集合是无限的。结论证毕。

10.8 给定$\triangle ABC$。构造一个与它相似的$\triangle A'B'C'$，使得它存在题中所说的圆(于是，原三角形相应的圆的存在性也就得到证明)。为此，分别以A，B，C为圆心，以$\triangle ABC$的外接圆半径为半径作三个圆，则这些圆周有唯一公共点，它与顶点A，B，C的距离相等。这些圆的三条公切线便构成所需的相似于$\triangle ABC$的$\triangle A'B'C'$(因为$A'B'\parallel AB$，$B'C'\parallel BC$，$A'C'\parallel AC$。见图10.5)。

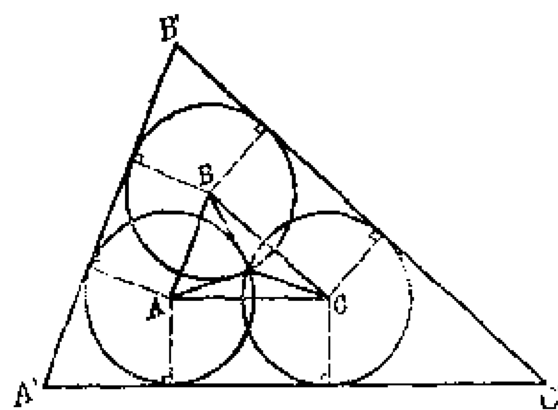


图 10.5

10.9 考虑以P为中心并将点B与C所在的圆周变为另一个圆周的位似变换。在这个变换下，点B与C分别变为直线BP与CP上的点B'，C'。因此，弧$B'A$与弧$C'A$相等，即圆周角$B'PA$与$C'PA$要么相等(在内切情形，如图10.6所示)，要么互为补角(在外切的情形，如图10.7所示)。亦即$\angle BPA$与$\angle C'PA$相等。在两种情形下，直线PA分别是$\angle BPC$或$\angle BPC'$的平分线。

图 10.6

图 10.7

10.10 设线段 PQ 与题中所说的以 O 为圆心的圆相切（点 O 与等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的中点重合）。记 $\angle PBO=\angle QCO=\alpha$，$\angle BPO=\angle QPO=\beta$，$\angle CQO=\angle PQO=\gamma$。(图 10.8)。则从四边形 $CBPQ$ 得到，

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ,$$

即
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

因此 $\triangle BPO$ 与 $\triangle COQ$ 相似（因为三个对应角相等）。于是，

$$BP\cdot CQ=BO\cdot OC=\frac{BC^2}{4}.$$

现在设线段 $P'Q'$ 与所说的圆不相切。在边 AB 与 AC 上分别取点 P 与 Q，使得线段 PQ 平行于 $P'Q'$，并且与圆相切。则由上面的证明，有

$$\frac{BC^2}{4}=BP\cdot CQ\neq BP'\cdot CQ'.$$

结论证毕。

图 10.8

10.11 如图 10.9 所示，以点 O 为圆心的圆的内接四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 垂直，F 是边 AB 的中点，OG 垂直于边 DC。欲证的是，$FE=OG$。在 $\triangle ABE$ 中，$\angle AEB$ 为直角，所以，$\angle EAB+\angle EBA=90^\circ$。同样，在$\triangle GHC$ 中，$\angle HGC$是直角，所以，$\angle GHC+\angle GCH=90^\circ$。由于 $\angle EBA=\angle GCH$，因此 $\angle EAB=\angle GHC$。又因为 $AF=FB=EF$，$\angle EAB=\angle AEF$，且 $\angle GHC=\angle EHO$，所以 $\angle AEF=\angle EHO$，从而 EF 和 GO 平行。同理可证，$\angle DEG=\angle EIO$，EG 和 FO 平行。于是，$EGOF$ 是平行四边形，从而 $FE=OG$。结论证毕。

图 10.9

10.12 设 a 为正方形的边长，R 是以 O 为圆心的半圆的半径，r是内切于 $\triangle ABC$ 的圆的半径，$\alpha=\angle AON<90^\circ$，且 $\angle COB\leqslant 90$ (图 10.10)。则 $a^2=NK^2=ON^2-KO^2=R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$。由此得到，$a=\frac{2R}{\sqrt{5}}$。由于正方形与$\triangle ABC$ 的面积相等，所以$\triangle ABC$ 的高 $CH=\frac{4R}{5}$。下面证明，ON 是$\angle AOC$ 的平分线。事实上，因为 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以$\alpha>45^\circ$，从而 $2\alpha>90^\circ$，$\angle AOC>90^\circ$。于是，

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$
$$=\sin\angle COB=\sin\angle AOC.$$

所以 $\angle AOC=2\alpha$，且 $\angle AON=\angle CON$。由于圆周角 ABN 和 CBN 所对的弧相等，所以 BN 是 $\angle ABC=\alpha$ 的平分线，且过直角 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心，内切圆的半径为

图 10.10

$$r=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=\frac{1}{2}\cdot 2R(\sin\alpha+\cos\alpha-1)=R\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right).$$

另一方面，由于 $\triangle NKB$ 与 $\triangle PLB$ 相似，所以

$$PL=\frac{NK\cdot LB}{KB}=R\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=R\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$$

$$=R\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)=r.$$

于是，直线 BN 与 LM 的交点 P 即是这个内切圆的圆心。

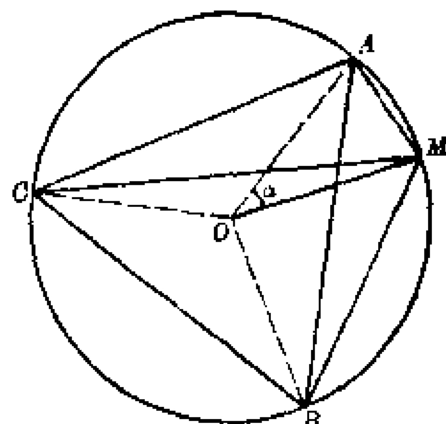


图 10.11

10.13 不妨设点 P 在以 O 为圆心且半径为 R 的外接圆周中的弧 AB 上(图 10.11)。记 $\angle AOM=\alpha$，则

$$MA=2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$MB=2R\sin\frac{1}{2}(\angle AOB-\angle AOM)$$

$$=2R\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$MC=2R\sin\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle AOM)=2R\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right),$$

因此

$$\frac{MA^4+MB^4+MC^4}{R^4}=16\left(\sin^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^4\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$=4((1-\cos\alpha)^2+(1-\cos(120^\circ-\alpha))^2+(1-\cos(120^\circ+\alpha))^2)$$

$$=12-8(\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha))$$

$$+4(\cos^2\alpha+\cos^2(120^\circ-\alpha)+\cos^2(120^\circ+\alpha))$$

$$=12-8\cos\alpha-8.2\cos\alpha\cos 120^\circ+2((1-\cos 2\alpha)$$

$$+(1-\cos(240^\circ-2\alpha))+(1-\cos(240^\circ+2\alpha)))$$

$$=12-8\cos\alpha+8\cos\alpha+6-2\cos 2\alpha-2\cdot 2\cos 240^\circ\cos 2\alpha$$

$$=18-2\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha=18,$$

它与点 M 的选取无关。

10.14 (1) 由题中条件，

$$AB+CD=AD+BC,$$

因此四边形 $ABCD$ 有内切圆。

(2) 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 全等，因此 $\angle B=\angle D$，所以，当且仅当 $\angle B=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$，即 $\angle B=\angle 90^\circ$ 且 $AB\perp BC$ 时，四边形 $ABCD$ 有外接圆。

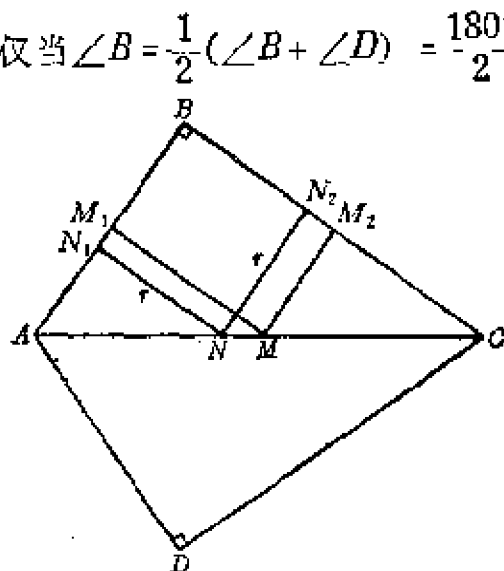


图 10.12

(3) 设以 N 为圆心的内切圆和边 AB 与 BC 分别相切于点 N_1 与 N_2 两点。而外接圆圆心 M 在边 AB 与 BC 上的投影为 M_1 与 M_2(图 10.12)。注意，点 N 与 M 都在四边形 $ABCD$ 的对称轴 AC 上。记 $AB=x$，$BC=y$。由于 $\triangle AN_1N$ 与 $\triangle ABC$ 相似，所以有

$$\frac{x}{y}=\frac{AB}{BC}=\frac{AN_1}{N_1N}=\frac{x-r}{r},$$

即 $$xy=r(x+y).$$

其次，由 $$x^2+y^2=AB^2+BC^2=AC^2=(2R)^2,$$

得到 $$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=4R^2+2r(x+y),$$

因此 $$x+y=r+\sqrt{r^2+4R^2}.$$

最后，由投影的性质得到，

$$NM^2=N_1M_1^2+N_2M_2^2=\left(BN_1-\frac{AB}{2}\right)^2+\left(BN_2-\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$=\left(r-\frac{x}{2}\right)^2+\left(r-\frac{y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{4}-r(x+y)+2r^2$$

$$=R^2-r(r+\sqrt{r^2+4R^2})+2r^2=R^2+r^2-r\sqrt{r^2+4R^2}.$$

这正是所要证明的。

注：问题(3)中的等式对同时具有内切圆与外接圆的任意四边形都成立。

10.15 设正方形的顶点分别在半径为 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ 的同心圆周上. 则由定理 29, 下列等式必有一个成立：

$$a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2+(a+3d)^2,$$

$$a^2+(a+2d)^2=(a+d)^2+(a+3d)^2,$$

$$(a+d)^2+(a+2d)^2=a^2+(a+3d)^2.$$

但对任意 a, $d>0$, 上述各式左边总是小于右边的。

10.16 用 L 表示圆周与直线 QS 的不同于 M 的另一个交点(图 10.13), 则

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MS}-\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{QB},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MQ}.$$

因此, 由定理 71 得到

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QB}$$

$$+\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QB}$$

$$=ab-cd=0,$$

其中 $MQ=a$, $QL=b$, $AQ=c$, $QB=d$, 这证明 $PQ\perp RS$. 设直线 RS 和直线 PQ 与 BD 分别交于点 T 和 E, 又设 F 是直线 BD 与 QS 的交点, 则由不同三角形的相似性, 有

图 10.13

$$QF=\frac{PQ\cdot AD}{BA}=\frac{d(b-a)}{c+d},$$

$$FS=QS-QF=(b-a)-\frac{d(b-a)}{c+d}=\frac{c(b-a)}{c+d},$$

$$\frac{RE}{ES}=\frac{PR}{FS}=\frac{a(c+d)}{c(b-a)}.$$

另一方面, 有

$$RT\cdot RS=RM\cdot RP,$$

$$TS\cdot RS=QS\cdot MS.$$

因此,
$$\frac{RT}{TS}=\frac{RM\cdot RP}{QS\cdot MS}=\frac{d(c+d)}{b(b-a)}=\frac{a(c+d)}{c(b-a)}=\frac{RE}{ES}.$$

$\left(因为\frac{d}{b}=\frac{a}{c}\right)$. 于是点 T 与 E 分线段 RS 为相等的比, 从而, 它们重合。这就表明, 直线 PQ, RS, BD 交于一点。

10.17 设内切圆和边 AB 与 AC 分别相切于点 E 与 F, 而旁切圆与边 BC 相切于 L, 并和边 AB 与 AC 的延长线相切于点 M 与 N (图 10.14). 则

图 10.14

$$2DB=DB+BE=CB-CD+AB-AE=CB+AB-CF-AF=CB+AB-CA,$$

$$2CL=CL+CN=CB-LB+AN-AC=CB-BM+AM-AC=CB+AB-AC.$$

所以 $DB=\frac{1}{2}(CB+AB-AC)=CL$, 即线段 BC 的中点与线段 LD 的中点重合。设点 D' 是内切圆周上点 D 的对径点, 而直线 $C'B'$ 与该圆周相切于 D'. 现在考虑以 A 为中心, 将旁切圆周变到内切圆周的位似变

换。在这一变换下，点L变到点D'。因此点L, D', A同在一条直线上，而线段LD, $D'D$, AD的中点也同在一条直线，即$\triangle ADL$中平行于边AL的中位线上，这正是所要证明的。

10.18 设D是两圆的切点，且$\triangle ABC$是二圆中大圆的内接等边三角形，不妨设点D在弧AB上（图10.15）。下面证明，$DC=DA+DB$。为此在线段DC上取一点M，使得$AD=DM$（注意$DC\geqslant BC=AB\geqslant AD$）。因为$\triangle ADM$是等腰的，且$\angle ADM=\angle ABC=60°$，所以$\triangle ADM$为等边的。因此，当绕$A$点旋转60°时，点$D$就变为点$M$，而点$B$变为点$C$。于是$BD=MC$，且$DC=DM+MC=AD+DB$。设$R$与$r$分别是大圆与小圆的半径，$l_A$、$l_B$、$l_C$分别为由点$A$、$B$、$C$引出的与小圆相切的线段的长度，而$A'$是直线$AD$与小圆相交的不同于$D$的交点（这是当$A\neq D$时的情形。

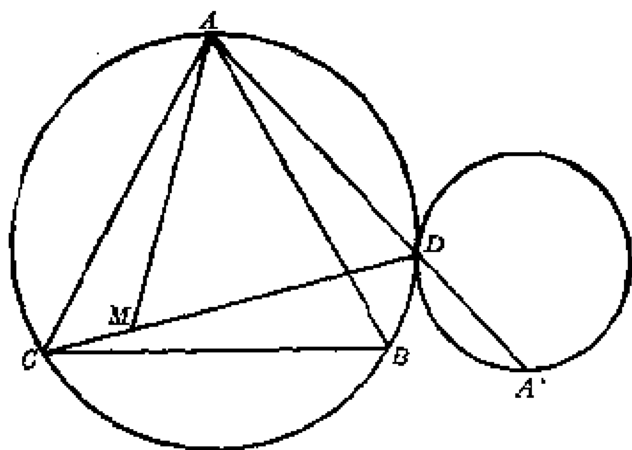


图 10.15

如果$A=D$，则$A'=D$）。则点A'可以由点A通过以D为中心，比例系数为$\pm\frac{r}{R}$的位似变换得到（如果两圆外切，则取"－"号。如果内切，则取"＋"号）。因此

$$AA'=AD\pm DA'=AD\left(1\pm\frac{r}{R}\right),$$

根据切割线定理，有

$$l_A=\sqrt{AD\cdot AA'}=AD\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}.$$

同理可证，

$$l_B=BD\sqrt{1\pm\frac{r}{R}},\ l_C=CD\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}.$$

由此便得到所需的等式。$l_C=l_A+l_B$。

10.19 因为$\angle PCB<\angle PCA=180°-\angle PBA<180°-\angle PBC$（见图10.16），所以在线段$BC$上存在一点$N$，使得$\angle PNB=\angle PCA$。于是，由$\angle PBC=\angle PAC$且$\angle PCB=\angle PAB$，$\angle PNC=180°-\angle PNB=\angle PBA$，有$\triangle BPN\backsim\triangle APC$，且$\triangle CPN\backsim\triangle APB$。注意，$PK$是$\triangle BPN$与$\triangle CPN$的高，$PL$与$PM$分别是与它相似的$\triangle APC$与$\triangle APB$的高，由此得到

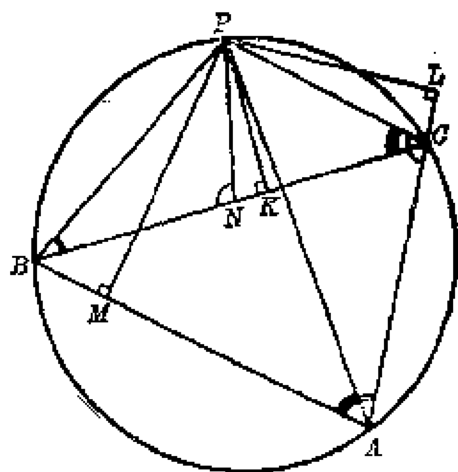


图 10.16

$$\frac{AC}{PL}=\frac{BN}{PK},\ \frac{AB}{PM}=\frac{CN}{PK}.$$

从而，

$$\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}=\frac{BN+CN}{PK}=\frac{BC}{PK}.$$

这正是所要证明的。

10.20 因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以它的外接圆圆心O在$\triangle ABC$内部。连接OA, OB, OC, OD, OE, OF，并过点A作切线PQ（图10.17），设AD, BE, CF是$\triangle ABC$的高，则B, C, E, F四点共圆。因此$\angle QAE=\angle ABC=\angle AEF$，从而$EF\parallel PQ$。由$OA\perp PQ$得到，$OA\perp EF$。同理可得，$OC\perp ED$，且$OB\perp DF$。因为点$O$在$\triangle ABC$内部，所以，

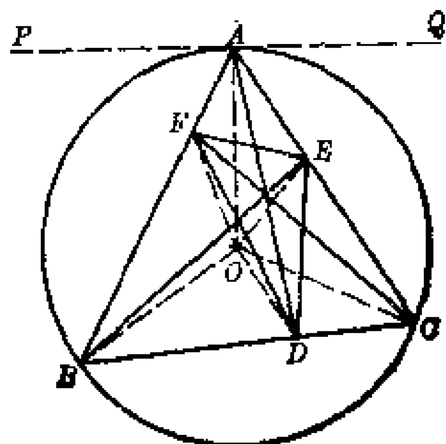


图 10.17

$$S_{ABC}=S_{OEAF}+S_{OFBD}+S_{ODCE}$$

$$=\frac{1}{2}OA\cdot EF+\frac{1}{2}OB\cdot FD+\frac{1}{2}OC\cdot ED=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE).$$

其中R是$\triangle ABC$的外接圆半径。

反之，设 $S_{ABC}=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)$。如果 $OA\perp EF$ 不成立，则 $S_{OEAF}<\frac{1}{2}OA\cdot EF$。但是 $S_{OFBD}\leqslant\frac{1}{2}OB\cdot FD$，$S_{ODCE}\leqslant\frac{1}{2}OC\cdot ED$。因此 $S_{ABC}<\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)$，与假设矛盾。所以 $OA\perp EF$，即 $PQ\parallel EF$。从而 $\angle AEF=\angle EAQ=\angle ABC$。于是 E, F, B, C 四点共圆。同理 F, D, C, A 四点与 D, E, A, B 四点分别共圆。所以 $\angle AEB=\angle ADB$，$\angle BEC=\angle BFC$，$\angle AFC=\angle ADC$。由此得到

$$\angle AEB=\angle ADB=\angle BEC=\angle BFC=\angle AFC=\angle ADC=90^\circ.$$

这就证明，AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的高。

10.21 (1) 如图1.18所示记 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线的交点为 I。因为 $\angle BIA_1=\alpha+\beta=\angle IBA_1$，而

$$\angle A_0BA_1=90^\circ-(\alpha+\beta)=\angle BA_0A_1,$$

所以 A_1 为 A_0I 的中点。于是得到

$$S_{A_0BI}=2S_{A_1BI}.$$

将类似得到的六个等式相加即得到所欲证的等式。

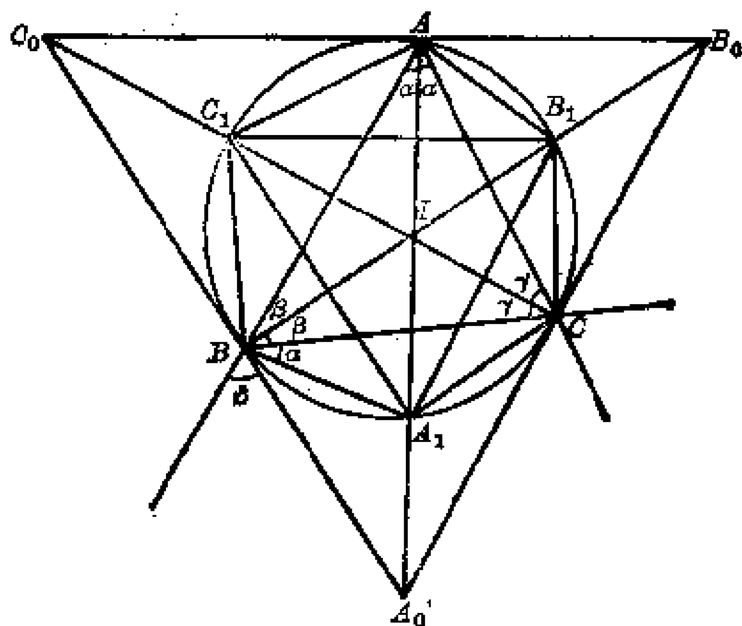


图 10.18

(2) 注意，$\angle B_1A_1C_1=\beta+\gamma$，$\angle C_1B_1A_1=\alpha+\gamma$，$\angle A_1C_1B_1=\alpha+\beta$，

而 $\sin(\beta+\gamma)\geqslant2\sqrt{\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\sin\beta}$，

$\sin(\alpha+\gamma)\geqslant2\sqrt{\sin\alpha\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma}$，

$\sin(\alpha+\beta)\geqslant2\sqrt{\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta}$。

再由定理75之(8)，得

$$\begin{aligned}S_{A_1B_1C_1}&=2R^2\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta)\\&\geqslant2R^2\cdot2^3\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\\&=2R\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma\\&=S_{ABC}.\end{aligned}$$

10.22 (1) 在题设的条件中，记 $\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$（图10.19）。则有

$$\angle DAB=\angle DAC=\frac{\alpha}{2}.$$

从而，$BD=DC$。因为

$$\angle ODC=\angle ABC=\beta,\ \angle OCD=\angle OCB+\angle BCD=\frac{1}{2}\angle ACB+\angle BAD=\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

所以

$$\angle COD=180^\circ-\beta-\frac{(\alpha+\gamma)}{2}=\alpha+\gamma-\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2}=\angle OCD,$$

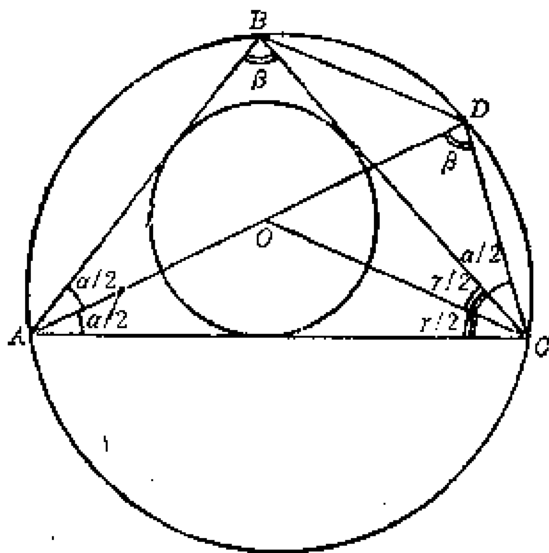


图 10.19

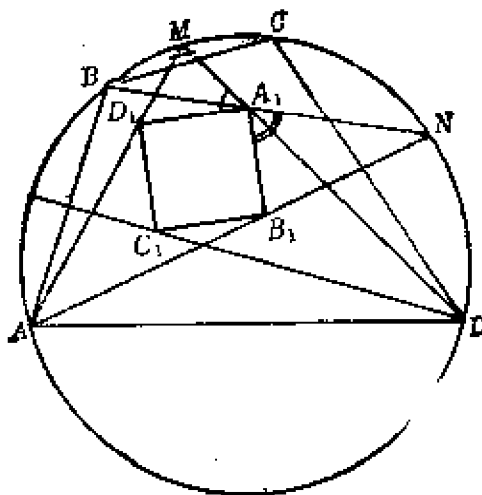


图 10.20

因而 $DO=OC$，等式得证。

(2) 在题设的条件中，记 $\widehat{AD}=2\alpha$，$\widehat{AB}=2\beta$，$\widehat{BC}=2\gamma$，$\widehat{CD}=2\delta$。M 与 N 分别表示弧 BC 与 CD 的中点。则点 D_1 与 B_1 分别在线段 AM 和 AN 上，而 A_1 是线段 BN 与 DM 的交点(图 10.20)。由(1)，有

$$MD_1=MB=MC=MA_1.$$

因此 $\triangle D_1MA_1$ 是等腰的，且

$$\angle D_1A_1M=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AMD)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

同理可得，

$$\angle B_1A_1N=90^\circ-\frac{\beta}{2}.$$

因为
$$\angle DA_1N=\angle BA_1M=\frac{\gamma+\delta}{2},$$

所以
$$\begin{aligned}\angle D_1A_1B_1&=180^\circ-\angle D_1A_1M-(\angle B_1A_1N-\angle DA_1N)\\&=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\gamma+\delta}{2}\\&=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=90^\circ.\end{aligned}$$

同理可证，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的其他三个角也都是直角。

10.23 首先证明，线段 A_1H_1 的中点与 A_2H_2 的中点重合。为此，过点 A_3 作一条与 A_3A_4 垂直的直线，并且用 K 表示该直线与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圆相交的不同于 A_3 的那个交点 (图 10.21) 因为 $A_2H_1\perp A_3A_4$，所以 $A_2H_1\parallel KA_3$。又因为 $A_3H_1\perp A_2A_4$，且 KA_4 是直径，$\angle KA_2A_4=90^\circ$。所以 $A_3H_1\parallel KA_2$。因此 $KA_2H_1A_3$ 是平行四边形，从而 $\overrightarrow{A_2H_1}=\overrightarrow{KA_3}$。同理可证 $A_1H_2A_3K$ 也是平行四边形，因此 $\overrightarrow{A_1H_2}=\overrightarrow{KA_3}$。于是 $\overrightarrow{A_2H_1}=\overrightarrow{A_1H_2}$，并且线段 A_1H_1 与 A_2H_2 是平行四边形 $A_1H_2H_1A_2$ 的对角线，且被它们的交点平分，同理可证，线段 A_2H_2 的中点与 A_3H_3 的中点重合，线段 A_3H_3 的中点与 A_4H_4 的中点重合。因此，四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 在关于上述四条线段的公共中点的中心对称变换下变为四边形 $H_1H_2H_3H_4$。这就证明了题中的结论。

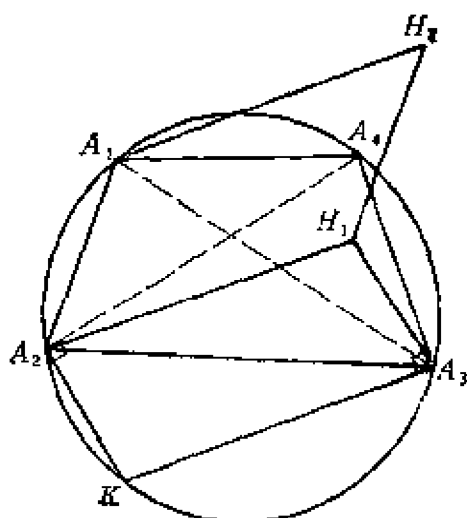


图 10.21

10.24 (1) 设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于以 O 为圆心，且半径为 R 的圆。设点 O 在弦 A_1A_3，A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_1 上的投影分别为点 H_0，H_1，H_2，H_3，H_4。记 $h_i=OH_i$，$i=0, 1, \cdots, 4$。设 S_1，S_2，与 p_1，p_2 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle A_3A_4A_1$ 的面积与半周长，r_1，r_2 为它们的内切圆半径。考虑含点 O 的三角形(如果它存在，即如果点 O 是在原四边形内部)。为确定起见，设点 O 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中 (图 10.22)。对内接四边形 $A_3H_0OH_2$，$A_1H_1OH_0$，$A_2H_2OH_1$ 应用托勒玫定理(定理 69)，并注意到 H_0H_2，H_0H_1，H_1H_2 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的中位线，可以得到

$$\begin{aligned}(R+r_1)p_1&=R\cdot H_0H_2+R\cdot H_0H_1+R\cdot H_1H_2+S_1\\&=(h_0\cdot H_2A_3+h_2\cdot H_0A_3)+(h_0\cdot H_1A_1+h_1\cdot H_0A_1)\\&\quad+(h_2\cdot H_1A_2+h_1\cdot H_2A_2)+\frac{1}{2}(h_1\cdot A_1A_2+h_2\cdot A_2A_3+h_0\cdot A_3A_1)\\&=(h_1+h_2+h_0)p_1,\end{aligned}$$

从而
$$R+r_1=h_1+h_2+h_0.$$

现在考虑外接圆圆心 O 在三角形外部的情形。在这种情形下，恰有一个顶点与点 O 分别在由其对边分成的不同的半平面上。为确定起见，设这个顶点是 $\triangle A_3A_4A_1$ 中的顶点 A_4(图10.22)。则四边形 $A_1H_4H_0O$，$A_3H_3H_0O$，$A_4H_4OH_3$ 都是内接的，因此得到

$$\begin{aligned}(R+r_2)p_2 &= R\cdot H_0H_4 + R\cdot H_0H_3 + R\cdot H_3H_4 + S_2\\ &= (h_4\cdot H_0A_1 - h_0\cdot H_4A_1) + (h_3\cdot H_0A_3\\ &\quad - h_0\cdot H_3A_3) + (h_1\cdot H_3A_4 - h_3\cdot H_4A_4)\\ &\quad + \frac{1}{2}(h_3\cdot A_3A_4 + h_4\cdot A_4A_1 - h_0\cdot A_1A_3)\\ &= (h_3+h_4-h_0)p_2.\end{aligned}$$

从而 $R+r_2=h_3+h_4-h_0$。

于是，在图 10.22 所示的情形下，有

$$r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R.$$

对一般情形，所求的内切圆半径之和等于 h_1, h_2, h_3, h_4, $2R$ 并赋以一定的符号之和。这些符号只与点 O 相对四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的位置有关。因此，这个和与对角线的选取无关。

图 10.22

(2) 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是给定的非钝角三角形，k_1, k_2, k_3 是分别由顶点 A_1, A_2, A_3 引出的高。对于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的其它元素与参数，其记号仍如(1)。不妨设 $k_1\leqslant k_2\leqslant k_3$。因为 $k_1\cdot A_2A_3=k_2\cdot A_1A_3=k_3\cdot A_1A_2=2S_1$，所以 $A_2A_3\geqslant A_1A_3\geqslant A_1A_2$。于是有

$$\begin{aligned}k_3=\frac{2S_1}{A_1A_2}&=\frac{h_2\cdot A_2A_3+h_0\cdot A_1A_3+h_1\cdot A_1A_2}{A_1A_2}\\ &\geqslant\frac{h_2\cdot A_1A_2+h_0\cdot A_1A_2+h_1\cdot A_1A_2}{A_1A_2}=h_1+h_2+h_0=R+r_1.\end{aligned}$$

(后一等式已在(1)中获证)。这就证明了所需的不等式。当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为锐角三角形时，点 O 在三角形内部。因此 $h_2>0$。而且当 $k_1=k_3$ 时，即对等边三角形，等式成立。如果 $\triangle A_1A_2A_3$ 是直角三角形，则 $\angle A_1=90^\circ$，$h_2=0$，$h_1>0$，而且当 $k_2=k_3$ 时，即对等腰直角三角形，等式成立。

10.25 考虑下面一种旨在实现某个步骤的程序。第一步，用直径为 $\frac{1}{200}$ 的圆覆盖给定的点中每个点。从第二步开始，按下面的规则进行。设在第 k 步后，$k\in N$，还存在两个彼此相隔不超过 1 的圆。用 O_1 与 O_2 表示这两个圆的圆心，A_1, A_2, A_3, A_4 表示直线 O_1O_2 与这两个圆的周界的交点，其中点 A_2 与 A_3 在点 A_1 与 A_4 的中间，并且 $A_2A_3\leqslant 1$ (见图10.23)。则第 $k+1$ 步就用以 A_1A_4 为直径的圆取代上面所说的两个圆。只要可能，上述步骤就继续进行，直到条件(2) 不再满足为止。因为第一步时圆的个数是 100 个。以后每进行一步就减少一个。所以至多进行 100 步。因此这个过程必定会停止。但条件(1)每经一步后都满足，所以在过程停止时仍成立。由于第一步时直径之和为 $\frac{100}{200}=0.5$，并且经每一步后这个和至多增加 1，所以最后直径的总和将不超过 $0.5+99<100$，即条件(3)也满足。

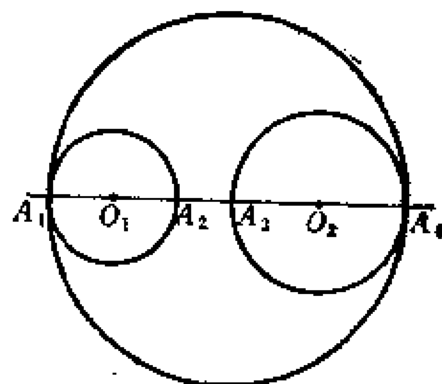


图 10.23

10.26 作一条直线，使得所有的点都在由该直线分成的同一半平面上，并将它平移，使它过第一个点 A_1。然后将直线绕点 A_1 旋转，直到它过另一个点 A_2。于是，所有其它的点都在由直线 A_1A_2 分成的同一半平面上。将这些点编号为 A_3, A_4, $\cdots$, A_{2n+3}，使得 $\angle A_1A_iA_2\leqslant\angle A_1A_{i+1}A_2$，$i=3,\cdots,2n+3$。因为点 A_1, A_i, A_{i+1} 与 A_2 不共圆，所以对每个 i，上述不等式中等号不成立。因此不等式 $\angle A_1A_{n+3}A_2<\angle A_1A_iA_2$ 恰好对 n 个点 $A_i=A_{n+4}$, A_{n+5}, $\cdots$, A_{2n+3} 成立。于是，在过 A_1, A_{n+3} 与 A_2 三点的圆内恰含有 n 个点 A_{n+4}, $\cdots$, A_{2n+3}。

10.27 考虑所有这样的圆。它过给定的多边形的某三个顶点，其中两个是相邻的，而第三个对它们所张的视角不超过 90°。这种圆是存在的，比如过三个相邻顶点的圆即是。在这些圆中，取直径 R 为最大的圆 Γ。为确定起见，设多边形的相邻顶点为 A_1, A_2，另一顶点为 A，且 $\angle A_1AA_2\leqslant 90^\circ$ (图 10.24)。设给定的多边形的某个顶点 B 在圆 Γ 外。由于点 B 与 A 同在直线 A_1A_2 分成的同一半平面上，所以

$$\angle A_1BA_2 < \angle A_1AA_2 \leqslant 90°,$$

且由正弦定理，$\triangle A_1A_2B$ 的外接圆半径大于 R，与圆 Γ 的选取相矛盾。于是圆 Γ 覆盖整个多边形。下面证明，与顶点 A_2 相邻但不同于 A_1 的顶点 A_3 也在所取的圆周上。否则，点 $A_3 \neq A$ 位于圆 Γ 中由弦 A_2A 确定的弓形内部。则 $\angle A_2A_3A > 180° - \angle A_2A_1A \geqslant 90°$。根据正弦定理，$\triangle A_2A_3A$ 的外接圆半径大于 R，与圆 Γ 的选取相矛盾。于是，顶点 A_1，A_2，A_3 满足题中条件。

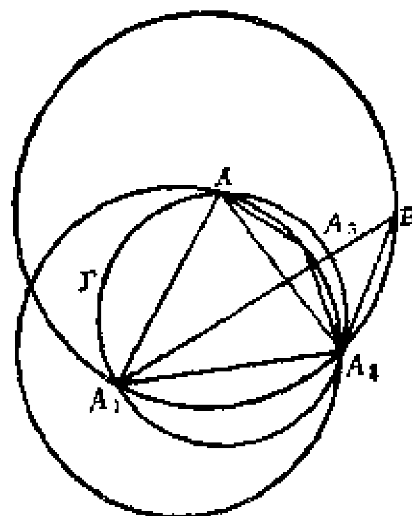


图 10.24

10.28 我们证明，所求的 $n>1$ 都是奇数。设 n 是奇数，且在 $2n$ 边形 $A_1\cdots A_{2n}$ 中除对边 A_1A_{2n}，A_nA_{n+1} 外其它对边都是平行的。如果 $\overparen{A_1A_2A_{n+1}} = 180° + \alpha$(图 10.25)，则

$$\overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overparen{A_2A_nA_{n+1}} + \overparen{A_{n+1}A_{n+2}} = \overparen{A_1A_{2n}A_{n+2}} + \overparen{A_{n+2}A_{n+1}}$$

$$= 360° - \overparen{A_1A_2A_{n+1}} = 180° - \alpha$$

(因为 $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}$)。同理可知，

$$\overparen{A_3A_{n+2}A_{n+3}} = 180° + \alpha,\ \cdots,\ \overparen{A_nA_{n-1}A_{2n}} = 180° + (-1)^{n+1}\alpha = 180° + \alpha.$$

因此，$$\overparen{A_1A_2A_n} = 180° + \alpha - \overparen{A_nA_{n+1}} = \overparen{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}},$$

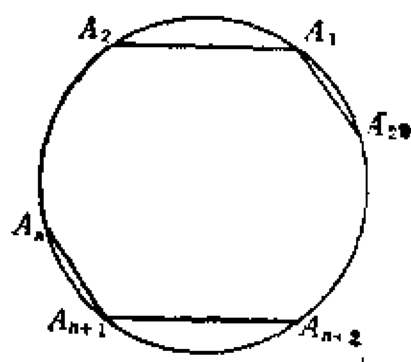


图 10.25

从而 $A_nA_{n+1} \parallel A_1A_{2n}$。现在证明，对奇数 n，存在 $2(n-1)$ 边形，使得题中条件不满足。任取一个 $2n$ 边形，使得每对对边平行，但 $\overparen{A_1A_2A_{n+1}} \neq 180°$。为此只需将弧 $\overparen{A_1A_{n+1}} < 180°$ 用点 A_2，$\cdots$，A_n 等分，并依次作弦 $A_{n+1}A_{n+2} \parallel A_1A_2$，$\cdots$，$A_{2n-1}A_{2n} \parallel A_{n-1}A_n$。如上面所证，将有 $A_{2n}A_1 \parallel A_nA_{n+1}$，且

$$\overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overparen{A_1A_2A_{n+1}} = \overparen{A_{2n}A_1A_n} \neq 180°.$$

因此 $$\overparen{A_2A_3A_n} - \overparen{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}} = \overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \overparen{A_{2n}A_{n+1}A_n}$$

$$= \overparen{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - (360° - \overparen{A_{2n}A_1A_n}) \neq 0.$$

即线段 A_2A_{2n} 与 A_nA_{n+2} 不平行，而 $2(n-1)$ 边形 $A_2\cdots A_nA_{n+2}\cdots A_{2n}$ 恰有 $n-2$ 对对边平行。

10.29 当 $n=1$ 时，单位圆的整个弧长为 $2\pi \geqslant \frac{2\pi}{n}$，即题中结论成立。设 $n\geqslant 2$，并首先设这 n 个圆的圆心都在一条直线上。从这些圆心中选出位于最左端的点 O，过圆心 O 作该直线的垂线，把圆 O 截成两个弧长都是 $\pi \geqslant \frac{2\pi}{n}$ 的半圆弧。取位于左边的那个半圆弧，该弧与其它的圆并不相交。现在考虑这些圆的圆心不在同一直线上的情形。从所有的以这些圆的圆心为顶点的凸多边形中(因为其中包括三角形，所以这种多边形集合非空)取出一个，使得在它外面的圆心个数最少。我们证明，所取的多边形外面不可能有这些圆的圆心。事实上，如果某个点 O 在多边形外面，则过 O 作一条与多边形不相交的直线，并将它绕点 O 旋转直到它过多边形的第一个顶点 A，然后过多边形最后一个顶点 B(如果有好几个顶点落在直线上，则取距 O 最远的那个点。见图10.26)。最后只须用 A，O，B 三个顶点取代多边形所有落在 $\triangle AOB$ 内的顶点，则得到的多边形外面的点比原多边形外面的点少，与原多边形的选取矛盾。存在一个以这些圆心为顶点的凸 k 边形包含所有圆心，$k\leqslant n$。因为 k 边形各外角之和为 $360°$，所以必有一个外角不小于 $\frac{360°}{k} \geqslant \frac{360°}{n}$。设这个外角即是 $\angle B_1OA$(见图 10.26)，则

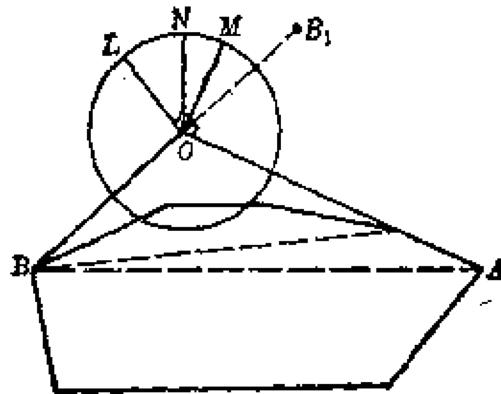


图 10.26

分别垂直于线段 OB 与 OA 的垂线 OL 与 OM 截出一段外弧 $\overparen{LM}$。因为 $\angle LOM = \angle B_1OA$，所以它的长

度不小于$\frac{2\pi}{n}$。下面证明，这段弧与其他的圆不相交。事实上，设N是弧LM上任意一点。由于$\angle NOA>90°$，且$\angle NOB>90°$，因此，以N为圆心且半径为1的圆与k边形只有唯一公共点O。这表明，在所有给定的圆中，过点N的圆周只能以点O为中心。结论证毕。

§11 多 边 形

11.1 设对角线AC和直线OB与OD分别交于点P与Q（图11.1）。因为$\triangle AOB$与$\triangle COB$面积相等，所以其公共边OB上的高也相等，从而$AP=PC$。同理有，$AQ=QC$，因此$P=Q$。如果$P\neq O$，则B, P, O, D四点共线，即点O在对角线BD上，如果$P=O$，则点O在对角线AC上。

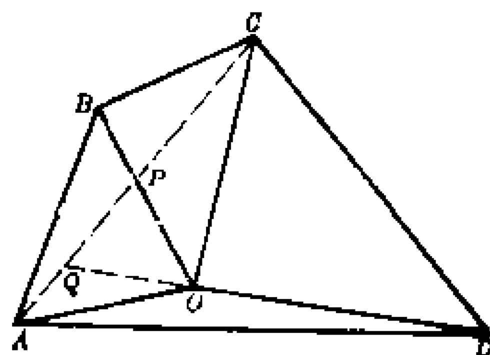


图 11.1

11.2 在向量$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$处的平行四边形$OAMB$与$A'B'C'N$（图11.2）是全等的，所以，

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}S_{OAMB}=\frac{1}{2}S_{A'B'C'N}=S_{A'B'C'}$$

同理可得，

$$S_{BOC}=S_{B'C'D'},$$
$$S_{COD}=S_{C'D'A'},$$
$$S_{DOA}=S_{D'A'B'}.$$

由此得到，

$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=(S_{A'B'C'}+S_{A'D'C'})+(S_{B'C'D'}+S_{B'A'D'})=2S'.$$

这正是所要证明的。

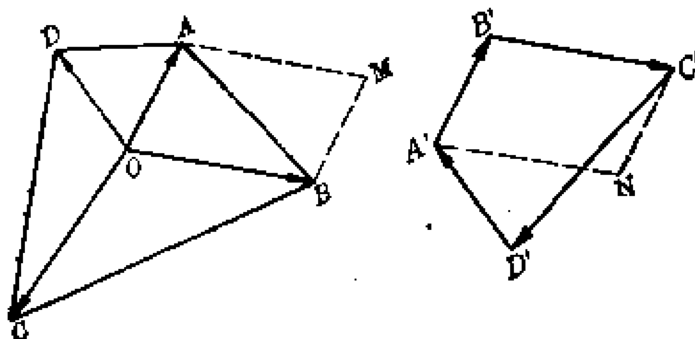


图 11.2

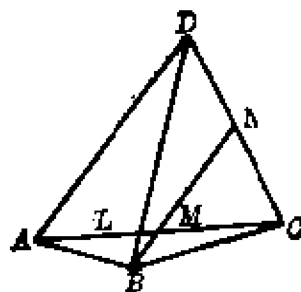


图 11.3

11.3 设四边形$ABCD$的对角线AC与BD交于点L（图11.3）。由题中条件，可设$S_{ABC}=m$，$S_{ABD}=3m$，$S_{BDC}=4m$，则$S_{ADC}=S_{ABD}+S_{BDC}-S_{ABC}=6m$。于是

$$\frac{BL}{LD}=\frac{S_{ABL}}{S_{ALD}}=\frac{S_{BLC}}{S_{LDC}}=\frac{S_{ABL}+S_{BLC}}{S_{ALD}+S_{LDC}}=\frac{S_{ABC}}{A_{ACD}}=\frac{1}{6}.$$

设

$$\frac{CN}{CD}=\frac{AM}{AC}=x,$$

则

$$\frac{CM}{AC}=\frac{AC-AM}{AC}=1-x.$$

于是

$$\frac{S_{MCN}}{S_{ACD}}=\frac{CN\cdot CM}{CD\cdot CA}=\frac{CN}{CD}\cdot\frac{CM}{AC}=x(1-x).$$

即$S_{MCN}=x(1-x)S_{ACD}=x(1-x)\cdot 6m$。又$\frac{S_{BMC}}{S_{BAC}}=\frac{MC}{AD}=1-x$，所以$S_{BMC}=(1-x)S_{BAC}=(1-x)m$。最后，$\frac{S_{BNC}}{S_{BDC}}=\frac{CN}{CD}=x$，所以，$S_{BNC}=xS_{BDC}=x\cdot 4m$。因为$B, M, N$三点共线，所以$S_{MCN}+S_{BMC}=S_{BCN}$，

因此 $x(1-x)\cdot 6m+(1-x)\cdot m=x\cdot 4m$，$m\neq 0$，即 $6x^2-x-1=0$。解得 $x=\frac{1}{2}$（负根舍去）。这表明，$\frac{CN}{CD}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$，即点$N$与$M$分别是 CD 与 AC 的中点。证毕。

11.4 有两种可能的情形：$|AB|>|AD|$和$|AB|<|AD|$，在画图和解答中有所差异，这里只讨论第一种情形（图 11.4）。连接M和平行四边形的中心 O。我们证明，$\triangle AOD\backsim\triangle AOM$，$\triangle BOC\backsim\triangle BOM$。由题设等式 $\angle MAO=\angle DAO$，$\angle MBO=\angle CBO$，记 $\angle DAO=\alpha$，$\angle CBO=\beta$，则 $\angle ADO=\beta$，$\angle AOB=\alpha+\beta$，$\angle AMB=2\pi-\angle MAO-\angle MBO-\angle AOB=2\pi-2\alpha-2\beta$。这时，点$O$到直线 AD 和 AM，BC 和 BM，AD 和 BC 等远。这表明点O到直线 AM 和 BM 等远，即直线 MO 是 $\angle AMB$ 的平分线。所以

$$\angle AMO=\frac{1}{2}\angle AMB=\pi-\alpha-\beta=\angle AOD.$$

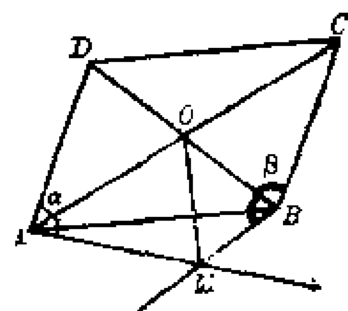


图 11.4

同理有
$$\angle BMO=\angle BOC.$$
于是
$$\triangle AOD\backsim\triangle AOM,\ \triangle BOC\backsim\triangle BOM.$$
由此得到
$$\frac{|AM|}{|AO|}=\frac{|AO|}{|AD|},\quad \frac{|BM|}{|BO|}=\frac{|BO|}{|BC|},$$
因而
$$\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{|AO|^2}{|BO|^2}=k^2.$$

11.5 用 A_1，B_1，C_1，D_1 表示面积为 S 的平行四边形 $ABCD$ 中 AB，BC，CD，DA 四个边上的中点。用 K，K_1，K_2 分别表示直线 AC_1 与直线 BD_1，A_1D，CD_1 的交点。同样得到点 L，L_1，L_2；M，M_1，M_2；N，N_1，N_2（图 11.5）。因为平行四边形 AA_1CC_1（$AA_1\parallel CC_1$，$AA_1=CC_1$）与平行四边形 $ABCD$ 的高相同，且底边 $AA_1=\frac{1}{2}AB$，所以其面积为 $\frac{S}{2}$。其次，平行四边形 $KLMN$（$LM\parallel KN$，$KL\parallel MN$）与平行四边形 AA_1CC_1 的高相同，且底边 $KN=\frac{2}{5}AC$（因为 $\triangle AKD_1\backsim\triangle AND$，所以 $AK=KN$ 和 $KN=LM=MC=2NC_1$）。因此

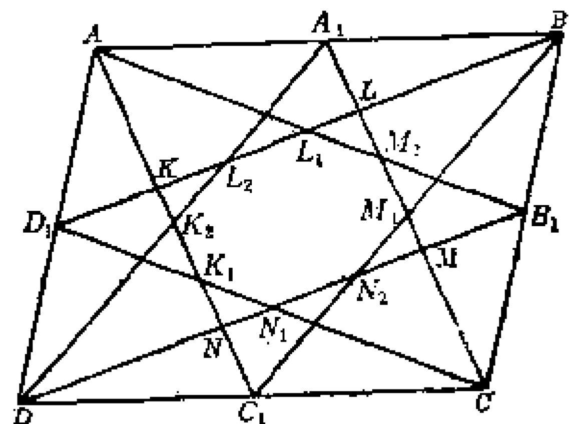


图 11.5

$$S_{KLMN}=\frac{2}{5}S_{AA_1CC_1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{5}.$$

点 K_1 是平行四边形 AA_1C_1D 的对角线 AC_1 与 DA_1 的交点，所以 $AK_1=K_1C$。点 K_2 是 $\triangle ACD$ 的中线 CD_1 与 AC_1 的交点，所以 $AK_2=2K_2C_1$。于是

$$KK_1=AK_1-AK=\frac{1}{2}AC_1-\frac{2}{5}AC_1=\frac{1}{10}AC_1=\frac{1}{4}KN.$$

$$NK_2=C_1K_2-C_1N=\frac{1}{3}AC_1-\frac{1}{5}AC_1=\frac{2}{15}AC_1=\frac{1}{3}KN.$$

同理可得，
$$KL_2=\frac{1}{3}KL.$$

因此
$$\begin{aligned}S_{KK_1L_2}&=\frac{1}{2}KK_1\cdot KL_2\sin\angle K_1KL_2,\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}KN\right)\cdot\left(\frac{1}{3}KL\right)\sin\angle NKL\\&=\frac{1}{12}S_{NKL}=\frac{1}{24}S_{KLMN}=\frac{S}{120}.\end{aligned}$$

同理可证，
$$S_{LL_1M_2}=S_{MM_1N_2}=S_{NN_1K_2}=\frac{S}{120}.$$

因此，
$$S_{K_1L_1L_1M_1M_1N_1N_1K_1}=\frac{S}{5}-4\left(\frac{S}{120}\right)=\frac{S}{6},$$
这正是所要证明的。

11.6 (1) 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 与十边形 $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ 的内角之和分别为 $3\cdot180°$ 与 $8\cdot180°$ 另外，对五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的每个顶点，它的内角和以该点为顶点的十边形的内角之和恰好是 $360°$(图11.6)。因此得到

$$\angle A_1BB_1-\angle B_1CC_1+\angle C_1DD_1+\angle D_1EE_1+\angle E_1AA_1$$
$$=8\cdot180°+3\cdot180°-5\cdot360°=180°.$$

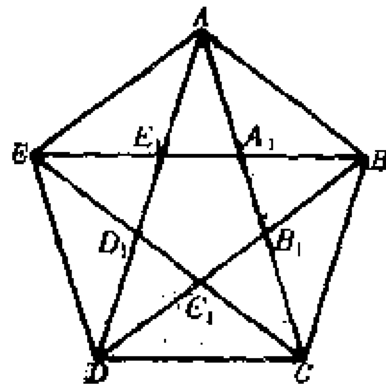


图 11.6

(2) 如果 $ABCDE$ 是正五边形。根据图形(关于各个角平分线)的轴对称性，有

$$AA_1=AE_1=EE_1,\ AC\parallel ED.$$

因此 $\angle AA_1E=\angle A_1ED=\angle CEA=\angle EAA_1$,

即 $\triangle AEA_1$ 是等腰三角形。记 $a=AE$, $x=A_1E_1$。由于等腰 $\triangle A_1AE_1$ 与 $\triangle A_1EA$ 有公共底角，从而相似。由此得到，

$$\frac{AA_1}{A_1E_1}=\frac{A_1E}{AA_1},\ 即\frac{a-x}{x}=\frac{a}{a-x}.$$

于是，$x^2-3ax+a^2=0$。因为 $x<a$，所以

$$\frac{x}{a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

从而
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}=\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

11.7 设在四边形 $ABCD$ 中，点 O 是线段 BD 的中点，K 与 L 是顶点 A 与 C 在直线 BD 上的投影。令 $\overrightarrow{OK}=x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OL}=y\overrightarrow{BD}$ (在四边形 $A'B'C'D'$ 中，相应的元素将注上"′"号)。则有(图11.7)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD},$$
$$AB^2-AD^2=AK^2+KB^2-AK^2-KD^2$$
$$=(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD})\cdot(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KD})$$
$$=((\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DO}))\cdot(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KB})$$
$$=2\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB}=2xBD^2.$$

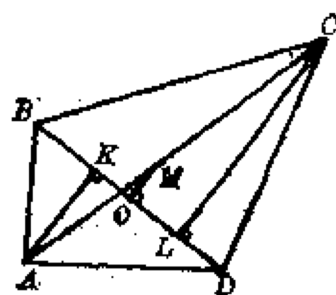


图 11.7

同理有，

$$CB^2-CD^2=2yBD^2,$$
$$2x'B'D'^2=A'B'^2-A'D'^2=2xBD^2,$$
$$2y'B'D'^2=C'B'^2-C'D'^2=2yBD^2.$$

如果 $x=y$，则 $x'=y'$，且 $K=L$, $K'=L'$。即断言(1)成立。如果 $x\neq y$，则 x, y 中有一个不为零。不妨设 $x\neq0$，于是

$$\overrightarrow{MC}=\frac{y}{x}\overrightarrow{AM},\ 且\ \overrightarrow{M'C'}=\frac{y'}{x'}\overrightarrow{A'M'}=\frac{y}{x}\overrightarrow{A'M'}.$$

由此即得题中论断(2)。

11.8 不妨设所给的八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边长都是有理数(否则，只需取一个与它相似且边长 $A_1'A_2'$ 为1的八边形 $A_1'A_2'\cdots A_8'$ 加以证明即可)。考虑向量

$$\vec{a}_i=\overrightarrow{A_iA_{i+1}},\ i=1,\ \cdots,\ 8,\ A_9=A_1.$$

它们的和为零向量。因为八边形所有内角都相等，且其和为 $6\cdot180°$，所以每个内角都等于 $\frac{3}{4}\cdot180°=45°$ (图11.8)。

把所有的向量投影到一条平行于 a_1 的轴上，并用 x 表示和 a_1+a_5 的投影分量，用 y 表示和 $a_2+a_4+a_6+a_8$ 的投影分量。因为 $a_3\perp a_1$，$a_7\perp a_1$，因此和 a_3+a_7 的投影为 o。所以 $x-y=0$。另一方面，向量 a_2，a_4，a_6，a_8的每个投影的长都等于某个有理数与 $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的乘积。因此有 $x=y=\sqrt{2}z$，其中 $x, z\in Q$。由此得出 $x=0$，$a_5=-a_1$。同理可证 $a_6=-a_2$，$a_7=-a_3$，$a_8=-a_4$。于是得到，

$$A_1A_2=A_5A_6,\ A_2A_3=A_6A_7,\ A_3A_4=A_7A_8,\ A_4A_5=A_8A_1.$$

这正是所要证明的。

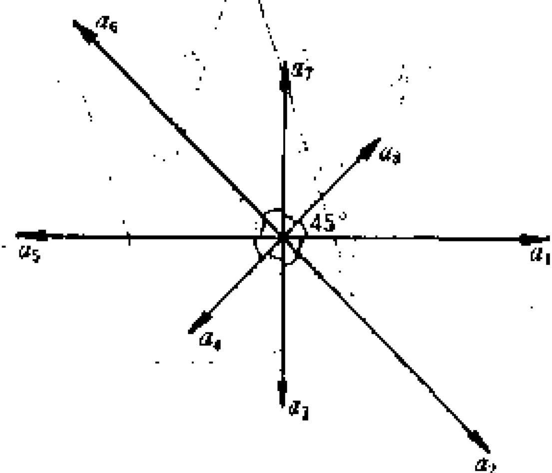


图 11.8

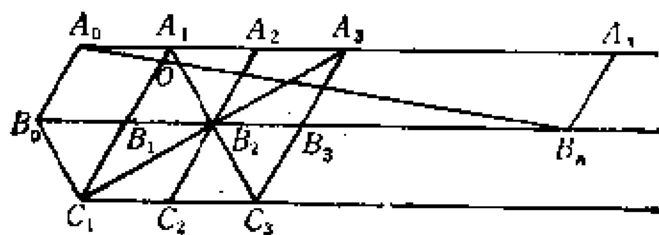


图 11.9

11.9 从正六边形 $A_0A_1B_2C_2C_1B_0$ 出发，利用直尺可以作出下列的点：A_2 和 A_3，它们分别是直线 A_0A_1 与直线 C_2B_2 及 C_1B_2 的交点；C_3，它是直线 C_1C_2 与 A_1B_2 的交点；B_1 和 B_3，它们分别是直线 B_0B_2 与直线 A_1C_1 及 A_3C_3 的交点(图 11.9)。

因为 $A_1A_2C_2C_1$ 为平行四边形，所以，

$$A_1A_2=C_1C_2=a,$$

$$A_2A_3=C_1C_2=a(\text{因为 } \triangle A_2B_3B_2\cong\triangle C_2C_1B_2),$$

$$C_2C_3=A_1A_2=a(\text{因为 } \triangle C_2C_3B_2\cong\triangle A_2A_1B_2),$$

$$B_1B_2=B_2B_3=a(\text{因为 } A_1A_2C_2C_1 \text{ 与 } A_2A_3C_3C_2 \text{ 是平行四边形，且 } B_0B_2\parallel A_0A_1).$$

注意，正六边形 $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$ 可以看成是原正六边形经过把向量 $\overrightarrow{A_0A_1}$ 变为 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 的平移而得到的，且它的顶点都可用直尺作出，而对应点的下标恰好比原六边形各点的下标多 1。现在对正六边形 $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$ 类似作图，得到点 A_4，B_4，C_4。然后类似作出 A_5，B_5，C_5，等等。在作出点 B_n 后，再求出直线 A_0B_n 与 A_1B_1 的交点 O。由于 $\triangle A_0A_1O$ 与 $\triangle A_0A_nB_n$ 相似，所以

$$A_1O=\frac{A_nB_n\cdot A_0A_1}{A_0A_n}=\frac{a\cdot a}{na}=\frac{a}{n},$$

这就完成了所要的作图。

注： 下述一般结论成立：如果给定一条线段以及一条与它平行的直线，则仅用直尺就可以将这条线段分成任意 n 等分。

11.10 因为 $AC=2AB\sin\frac{\angle B}{2}\geqslant 2CD\sin\frac{\angle D}{2}=CE$ (图 11.10)。所以在 $\triangle ACE$ 中有 $\angle AEC\geqslant\angle EAC$。另一方面，有 $\angle EAC=\angle A-\frac{180°-\angle B}{2}=\angle A+\frac{\angle B}{2}-90°\geqslant\angle E+\frac{\angle D}{2}-90°=\angle E-\frac{180°-\angle D}{2}=\angle AEC$。因此，$\angle EAC=\angle AEC$。而这仅当$\angle A=\angle E$，$\frac{\angle B}{2}=\frac{\angle D}{2}$，即$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$ 时才可能，因此 $ABCDE$ 是正五边形。

11.11 (1) 如果第一个多边形的顶点都在与它相等的第二个凸多边形内，则第一个多边形整个落在第二个里面，由于它们的面积相等，所以它们重合。

(2) 不成立(见图 11.11)，其中给出两个全等但非凸的四边形 $ABCE$ 与 $ACDE$。

(3) 考虑非凸的四边形 $ABCD$，其顶点 C 是等边三角形 ABD 的中心 (图 11.12)。则当与它全等的

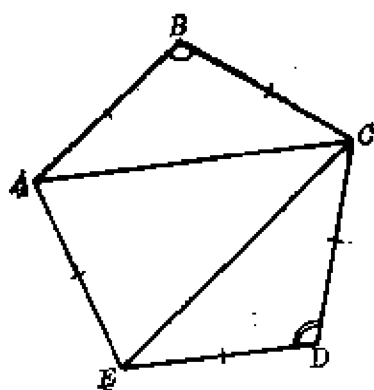


图 11.10

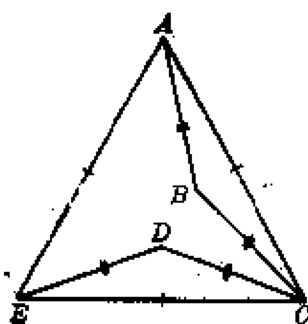


图 11.11

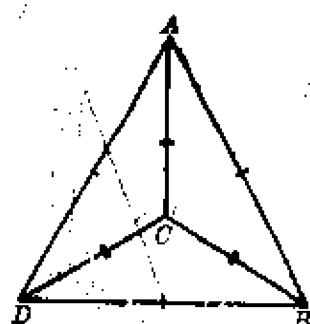


图 11.12

四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点在四边形 $ABCD$ 内时，等边 $\triangle A'B'D'$ 在 $\triangle ABD$ 内。由结论 (1)，这两个三角形的顶点重合，因此顶点 C' 与 C 也重合。所以问题(1)的答案是否定的。

11.12 我们证明一个更广的结论，即任意一个等边 $2n$ 边形当它的各对对边平行时都可以分解成为若干个菱形。当 $n=2$ 时，结论成立。因为等边四边形本身就是菱形。设结论对某个 $n\geqslant 2$ 成立，并设等边 $2(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1B_2\cdots B_{n+1}$ 满足所说的条件。设点 $C_1=A_{n+1}$, C_2, $\cdots$, C_n, $C_{n+1}=A_1$ 是点 B_1, B_2, $\cdots$, B_n, B_{n+1} 沿向量 $\overrightarrow{B_{n+1}A_1}$ 的方向平移而得到的(图 11.13)。则

$$B_iC_i=B_{n+1}A_1=B_iB_{i+1}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

由于所有 B_iC_i 是平行的，所以每个四边形 $C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$ 都是菱形，并且 $A_nC_1=C_1C_2=\cdots=C_nA_1$, $C_iC_{i+1}\,/\!\!/\,B_iB_{i+1}\,/\!\!/\,A_iA_{i+1}$。因此 $2n$ 边形 $A_1\cdots A_nC_1\cdots C_n$ 满足所说的条件。由归纳法假设，它可以分解为菱形，从而 $2(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1B_2\cdots B_{n+1}$ 也可分解为菱形。结论证毕。

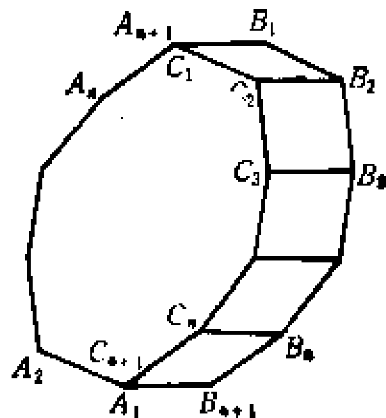


图 11.13

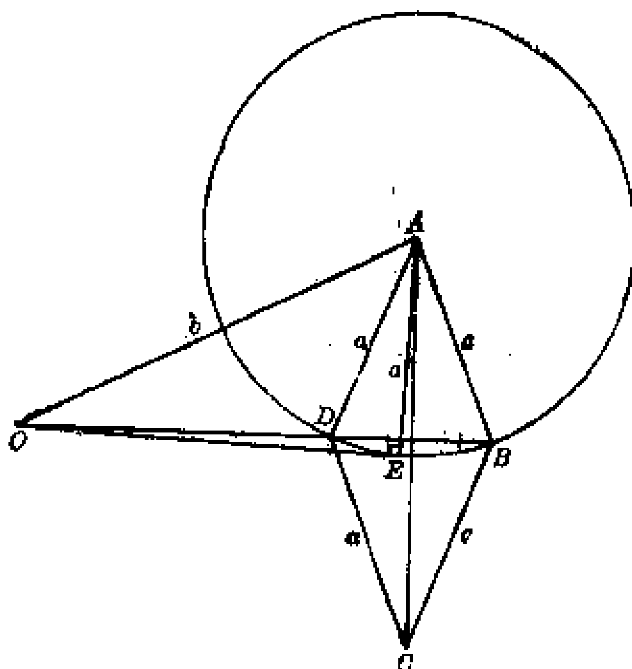


图 11.14

11.13 因为点 O, D, B 都和顶点 A 与 C 等距，所以它们都在同一直线上。考虑以 A 为中心，半径为 a 的圆(图 11.14)。由定理 73, $OB\cdot OD$ 等于点 O 引出的切线长 OE 的平方，即为 b^2-a^2。它与$\angle BAD$ 的大小无关。

11.14 取一点 Q，使得四边形 $QPAB$ 是平行四边形(图 11.15)。则因为 $CD=BA=QP$, $CD\,/\!\!/\,BA\,/\!\!/\,QP$，所以 $QPDC$ 也是平行四边形。又因为$\angle PQB$ 与$\angle PCB$ 相等且它们的顶点在直线 PB 的同侧，所以点 Q, P, B, C 共圆。由此得到

$$\angle APB=\angle PBQ=\angle PCQ=\angle DPC,$$

这正是所要证明的。

11.15 注意 $\triangle A'EF$ 与 $\triangle BDF$ 相似。事实上有图11.16

$$\angle EFD=\angle BFA=\angle BFA',\ \angle FED=\angle FAB=\angle FA'B.$$

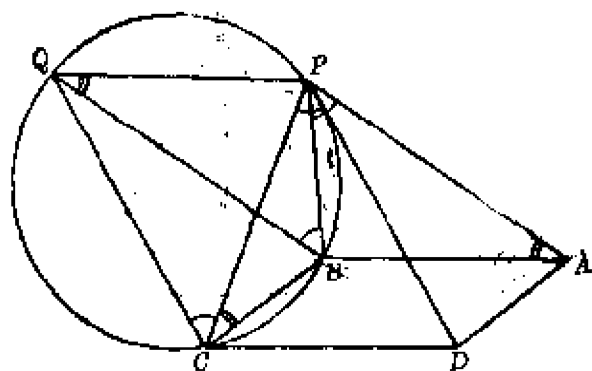


图 11.15

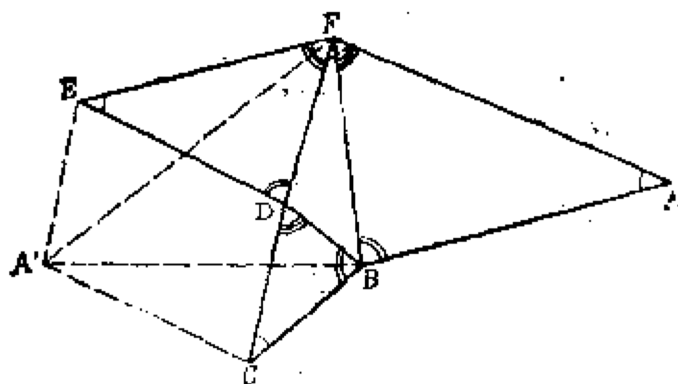


图 11.16

因此

$$\angle A'FE=|\angle EFB-\angle A'FB|=|\angle EFB-\angle EFP|=\angle DFB.$$

由于 $\triangle EDF$ 与 $\triangle A'BF$ 相似，所以 $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{A'F}{BF}$。这就证明，$\triangle A'CB\backsim\triangle BDF$。因此得到

$$\triangle A'EF\backsim\triangle BCA'.$$

从而，$\dfrac{A'C}{EF}=\dfrac{A'B}{A'F}=\dfrac{DE}{EF}$，即 $A'C=DE$.

同理，$A'E=CD$. 所以 $A'CDE$ 是平行四边形.

11.16 设球依次击中 CD, DE, EF, FA 与 AB 各边上的点 R，S，T，U，V（图11.17）。根据反射角等于入射角的原理，$\angle PQB=\angle RQC$。又 $\angle B=\angle C=120°$，因此 $\triangle PQB\backsim\triangle QRC$。从而

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}.$$

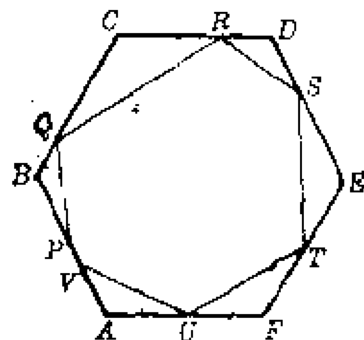


图 11.17

同理可得

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}=\frac{DS}{DR}=\frac{ES}{ET}=\frac{FU}{FT}=\frac{AU}{AV}.$$

不妨设正六边形的边长为 1，且 $BQ=k$，则

$$CQ=1-k,\ CR=\frac{1-k}{2k},\quad DR=\frac{3k-1}{2k},$$

$$DS=3k-1,\ ES=2-3k,\ ET=\frac{2-3k}{2k},$$

$$FT=\frac{5k-2}{2k},\ FU=5k-2,\ AU=3-5k,$$

$$AV=\frac{3-5k}{2k}.$$

为使球碰到所有的边，k 应满足

$$0<k<1,\ 0<\frac{1-k}{2k}<1,\ 0<3k-1<1,$$

$$0<\frac{2-3k}{2k}<1,\ 0<5k-2<1,\ 0<\frac{3-5k}{2k}<1.$$

解得

$$\frac{3}{7}<k<\frac{3}{5},\quad 即\quad \frac{6}{7}<\frac{BQ}{BP}<\frac{6}{5}.$$

由正弦定理，

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{\sin(60°-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{5}{6}<\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{2}<\frac{7}{6},$$

即

$$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\operatorname{tg}\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

因此 θ 的取值范围是 $\mathrm{arctg}\,\frac{3\sqrt{3}}{10}<\theta<\mathrm{arctg}\,\frac{3\sqrt{3}}{8}$。

11.17 用 P, Q 分别表示线段 BC 与 AC 的中点。注意，如果将 $\triangle OPM$ 绕点 O(按顺时针方向) 旋转 $60°$，(图 11.18)，然后作以中心为 O 且系数为 2 的位似变换，则它变为 $\triangle OCE$。事实上，由于 $\angle COP=60°$，且点 O 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，所以 $CO=2\cdot OP$，因此在所说的变换下点 P 变为点 C。其次，由于 PM 是 $\triangle BCD$ 的中位线，所以

$PM\parallel DC$, $\angle DCE=60°$, $EC=DC=2\cdot PM$,

因此线段 PM 变为线段 CE，从而 $\triangle OPM$ 变为 $\triangle OCE$。

于是有，$\angle EOM=60°$, $EO=2\cdot MO$。

图 11.18

同理可证，经绕点 O (按反时针方向) 旋转 $60°$ 的变换及以 O 为中心且系数为 2 的位似变换，$\triangle OQN$ 变为 $\triangle OCD$，从而得到

$$\angle NOD=60°,\ DO=2\cdot NO.$$

因此

$$\triangle NOD\backsim\triangle MOE.$$

这正是所要证明的。

11.18 设垂线 AH 的延长线和直线 CE 与 BD 分别交于点 P 与 Q。我们证明，$AP=AQ$。由此即得 $P=Q=O$。作与直线 BE 垂直的直线 CK (图 11.19)。则由直角 $\triangle CKB$ 与 $\triangle BHA$ 相似 (因为边 $AB\perp BC$, $CK\perp BH$)得到，

$$\frac{CK}{BH}=\frac{BK}{AH}=\frac{BC}{AB}=\mathrm{tg}\angle BAC.$$

由直角 $\triangle EHP$ 与 $\triangle EKC$ 相似得到，

$$PH=\frac{EH\cdot CK}{EK}=\frac{EH\cdot BH\cdot\mathrm{tg}\angle BAC}{EB-BK}=\frac{EH\cdot BH\cdot\mathrm{tg}\angle BAC}{EB-AH\cdot\mathrm{tg}\angle BAC}.$$

同理可证，

$$QH=\frac{BH\cdot EH\cdot\mathrm{tg}\angle EAD}{EB-AH\mathrm{tg}\angle EAD}.$$

经计算得到 $\angle BAC=\angle EAD$，因此 $PH=QH$。结论证毕。

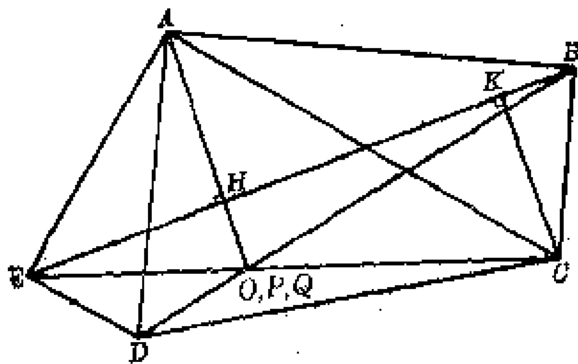


图 11.19

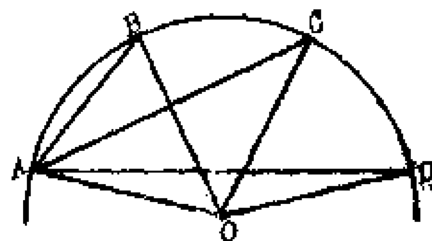


图 11.20

11.19 设多边形外接一个以 O 为圆心，且半径为 R 的圆周 (图 11.20)。记 $\alpha=\angle AOB$，则 $0<\alpha<120°$，且 $AB=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $AC=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\frac{3\alpha}{2}$。

由此，有

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

因此得到

$$0=\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}-\left(\sin\alpha+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + \cos 2\alpha\right) - \left(\cos\alpha + \cos\frac{5\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\frac{7\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{3\alpha}{4}\right) = 2\cos\frac{7\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

从而，$\frac{7\alpha}{4} = 90°$，即 $\alpha = \frac{360°}{7}$。于是原多边形有七条边。

11.20 设点O是正$2n$边形$C_0C_1\cdots C_{2n-1}$的中心，R是它的外接圆半径，在距点O为$r \neq R$处任取一个点A，并记

$$\alpha_k = \angle C_kAC_{k+n},\ \gamma_k = \angle AOC_k,\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

则由余弦定理

$$AC_k^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma_k.$$

$$AC_{k+n}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\gamma_k.$$

$$\cos\alpha_k = \frac{AC_k^2 + AC_{k+n}^2 - C_kC_{k+n}^2}{2AC_k \cdot AC_{k+n}},$$

$$= \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{(R^2+r^2)^2 - 4R^2r^2\cos^2\gamma_k}}$$

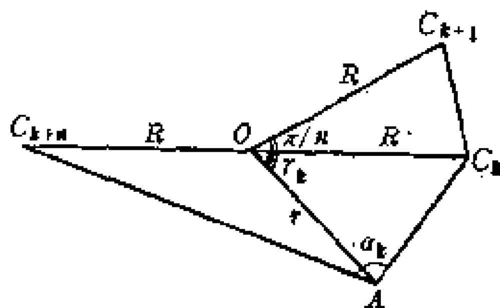


图 11.21

(图11.21)。由此得到，

$$\mathrm{tg}^2\alpha_k = \frac{1}{\cos^2\alpha_k} - 1 = \frac{1}{(R^2 - r^2)^2}((R^2+r^2)^2 - (R^2-r^2)^2 - 4R^2r^2\cos^2\gamma_k)$$

$$= \frac{4R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sin^2\gamma_k.$$

不妨设$\gamma_k = \gamma_0 + \frac{k\pi}{n}$（必要时，只须将原$2n$边形的顶点的顺序改变一下）。于是，因为$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos 2\gamma_k = 0$，所以，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{tg}^2\alpha_k = \frac{2R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1 - \cos 2\gamma_k) = \frac{2R^2r^2n}{(R^2-r^2)^2}.$$

为了证明其中后一等式，考虑坐标为$(\sin 2\gamma_k, \cos 2\gamma_k)$的单位向量$\boldsymbol{d}_k$，$k = 0, 1, \cdots, n-1$。注意向量$\boldsymbol{d}_k$与$\boldsymbol{d}_{k+1}$的夹角为$\frac{2\pi}{n}$，其中$\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{d}_0$。所以存在正$n$边形$D_0D_1\cdots D_{n-1}$，使得$\overrightarrow{D_kD_{k+1}} = \boldsymbol{d}_k$，其中$D_n = D_0$。这表明，向量$\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \cdots, \boldsymbol{d}_{n-1}$之和同它们在任意轴上的投影之和一样都为0。这就证明，对于与点O距离不等于R的任意两点A与B，所考虑的和都相等。因为内切圆与外接圆的半径不相等，所以题中的结论得证。

11.21 对多边形的边数n用归纳法。当$n=3$时，因为三角形没有对角线，所以结论成立。设结论对某个奇数$n \geqslant 3$成立，且设给定凸$n+2$边形，其顶点已按所说方法染色，则必有一顶点A，使得与它相邻的两个顶点不同色。否则每个顶点的两个相邻顶点同色，则由于$n+2$为奇数，所有的顶点将都是同色的，与题中条件矛盾。于是，与顶点A相邻的两个顶点所连的对角线将$n+2$边形分为一个三角形与一个$n+1$边形。如果在这个$n+1$边形中有一个顶点，使得它与相邻的两个顶点不同色，则这两个相邻顶点所连的对角线将它分为一个三角形与一个n边形。由归纳假设，这个n边形具有合乎要求的分解。如果在$n+1$边形中不存在这样的顶点，则与每个顶点相邻的两个顶点同色，即所有顶点交错地染上两种颜色。由于顶点A与相邻两顶点不同色，所以它与原$n+2$边形所有其他顶点都不同色。因此，如果在原$n+2$边形中将顶点A与所有与A不相邻的顶点连线，即得到所要的分解。这就证明，结论对继n之后的奇数$n+2$成立。

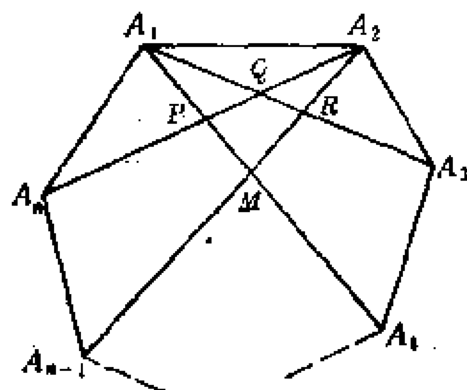


图 11.22

11.22 n边形的顶点依次记为$A_1, \cdots, A_n$。作对角线A_1A_3，A_1A_4，A_2A_{n-1}与A_2A_n。当$n>5$时，设它们交于P，Q，R与M四

点(图 11.22. 注意,当 $n=5$ 时, 点M与 A_4 重合). 因为 n 边形是凸的,所以线段 A_1A_4 与 A_2A_{n-1} 都在 n 边形内. 容易证明,除对角线 A_1A_3 与 A_2A_n 外, 所有其他对角线都不会与 $\triangle A_1MA_2$ 相交, 即 $\triangle A_1PQ$, $\triangle A_1QA_2$ 与 $\triangle A_2QR$ 是多边形分割的组成部分. 现在证明, 上述三角形中至少有两个面积不等. 否则, 设 $S_{\triangle A_1PQ}=S_{\triangle A_1QA_2}=S_{\triangle A_2QR}$, 则由第一个等式得到 $PQ=QA_2$, 由第二个等式得到 $A_1Q=QR$, 即线段 A_1R 与 A_2P 相互平分,于是 A_1A_2RP 是平行四边形,从而 $A_1P\parallel A_2R$, 与它们交于点M矛盾.

§12 点、线段与直线

12.1 设线段 AB 的长为 a, n 个红色点到点A的距离之和记为 R_n, 其他 n 个蓝色点到点B的距离之和记为 B_n. 对 n 用归纳法证明 $R_n=B_n$. 当 $n=1$ 时, 设 X 和 Y 是线段 AB 上关于中点O对称的两个点,且 X 和 Y 分别是红色点和蓝色点. 显然, $R_1=AX$, $B_1=YB$, 由于 X 和 Y 关于点O对称, 所以 $R_1=AX=YB=B_1$, 即结论对 $n=1$ 成立. 设结论对 $k\leqslant n$ 的 k 成立,下面证明结论对 $n+1$ 成立,在$2(n+1)$个关于点O对称的点中取一对关于点O对称的点X和 Y, 如果点X和Y不同色,设点X为红色, 点Y为蓝色,则 $AX=YB$. 由归纳假设,对其他 $2n$ 个点,有 $R_n=B_n$. 于是 $R_{n+1}=AX+R_n=YB+B_n=B_{n+1}$; 如果点$X$和$Y$同色,设为红色, 则其他 $2n$ 个点中必有一对关于点O对称的蓝色点 X_1 和Y_1. 由于 $AX+AY=AX_1+AY_1=a$, 所以 $R_{n+1}=AX+AY+R_{n-1}=a+R_{n-1}$, $B_{n+1}=AX_1+AY_1+B_{n-1}=a+B_{n-1}$. 由归纳假设, $R_{n-1}=B_{n-1}$, 于是 $R_{n+1}=B_{n+1}$. 证毕.

12.2 我们证明更强的结论: 在图 12.1 所示的 10个点 A, D, E, K, L, M, N, O, P, Q中必有三个同色点,使得它们是某个等边三角形的顶点. 否则, P, E, L 三点,二色,必有一点与O同色. 不妨设点O与P都是黑色的. 于是等边 $\triangle POD$ 与 $\triangle POQ$ 的顶点D与Q都是白色的, 从而等边 $\triangle DQM$ 的顶点M为黑色, 所以等边 $\triangle PMK$ 的顶点K为白色. 因此在等边 $\triangle KDL$ 中顶点L应为黑色,而在等边 $\triangle OML$ 中顶点L应为白色. 矛盾. 结论证毕.

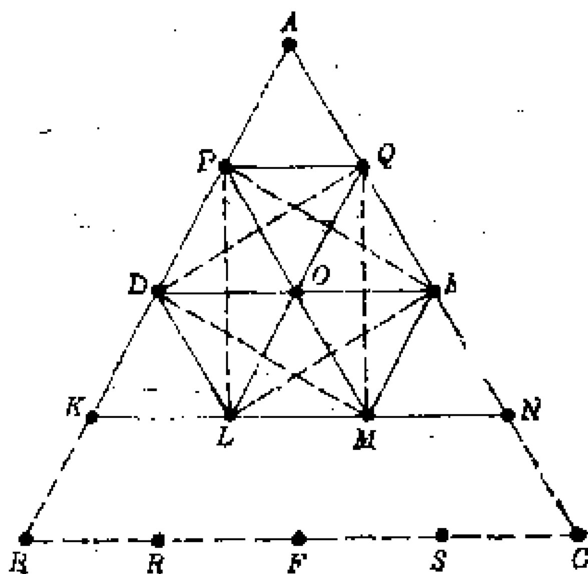


图 12.1

12.3 如果 $n=3k+1$, $k\in Z^+$, 则用圆规直尺可以作出角

$$60^\circ-k\frac{180^\circ}{n}=\frac{(3k+1)\cdot180^\circ-3k\cdot180^\circ}{3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{180^\circ}{n}.$$

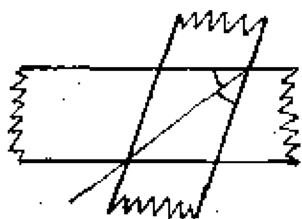
如果 $n=3k-1$, $k\in N$, 则可以作出

$$k\cdot\frac{180^\circ}{n}-60^\circ=\frac{3k\cdot180^\circ-(3k-1)\cdot180^\circ}{3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{180^\circ}{n}.$$

在这两种情况下都可作出原角的三等分角.

12.4 首先注意,利用双边尺可以画出任意一个角的平分线, 其方法如图 12.2 所示. 其次, 设所求作的正五边形为 $ABCDE$.

(1) 给定的四个顶点为 A, B, C, D. 如图 12.3. 则连结 AB, BD, AC, CD, 并延长 AB 至 F, 延长 CD 至 G. 作 $\angle CAF$ 和 $\angle BDG$ 的平分线,其交点E即为所求.


图 12.2

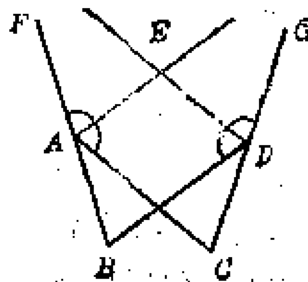


图 12.3

(2) 如果给定的三个顶点为 A, B, C(见图 12.4)，则连结 AB, BC, AC，并延长 BA 至 F，延长BC 至G. 作 $\angle ACG$ 的平分线，$\angle FAC$ 的平分线 AE. 然后再作$\angle EAC$ 的平分线，它与 $\angle ACG$ 的平分线的交点记为 D, 则 $ABCD$ 是正五边形的四个顶点，然后由(1)即可画出第 5 个顶点 E; 如果给定的三个顶点为 A, B, D (见图 12.5)，则连结 AB, BD, AD, 并延长 AD 至 F, 作 $\angle BAD$ 的平分线，再作 $\angle BDF$ 的平分线 DG, 于是 $\angle BAD$ 的平分线与 $\angle BDG$ 的平分线的交点C为正五边形的一个顶点。然后再按(1)作出第 5 个顶点 E.

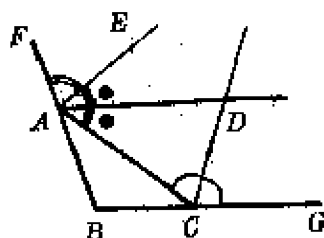


图 12.4

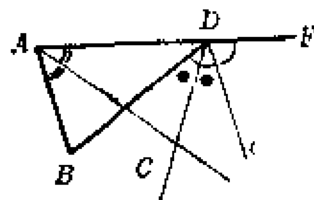


图 12.5

12.5 设覆盖 A, B, C, D 四点的圆的半径为 R，下面分两种情形讨论。(1) A, B, C, D 四点中有一点在其他三个点为顶角的三角形内部或边界上。不妨设点D在 $\triangle ABC$的内部或边界上，则当$\triangle ABC$为锐角三角形时，必有一角(设为$\angle A$)不小于 60°。所以，$2R=\dfrac{a}{\sin A}\leqslant\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，其中 a 为$\angle A$ 的对边长。因此$R\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 特别，在 $AB=BC=CA=1$ 时，$R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 这表明，半径小于 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$的圆不可能覆盖这四个点；当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，以最大边为直径能覆盖这四个点，所以$R\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (2)$A$, B, C, D是凸四边形的顶点，则当凸四边形有一对对角(不妨设 $\angle A$, $\angle C$)$\geqslant 90°$ 时，以对角线 BD 为直径的圆覆盖这四个点，因此 $R\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 当凸四边形有一对邻角(设$\angle A$, $\angle B$)$<90°$时，如果 $\angle ADB\geqslant\angle ACB\geqslant 90°$，则以 AB 为直径的圆覆盖这四点，因此$R\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 如果 $\angle ADB\geqslant\angle ACB$, 且 $\angle ACB<90°$，则点D必在 $\triangle ABC$ 的外接圆内或圆周上，因此，$R\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 这表明，覆盖平面上任意四点 A, B, C, D 的圆的最小半径应为$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

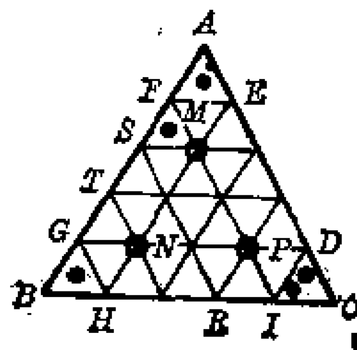


图 12.6

12.6 因为所给的五个点在正三角形内部，所以存在正三角形 ABC，它被包含在所给的正三角形，又含有给定的 5 个点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 显然$S_{ABC}<1$. 如图 12.6，设点 D, E, F, G, H, I 分别是 $\triangle ABC$ 的边上靠近顶点的五等分点，则 S_{AGD}, S_{BIF}, S_{CEH} 均小于$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=0.64$. 下面证明，如果 $\triangle AGD$, $\triangle BIF$, $\triangle CEH$ 中有一个含有 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中三个点，则结论成立。事实上，设 P_1, P_2, P_3 在 $\triangle AGD$ 内，则可作两个面积为 ε 且各边分别平行给定的正三角形的正三角形盖住点 P_4, P_5, 使得 $S_{AGD}+2\varepsilon<0.64$. 现在分两种情形讨论。(1) $\triangle MNP$ 含有 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中某个点。此时 $\triangle AGD$, $\triangle BIF$, $\triangle CEH$ 中必有一个至少含有 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中三个点，则由上面的证明，结论成立；(2) $\triangle MNP$ 不含 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中的点。此时 1)如果菱形 $AEMF$, $BHNG$, $CIPD$ 都不含有 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中的点，则梯形 $PNHI$, $MPDE$, $MNGF$ 中有两个同在 $\triangle AGD$ 与$\triangle BIF$ 之一。所以 $\triangle AGD$, $\triangle BIF$ 有一个至少含三个点，因此结论成立；2) 如果菱形 $AEMF$, $BHNG$, $CDPI$ 中有一个含有 P_1, P_2, $\cdots$, P_5 中某个点，则可设 $BHNG$ 含有点 P_1. 于是，①当梯形 $PNHI$ 和 $MNGF$ 含有点的总数不少于 2 时，$\triangle BIF$ 至少含有三个点，所以结论成立；②当梯形 $PNHI$ 和 $MNGF$ 含有点的总数为 1 时，不妨设梯形 $MNGF$ 含有点 P_2. 则梯形 $AFIC$ 含有三个点。如果梯形 $AFPD$ 至少含有二个点，或梯形 $CEMI$ 含有三个点，则由上面的证明，结论成立。如果梯形 $CDPI$ 与 $AEMF$ 分别含有二个点

与一个点，即菱形 $AEMF$ 和梯形 $BHNG$ 各含有一个点，这三个点 P_1, P_2, P_3 中的二个点可以用符合题中条件且面积为 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ 的 $\triangle BRS$ 或 $\triangle ATU$ 盖住，而菱形 $CDPI$ 中的两个点可用符合题中要求且面积为 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$ 的 $\triangle CUR$ 盖住；余下的一个点可用面积为 ε 的正三角形盖住，使得 $\frac{4}{25}+\frac{9}{25}+\varepsilon<0.64$。

3) 如果菱形 $AEMF$，$BHNG$，$CDPS$ 中有一个含有两个点，则可仿 2)讨论，结论仍成立。

12.7 设结论不真，且设某个凸集具有两条不相交的直径。则有两种情形：(1) 两条直径中任意一条都不与另一条的延长线相交；(2) 两线段中有一条与另一条的延长线相交。对第一种情形，考虑一个由线段 AB 与 CD 为边构成的凸四边形(图 12.7)。它必定有一个角，比如说 $\angle D\geqslant 90°$。于是有 $AC>CD$，即 CD 不是直径。对第二种情形，考虑直径 AB 与 CD 的延长线的交点 O (图 12.8)。则 $\angle AOC$ 与 $\angle BOC$ 中必有一个，比如说 $\angle AOC\geqslant 90°$。于是有 $AC>OC>CD$，即 CD 不是直径，因此在两种情形下都得出了矛盾。

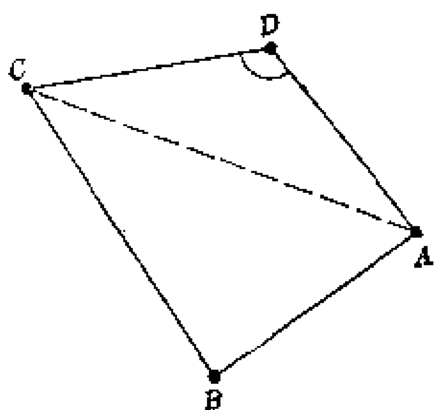


图 12.7

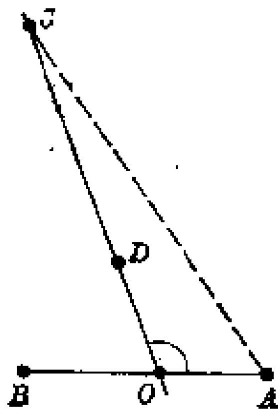


图 12.8

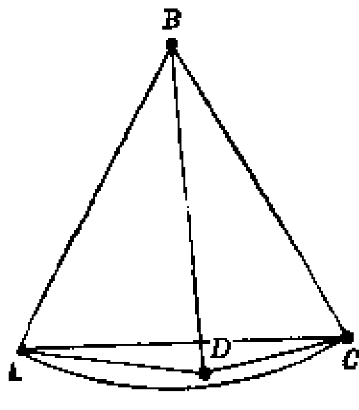


图 12.9

12.8 本题的答案是否定的。事实上，考虑一个凸四边形 $ABCD$，其中 $AB=AC=BC=d$，$BD<d$ (图 12.9)，它的直径等于 d。另一方面，当用折线将该四边形分成两部分时，三个顶点 A, B, C 中至少有两个属于同一部分，于是该部分的直径就等于 d 了。

注： 可以证明，如果在给定的凸四边形的顶点中，不论怎样选取三个顶点，它们之间的距离决不会有两个同时等于它的直径，则题中所说的分法是可能的，而且不必用折线，只用直线即可。

12.9 设所有的点不共线。过所有的点对作所有可能的直线，并考虑所有的点与所作直线之间的所有可能的非零距离。因为这些距离只有有限多个，所以至少有一点 A 与一条直线 l，使得它们之间距离最小，在直线 l 上作垂线 AH(图 12.10)。由于直线 l 至少含有给定的点中的三个点。所以总有两个点，它

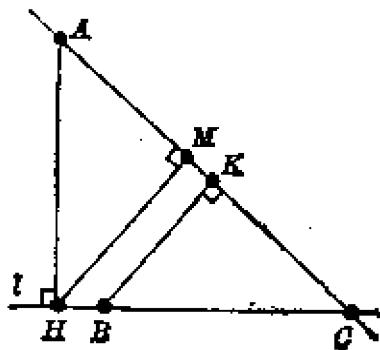


图 12.10

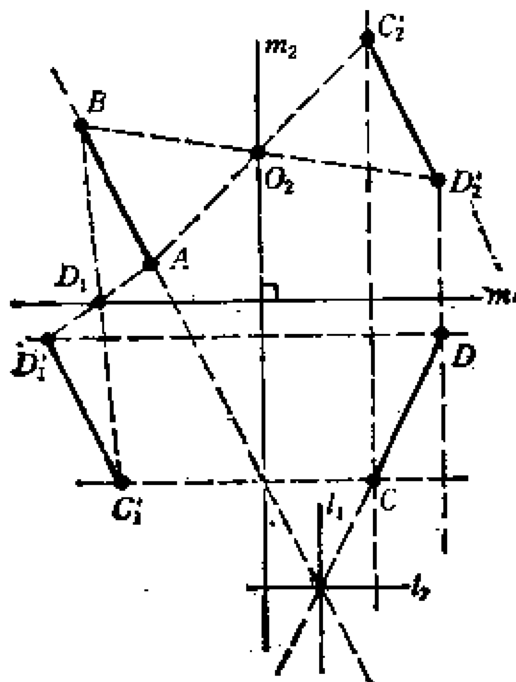


图 12.11

们在直线 l 上点H的同侧。设它们是点B与点C，且点B介于点H与C之间，其中不排斥B与H重合的情形。于是，如果BK与HM垂直于直线AC，则由$\triangle BKC$与$\triangle HMC$相似得到，

$$BK=\frac{HM\cdot BC}{HC}\leqslant HM<HA.$$

(如果$A=M$，则$AC\parallel HC$，不可能)。即点A到直线l的距离并不是最小的，矛盾。这证明所有的点共线。

12.10 用$A'B'$表示线段AB关于待求点O的对称线段。考虑任意一条直线l，使得线段CD关于l的对称线段$C'D'$与$A'B'$平行。因为$C'D'\parallel A'B'\parallel AB$，所以直线$l$和$AB$与$CD$夹角的两条互相垂直的角平分线$l_1$与$l_2$之一平行(图 12.11)。当$l\parallel l_1$时，用$C_1'D_1'$表示线段$CD$关于直线$l$的对称线段；当$l\parallel l_2$时，则用$C_2'D_2'$表示。由于$\overrightarrow{C_1'D_1'}=-\overrightarrow{C_2'D_2'}$，向量$\overrightarrow{C_1'D_1'}$或$\overrightarrow{C_2'D_2'}$必等于$\overrightarrow{AB}$，设为$\overrightarrow{C_1'D_1'}=\overrightarrow{AB}$。这时线段$A'B'$与$C_1'D_1'$重合(相应于直线$l\parallel l_1$的情形)的必要且充分条件是点$O=O_1$在和点$A$与$D$等距离且与$l_1$垂直的直线$m_1$上。同理，当点$O=O_2$在和点$A$与$C$等距离且与$l_2$垂直的直线$m_2$上时，$A'B'$与$C_2'D_2'$重合。因此所求的点$O$的几何位置是上述直线$m_1$与$m_2$的并。

12.11 设集合M有两个不同的对称中心O_1与O_2，则点O_1关于点O_2的对称点O_3也是集合M的对称中心。事实上，如果用$C_O(A)$表示点A关于点O的对称点，则由点A与$C_{O2}(A)$及O_3与O_1关于O_2的对称性可得，点$C_{O3}(A)$与$C_{O1}(C_{O2}(A))$关于点O_3是对称的(图 12.12)。因此对任意一点A，有

$$C_{O3}(A)=C_{O2}(C_{O1}(C_{O2}(A))).$$

从而

$$C_{O3}(M)=C_{O2}(C_{O1}(C_{O2}(M)))=C_{O2}(C_{O1}(M))=C_{O2}(M)=M.$$

同理，点$O_4=C_{O3}(O_2)$，$O_5=C_{O4}(O_3)$等等也都是集合M的对称中心。因为$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{O_3O_4}=\cdots$，所以这些对称中心都是互不相同的，即集合$M$有无限多个对称中心。

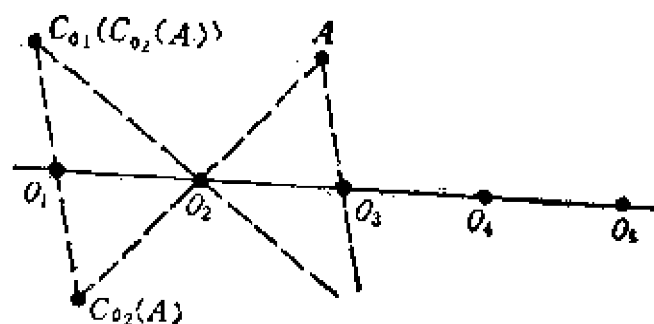


图 12.12

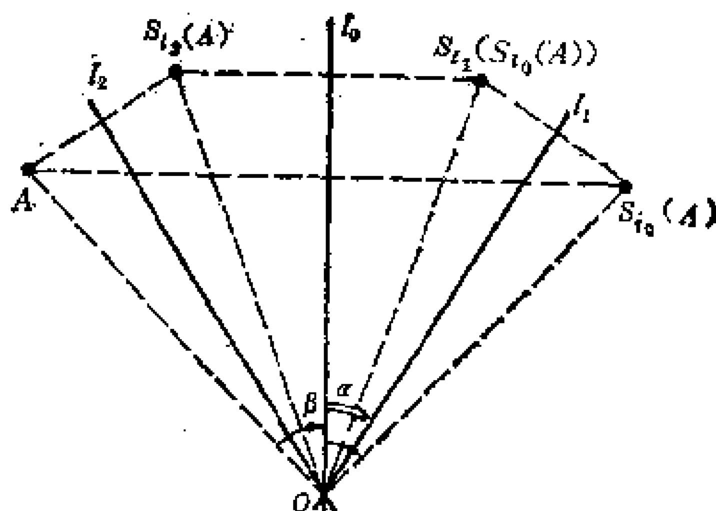


图 12.13

12.12 设集合M有对称轴l_0与l_1(不一定不同)，则直线l_1关于l_0的对称直线l_2也是集合M的对称轴。事实上，如果用$S_l(A)$表示点A关于直线l的对称点，则由点A与$S_{l_0}(A)$及直线l_0与l_1关于l_0的对称性可得，点$S_{l_2}(A)$与$S_{l_1}(S_{l_0}(A))$关于直线l_0是对称的(图 12.13)。因此对任意一点A，有$S_{l2}(A)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(A)))$。从而，

$$S_{l_2}(M)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(M)))=S_{l_0}(S_{l_1}(M))=S_{l_0}(M)=M.$$

于是，集合M的任意一条对称轴也是集合L的对称轴，由此即得题中结论。

12.13 设集合M的对称轴l_0与l_1交于点O，并且当l_0绕点O按顺时钟方向旋转角α时变为l_1。于是，如果用$S_l(A)$表示点A关于直线l的对称点，则在绕点O按顺时钟方向旋转角2α时，点A变为$R(A)=S_{l_1}(S_{l_0}(A))$。事实上，点O到点A，$S_{l_0}(A)$，$S_{l_1}(S_{l_0}(A))$的距离都相等(图 12.13)，且如果直线OA与l_0之间按顺时钟方向扫过的角度为$\beta(A\neq O)$，则直线OA与$OS_{l_1}(S_{l_0}(A))$之间的角为$2\beta-2(\beta-\alpha)=2\alpha$。由于集合$M$至少有两个点，所以它还含有一个点$A_0\neq O$。于是

$$R(M)=S_{l_1}(S_{l_0}(M))=S_{l_1}(M)=M.$$

因此点 A_0, $A_1=R(A_0)$, $A_2=R(A_1)$, $A_3=R(A_2)$ 等等都含在集合M内。但这些点都是互不相同的，因为如果有某个 $i>j$，使得 A_i 与 A_j 重合，则有

$$2\alpha(i-j)=2\pi k,\ k\in N,$$

即$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{k}{i-j}$为有理数，矛盾。所以集合$M$是无限的。

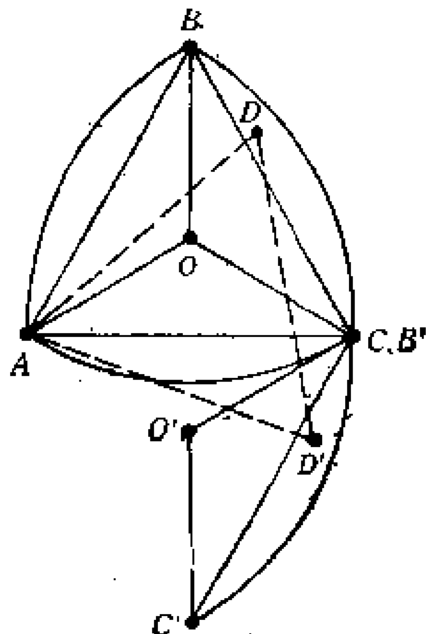


图 12.14

12.14 我们证明，题中条件仅当 $n=3$ 时才满足（在这种情形下，只须将点放在正三角形顶点就可以了）。事实上，如果有 $n\geqslant4$ 个点合乎题中条件，则从中选取出两点A与 B，使得它们之间的距离最大，再取点 C，使 $\triangle ABC$ 成为等边三角形。于是所有其它的点都在分别以 A, B, C 为圆心且半径为 AB 的圆弧围成的图形M中(图 12.14)。设点O是 $\triangle ABC$ 的中心，则线段 AO, BO 与 CO 将集合M分为三个全等的部分，其中每个部分除上面所说的点外不再含有这 n 个点中余下的任何一个。事实上，比如在由以A为圆心的弧 $\widehat{BC}$ 与弦 BC 围成的弓形 M_{BC} 中有一点D，则存在点 D'，使得 $\triangle ADD'$ 是等边的。当把它绕点A(按一定的方向)旋转$60°$ 时，点D变到 D'，它落在由 M_{BC} 的像 M'_{BC} 中，同时也在集合M中。但因为 $\angle BAC=60°$，所以 $C'=B$ 或 $B'=C$。为确定起见，设 $B'=C$。则集合 M'_{BC} 与M在直线 $B'O'$ 所分的不同半平面上。因为 $\angle BB'O=\angle BCA+\angle A'B'O=60°+30°=90°$，即直线 $B'O'$ 与弧 $\widehat{AC}$ 相切，所以 M'_{BC} 和M仅有一个公共点 B'，因此 $D'=B'$, $D=B$，与点D的选取矛盾。结论证毕。

12.15 首先设点 A, B 与C共线，则它们把直线分成四个区间，并且不同区间中的点不能同在一个凸集中。因此所求凸集的个数不能少于 4。另一方面，如果把集合M分为如图 12.15 所示的四个部分，则 4 也够了。

现在设 A, B 与C不在一条直线上，则点B与C把直线 BC 分为三个区间，并且不同区间中的点应在不同的凸集上。因此所求凸集的个数不能小于 3，而且如图 12.16 所示，可以将M分为三个凸集。



图 12.15

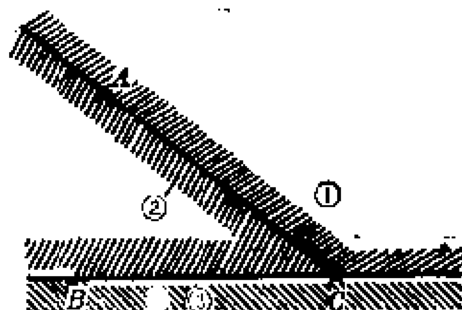


图 12.16

12.16 按题中条件作出的那些直线中必定有两条是相交的，它们把平面分成 4 个区域，如果再作一条直线，则至少增加 2 个区域，所以恰有 5 个区域的分法是不可能的，因此 $n_0\geqslant5$。另一方面，任意 $n>5$ 个区域都可按所要求的方法得到：如果 $n=2k$, $k\in N$，则可如图 12.17 将整个平面分划；如果 $n=4k+3$，则见图 12.18；如果 $n=4k+5$，则见图 12.19。于是最小的 n_0 为 5。

12.17 例如在坐标平面上下列带形区域构成的集合

$$M=\{(x,y)\mid\sqrt{2}x-1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}x\}$$

就满足题中条件。事实上，这个集合含有无限多个形如$(x,[\sqrt{2}x])$的整点，其中 $x\in Z$。另一方面，当 $k=\sqrt{2}$ 时，直线 $y=kx+b$ 至多含有一个整点。否则，当 $|x_1-x_2|\in N$ 时，$|(\sqrt{2}x_1+b)-(\sqrt{2}x_2+b)|=\sqrt{2}|x_1-x_2|$即为整数，与 $\sqrt{2}$为无理数矛盾；当 $k\neq\sqrt{2}$时，它与集合M之交是一条线段，它当然不能含有无限多个整点。

注： 可以证明，位于任意两条平行直线 $y=kx+b_1$ 和 $y=kx+b_2$ 之间的带形区域当 k 为无理数时总

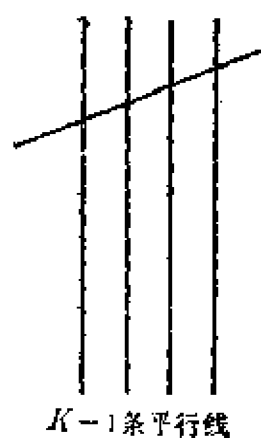


图 12.17

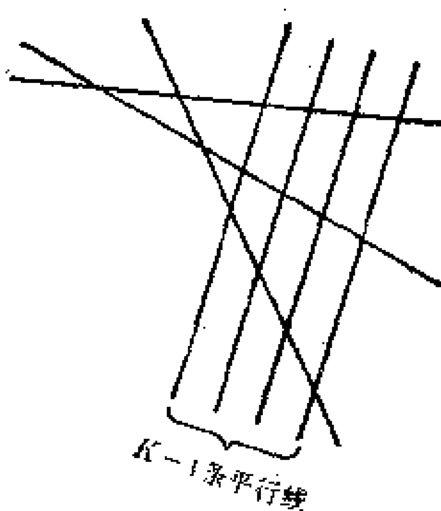


图 12.18

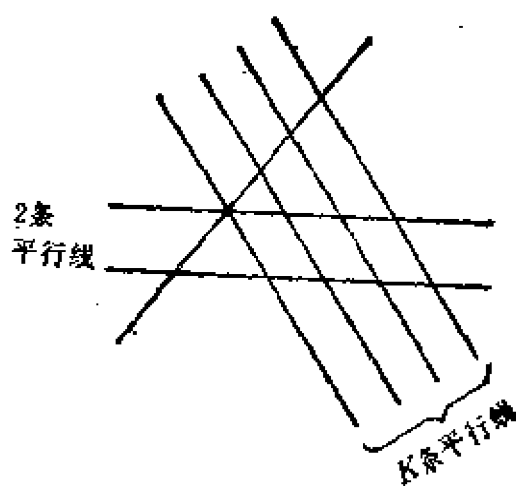


图 12.19

含有无限多个整点(不论差值$|b_1-b_2|$多小)。因此,任意一个这样的带形区域都满足题中条件。

12.18 因为对所有的n, $a_n\geqslant 0$, 所以数列$\{a_n\}$的递增性或递减性与数列

$$a_n^2=(x-ny)^2=x^2-2nxy+n^2y^2$$

的递增性或递减性是一致的,其中xy表示向量x与y的数量积$x\cdot y$。由上式可知,a_n^2是一个首项系数为正的二次三项式在点n的值。根据二次三项式的性质,这个数列不可能是递减的,因为$a_{n+1}^2-a_n^2=(2n+1)y^2-2xy>3y^2-2xy=a_2^2-a_1^2$。所以使数列递增的必要且充分条件是$a_1^2<a_2^2$,即$3y^2>2xy$。于是条件(1)与条件$3|y|>2|x|\cos\varphi$等价,其中$\varphi$是向量$x$与$y$之间的夹角,而条件(2)则不可能满足。

12.19 设M是一个面积小于π的集合。$U_1, U_2, \cdots, U_n$依次是以给定的点$A_1, A_2, \cdots, A_n$为圆心的单位圆。记

$$V_i=U_i\cap M,\ i=1,\cdots,n.$$

由于各圆心之间的距离大于2,所以这些圆都不交,从而$V_1, V_2, \cdots, V_n$也不交。另一方面,$V_i\subset M$,因此集合$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n\subset M$的面积小于$\pi$。所以,如果对每个圆$U_i$,设想经过一次平移,把它移到一个圆心为$O$的圆中(同时也含有集合$V_i$),则在圆$O$中必有一点$B$不属于每个集合$V_i$的像。于是,只要再将集合$M$平移一个长度小于1的向量$\overrightarrow{BO}$,所有的圆$U_i$的圆心$A_i$就不属于这个集合。

12.20 注意,每条长度为1的线段在两条互相垂直的直线l与l'上的两个投影长度之和不小于1。事实上,若向量x与y是长度为1的向量a在直线l和l'上的投影,则$a=x+y$,从而$|x|+|y|\geqslant|a|=1$。于是所有线段投影长度的总和不小于$4n$。因此,直线l和l'中至少有一条,设为l,使得这些线段在l上的投影长度之和不小于$2n$。因为$4n$条线段都在半径为n的圆内,所以直线l上至少有一个点,它至少在某两条线段的投影上。过这点作直线l的垂线,它至少和两条线段相交,所以它满足题中的条件。

12.21 用$U(M)$表示圆心属于点集M且半径为1的圆的并集。下面对$n\in N$用归纳法证明,对任意折线$A_0A_1\cdots A_n$,有

$$S_{U(A_0A_1\cdots A_n)}\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}A_{i-1}A_i+\pi.$$

当$n=1$时,集合$U(A_0A_1)$被分为两个半径为1的半圆及边长为A_0A_1与2的一个矩形,因此

$$S_{U(A_0A_1)}=2A_0A_1+\pi,$$

即结论成立。设结论对$n-1$成立。记

$$X=U(A_0\cdots A_{n-1}),\ Y=U(A_{n-1}A_n),\ Z=X\subset Y.$$

则因为$Z\supset U(A_{n-1})$,所以$S_Z\geqslant\pi$。由归纳假设,有

$$\begin{aligned}S_{U(A_0\cdots A_{n-1}A_n)}&=S_{X\cup Y}=S_{X\setminus Z}+S_{Y\setminus Z}+S_Z\\&=(S_{U(A_0\cdots A_{n-1}A_n)}+S_Z)+(S_{Y\setminus Z}+S_Z)-S_Z\\&=S_X+S_Y-S_Z\leqslant\left(2\sum_{i=1}^{n-1}A_{i-1}A_i+\pi\right)+(2A_{n-1}A_n+\pi)-\pi\end{aligned}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i+\pi.$$

这就证明，结论对 n 成立。对题中所给的折线，集合 $U(A_0\cdots A_n)$ 包含了整个边长为 50 的正方形，所以它的长不小于

$$\frac{1}{2}\left(S_{U(A_0\cdots A_n)}-\pi\right)>\frac{1}{2}(50^2-4)=1248.$$

这正是所要证明的。

12.22 在直线上取定某一方向为左的方向，所谓一条线段位于另一条线段的左边，是指第一条线段的左端点位于第二条线段左端点的左边，或精确地说，"非右边"。用数码 1, 2, …, n 按下述方式给这些线段编号。第一步，所有线段中最左边的那条编号为 1（如果这样的线段有好几条，则任取其中一条）。然后在每一后续步骤中从所有尚未标号的线段中取出最左边的一条，并且给它标上一个号码：如果这条线段与所有标了号的线段都不相交，则标上号码 1；如果这条线段与若干条已标了号的线段都相交，则标上不同于这些线段的号码的另一个号码。如果在某一步取出某条线段，却无法给它编号，则意味着它与 n 条已经标了号且在它左边的线段相交。在这种情形下，所取线段的左端点一定属于 $n+1$ 条线段。如果在每一步都可给刚取出的线段编号，则由狄利克雷原理（定理 1），n 个数码中必有一个，标上这个数码的线段超过了 n 条。于是，由上述编号方式，它们是互不相交的。证毕。

12.23 对每个集合 A_i, $i=1, \cdots, n$，由于它是两条线段的并集，所以可让它对应一条线段 B_i，使得 B_i 的左端点是 A_i 中最左边的点，B_i 的右端点是 A_i 中最右的点。因为 $B_i\supset A_i$，所以线段 $B_1, \cdots, B_n$ 中任意两个（甚至三个）都有公共点。现在证明，存在线段 B_k 和 B_m（允许 $k=m$），使得它们的交 C 包含在每个线段 B_i 之中。事实上，只要令 B_k 的左端点是各个 B_i 左端点中最右的那个，线段 B_m 的右端点是所有 B_i 的右端点中最左的那个。则交 $C=B_k\cap B_m$ 不会在所有线段 B_i 的左端点的左边，也不会在所有线段 B_i 的右端点的右边，即对 $i=1, 2, \cdots, n$, $C\subset B_i$。注意

$$C\cap A_i=B_k\cap B_m\cap A_i\supset A_k\cap A_m\cap A_i\neq\phi.$$

因此每个集合 A_i 要么包含集合 C 的最左边的点 a，要么包含 C 的最右边的点 b（可能 $a=b$）。否则将有 $a, b\in B_i\setminus A_i$ 且 $C\subset B_i\setminus A_i$。由此得到 $C\cap A_i=\phi$，而这是不正确的。根据狄利克雷原理一定有点 a 或 b 至少属于这些 A_i 中的一半。这正是所要证明的。

12.24 设对给定的 $n+4$ 个点已经构造某个线段网络 Q，它满足题中条件，而且不能再添加一条线段，使得题中的条件还满足（这样的网络称为极大的。因为所有可能的线段数不超过 C_{n+4}^2，所以它肯定存在）。一个多边形，如果它的顶点都是给定的点，它的边要么是网络中的线段，要么是网络中位于同一直线上一些线段之并，则称它是网式的。如果正方形 K 的顶点是 4 个编号的点，其他 n 个点都在 K 的内部，则正方形 K 的边属于任何一个极大网络，因此 K 是网式的多边形。现在证明，极大网络 Q 把正方形 K 分为一些网式三角形，其中每个三角形都恰含三个给定的点，即该三角形的顶点。考虑正方形 K 中任意一点 O。在所有包含这个点的网式多边形中（这种多边形的集合非空，因为它含有正方形 K），取一个 m 边形 M，使得它的面积最小。因为多边形 M 的内角和为 $(m-2)\cdot180°$，所以必有一个顶点 A，多边形 M 的内角 A 小于 $180°$。在角 A 的两边上各取给定点中最接近顶点 A 的点，得到点 B 与 C（图 12.20）。可以看出，在 $\triangle ABC$ 中除 A 与 B 外含有给定的点，比如点 C。在这些点中取一个点 D，使 $\angle ABD$ 达到最小（如果这样的点有好几个，则取 D 为最靠近点 B 的点）。于是 $\triangle ABD$ 中，除 A, B, C 外不再含有给定的点。这表明，网络 Q 中的线段和边 AD 与 BD 除顶点外没有公共点（除非 AD, BD 是 Q 中的线段）。由网络的极大性，线段 AD 与 BD 都属于 Q。于是 $\triangle ABD$ 是网式的。如果它不与多边形 M 重合，则 M 被分为两部分，每一部分仍是网式多边形，与多边形 M 的选取矛盾。因此 $\triangle ABD$ 即是多边形 M，于是点 O 属于网式 $\triangle ABD$，而 $\triangle ABD$ 除顶点外，不含给定的

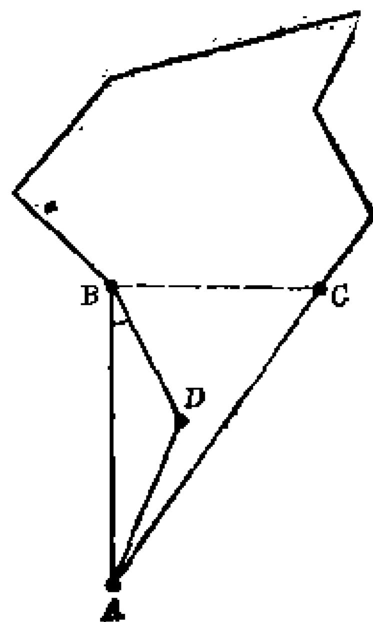


图 12.20

点。现在计算极大网络中线段的数目 k。为此，求出正方形K中由这个网络分出的所有三角形的所有内角之和。一方面，它等于 $180°\cdot l$，其中 l 是三角形的个数。另一方面，它等于正方形顶点处的内角以及正方形内部以给定点为顶点处的周角之和，即为 $360°\cdot(n+1)$。于是有，

$$180°\cdot l=360°(n+1),$$

即 $l=2(n+1)$。最后，正方形的每一条边都是三角形的一条边。而网络中除正方形的边外，每条线段都是两个三角形的公共边。因此得到 $4+2(k-4)=3l$，

从而
$$k=\frac{3}{2}l+2=3n+5.$$

12.25 在S的每两点之间连接一条线段，共得 C_n^2 条线段，其全体记为集合 A。由题中的条件 (2)，对每一点 $P\in S$，作一个圆，使圆周上至少有 k 个 S 中的点，从而圆中至少有 C_k^2 条弦是 A 中的线段。虽然，其中有些弦可能是相同的。但因为每两个圆最多只能有一条公共弦，所以 n 个圆最少有 $nC_k^2-C_n^2$ 条不同的弦是 A 中的线段。于是有 $nC_k^2-C_n^2\leqslant C_n^2$。由此即得

$$k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n}.$$

注：题中的条件(1)在上面的证明中没有用到，即事实上可以去掉，结论仍成立。

§13 几何不等式

13.1 注意 $2S=ab\sin\gamma\leqslant ab$，其中 S 为三角形的面积，γ 是已知两边的夹角。因此，如果 $a>b$，则

$$(a+h_a)-(b+h_b)=\left(a+\frac{2S}{a}\right)-\left(b+\frac{2S}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)\geqslant0,$$

而且等式当且仅当 $2S=ab$，即已知两边的夹角为直角时成立。

13.2 设凸多边形 $M_0=A_1A_2\cdots A_n$ 位于凸多边形M之内，则直线 A_1A_2 将多边形分成两部分。其中一个包含多边形 M_0，记作 M_1（图 13.1），并且凸多边形 M_1 包含线段 A_1A_2 的边 B_1B_2 不是多边形M的边。因此有 $P_{M_1}<P_M$（因为线段 B_1B_2 比任意连接它的端点的折线要短）。直线 A_2A_3 从多边形 M_1 中切出一个包含 M_0 的凸多边形 M_2，并且 $P_{M_2}\leqslant P_{M_1}$。如此继续，得到一系列的多边形

$$M\supset M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n,$$

其中最后一个将与多边形 M_0 重合，而且有

$$P_M>P_{M_1}\geqslant P_{M_2}\geqslant\cdots\geqslant P_{M_n}=P_{M_0}.$$

由此即得所要的不等式。

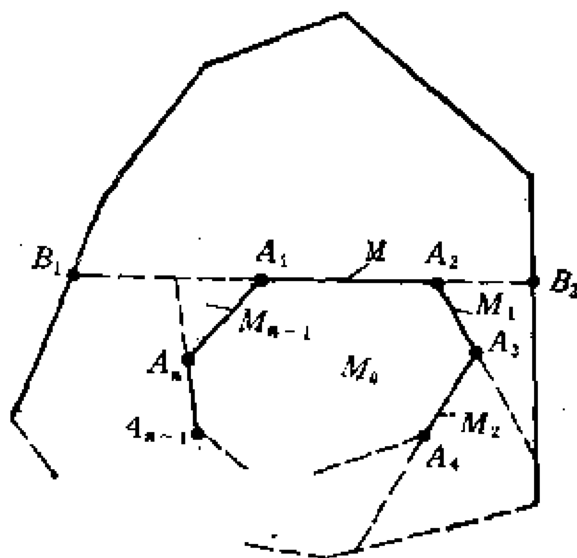


图 13.1

13.3 设点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 依次是面积为 S 的凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 诸边 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$ 的中点。记 $A_{n+1}=A_1$，$A_{n+2}=A_2$，…，则任意一个 $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 与其它三角形，除两个以点 A_{i+1} 为公共顶点的三角形外，没有公共内点。而且这两个例外的三角形也没有公共内点(图 13.2)。因此 n 边形的任意一点，至多是上述三角形中两个三角形的内点。由此得到，

$$2S\geqslant\sum_{i=1}^{n}S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}.$$

由于每条线段 $B_iB_{i+1}(B_{n+1}=B_1)$ 都是 $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 的中位线，所以

$$S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}}=\frac{1}{4}S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}.$$

这表明，有

$$S_{B_1B_2\cdots B_n}=S-\sum_{i=1}^{n}S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}}$$

$$= S - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}} \geqslant S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2},$$

这正是所需的不等式。

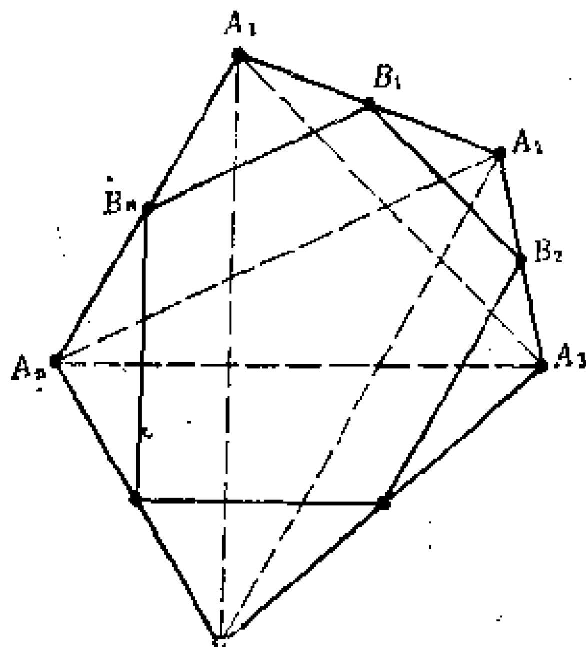


图 13.2

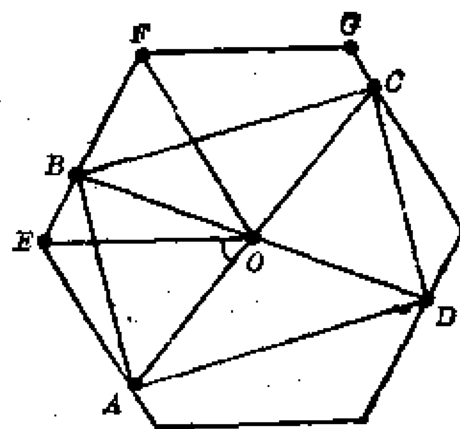


图 13.3

13.4 设平行四边形 $ABCD$ 内接于正六边形 M，它的中心 O 是平行四边形对角线的交点。取正六边形的顶点 E 与 F，使得它们与 B 点位于直线 OA 的同侧，并且满足 $\angle AOE<60^\circ$，$\angle AOF<120^\circ$（图 13.3 注意，点 E 与 F 由这些条件所唯一确定）。则有

$$60^\circ \leqslant \angle AOF < 120^\circ,$$

于是，六边形中位于直线 OA 同侧的顶点 E 与 G 到直线 AO 的距离不超过点 F 到 OA 的距离。因此

$$S_{AOB} \leqslant S_{AOF} = S_{EOF},$$

其中，因为点 A 和 E 位于六边形中平行于直线 OF 的同一条边上，即它们到直线 OF 的距离相等，所以后一等式成立。由平行四边形与正六边形的性质，可以推得，

$$S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA} = \frac{1}{4} S_{ABCD},$$

且

$$S_{EOF} = \frac{1}{6} S_M.$$

因此，

$$\frac{1}{4} S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} S_M,$$

于是

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{2}{3} S_M.$$

这正是所要证明的。

13.5 我们证明一个更广的结论：$\triangle ABC$ 中任意一个平行四边形 $KLMN$ 的面积不超过 $\triangle ABC$ 面积的一半。注意，直线 KL 与 MN 都与 $\triangle ABC$ 的两边相交（可能交于顶点）。由狄利克雷原理（定理1），这四个交点中一定有两个在同一条边上。不妨设边 BC 和直线 KL 与 MN 分别交于点 K_1 和 N_1。在边 AB，AC 与 BC 上分别取点 D，E 与 F，使得线段 DE 和直线 KL 与 MN 的交点 L_1 与 M_1 满足

$$K_1L_1 = KL,\ L_1M_1 \parallel K_1N_1 \text{ 且 } EF \parallel BD$$

（图 13.4）。则平行四边形 $KLMN$ 与 $K_1L_1M_1N_1$ 有相等的底边长及相等的高，而在平行四边形 $BDEF$ 与 $K_1L_1M_1N_1$ 中底边 DE 不小于 L_1M_1，但高相等，所以

$$S_{KLMN} = S_{K_1L_1M_1N_1} \leqslant S_{BDEF}.$$

设 $AE = x\cdot AC$，则 $EC=(1-x)AC$，且由于 $\triangle ABC$，$\triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 相似，所以

$$S_{BDEF} = S_{ABC} - S_{ADE} - S_{EFC} = S_{ABC} - x^2 S_{ABC} - (1-x)^2 S_{ABC}$$

$$= 2x(1-x)S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} S_{ABC},$$

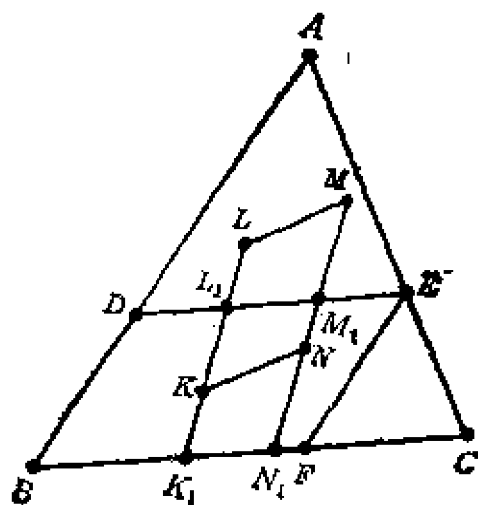


图 13.4

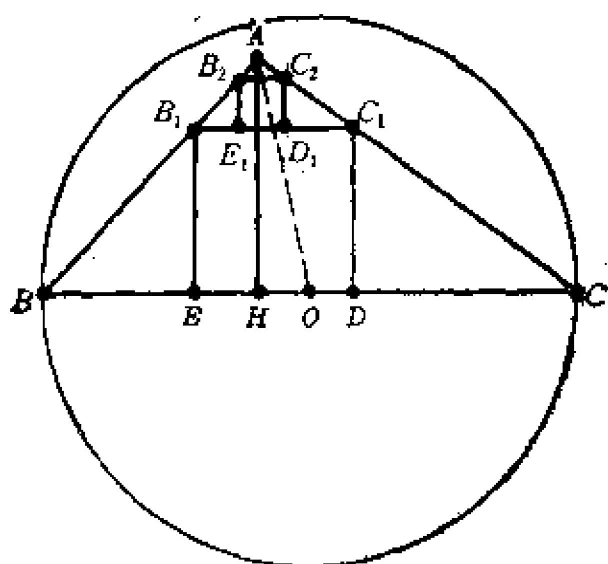


图 13.5

因为对任意 x，有 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$。因此 $S_{KLMN}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABC}$。 证毕。

13.6 由条件 $\angle BAC\geqslant 90°$，点 A 一定在以 O 为圆心，且直径为 BC 的圆内。因此对 $\triangle ABC$ 的高 AH，有

$$AH\leqslant AO\leqslant BO=\frac{1}{2}BC.$$

(图 13.5)，即 $BC\geqslant 2AH$。于是由 $\triangle BB_1E$ 与 $\triangle BAH$ 相似，$\triangle CC_1D$ 与 $\triangle CAH$ 相似，得到

$$\begin{aligned}\frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}}&=\frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}}=1+\frac{BH}{2B_1E}+\frac{CD}{2C_1D}\\&=1+\frac{BH}{2AH}+\frac{CH}{2AH}=1+\frac{BC}{2AB}\geqslant 2,\end{aligned}$$

即
$$S_{B_1C_1DE}\leqslant\frac{1}{2}S_{BB_1C_1C}.$$

同理，有
$$S_{E_1C_2D_1E_1}\leqslant\frac{1}{2}S_{B_1B_2C_2C_1},\ \cdots,\ S_{B_nC_nD_{n-1}E_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}S_{B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}},$$

其中 n 是内接正方形的个数。对这些不等式求和即得，这些正方形面积之和不超过四边形 BB_nC_nC 面积的一半，从而小于 $\triangle ABC$ 的面积的一半。

13.7 设面积为 1 的锐角 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 最大，以边 BC 的中点 M 为圆心作半径为 $R=MA$ 的圆，使得它交直线 BC 于点 D 与 E (图 13.6)。则 $\angle DAE$ 为直角，且

$a=MB=MC<R$ (否则 $MB\geqslant MD$，$MC\geqslant ME$，因此 $\angle BAC\geqslant\angle DAE=90°$，与 $\triangle ABC$ 为锐角三角形矛盾)。$\angle AMC$ 或 $\angle AMB$ 中必有一个不是锐角，不妨设 $\angle AMB=\alpha>90°$。因为 $AB\leqslant BC=2a$ (由于 $\angle BAC\geqslant\angle ACB$)，所以由余弦定理，有

$$R^2+a^2=MA^2+MB^2\leqslant MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos\alpha=AB^2\leqslant 4a^2,$$

由此得到，$R\leqslant\sqrt{3}a$，且

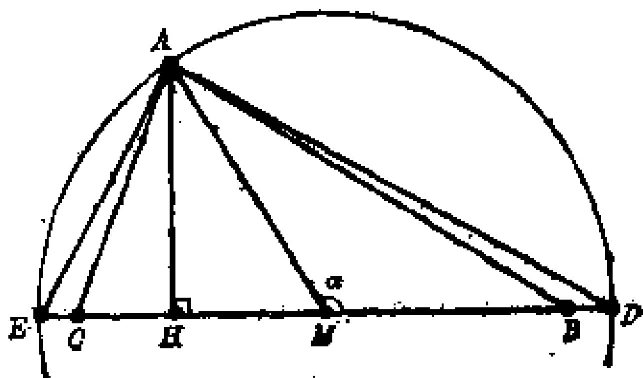


图 13.6

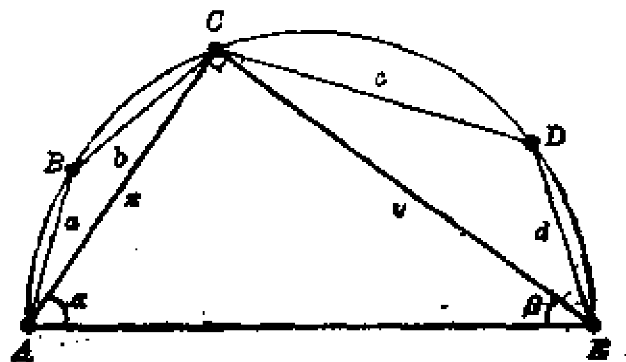


图 13.7

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AH=R\cdot AH\leqslant\sqrt{3}\,a\cdot AH=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AH=\sqrt{3},$$

其中 AH 垂直于直线 BC。结论证毕。

13.8 记 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$, $AC=x$, $CE=y$, $\angle CAE=\alpha$, $\angle AEC=\beta$。不妨设点 A 与 E 是半圆周的直径的两个端点(图 13.7)。否则,可以把 A, E 移到半圆周直径的两端,此时表达式

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd$$

的值只能增大。因为 $\angle ACE=90^\circ$, 所以 $x^2+y^2=4$。其次 $\angle ABC=180^\circ-\angle AEC=180^\circ-\beta$, $\angle CDE=180^\circ-\angle CAE=180^\circ-\alpha$。因此由余弦定理,

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ABC=a^2+b^2+2ab\cos\beta,$$
$$y^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle CDE=c^2+d^2+2cd\cos\alpha.$$

最后由 $2\cos\alpha=x>b$, $2\cos\beta=y>c$ 得到,

$$4=x^2+y^2=a^2+b^2+aby+c^2+d^2+cdx$$
$$>a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd.$$

这正是所要证明的。

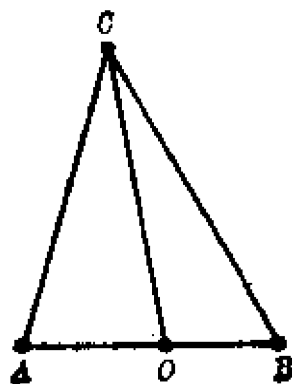


图 13.8

13.9 由 $\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}=(1-x)\cdot\overrightarrow{AB}$, 其中 $x\in(0,1)$ 得到(图 13.8)

$$OC=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CA}+x(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})|$$
$$=|(1-x)\overrightarrow{CA}+x\overrightarrow{CB}|<CA(1-x)+CBx$$

(因为向量 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 不平行)。

由此得到

$$OC\cdot AB<CA(1-x)AB+CB\cdot x\cdot AB=CA\cdot OB+CB\cdot OA.$$

这正是所要证明的。

13.10 设 $\triangle ABC$ 的周长为 p, 分别作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 的边 AB 和 PQ 上的高 CL 和 RH (图 13.9)。则由 $\triangle ACL$ 和 $\triangle ARH$ 相似得到,

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}PQ\cdot RH}{\frac{1}{2}AB\cdot CL}=\frac{PQ\cdot AR}{AB\cdot AC}.$$

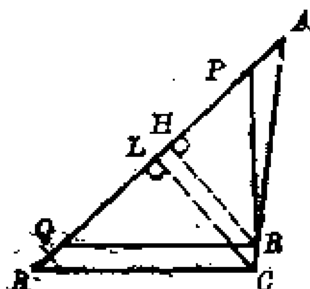


图 13.9

因为 $PQ=\frac{1}{3}p$, $AB<\frac{1}{2}p$, 所以, $\frac{PQ}{AB}>\frac{2}{3}$, 而且 $AP\leqslant AP+BQ=AB-PQ<\frac{p}{2}-\frac{p}{3}=\frac{1}{6}p$, $AR=\frac{1}{3}p-Ap>\frac{1}{3}p-\frac{1}{6}p=\frac{1}{6}p$, $AC<\frac{1}{2}p$。因此, $\frac{AR}{AC}>\frac{\frac{1}{6}p}{\frac{1}{2}p}=\frac{1}{3}$。于是, $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$。

13.11 以点 A 为圆心, $AD=r$ 为半径,以点 B 为中心, $BC=R$ 为半径,以点 P 为圆心, h 为半径分别作圆。由题中条件知,这三个圆两两相切。设 G 为圆 A 与圆 B 的切点, H 为 P 到 CD 的垂足。显然,圆 P 落在曲边三角形 GCD 内。因此,可分两种情形讨论: (1) CD 是圆 A, 圆 B 与圆 P 的公切线 (图 13.10)。此时将 AB, BP, PA 投影到 CD 上,得

$$\sqrt{(R+r)^2+(R-r)^2}=CD=CH+HD$$
$$=\sqrt{(R+h)^2-(R-h)^2}+\sqrt{(r+h)^2-(r-h)^2},$$

由此可得, $\sqrt{Rr}=\sqrt{Rh}+\sqrt{rh}$, 从而有

$$\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

(2) CD 不是圆 A 圆 B 与圆 C 的公切线(图 13.11)。此时,设 EF 是圆 A 和圆 B 的外公切线, E, F 是切点,则整个图形落在 EF 的同一侧,而圆 P 落在曲边三角形 GEF 之中。现在把点 C, D, P 看作动点。

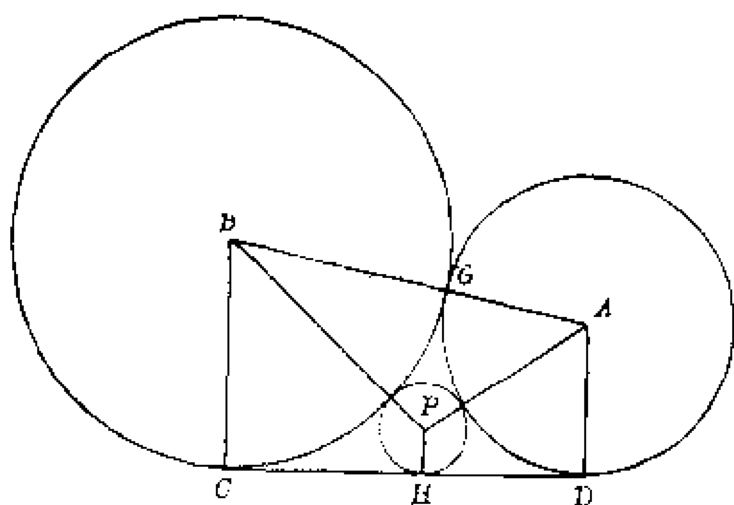


图 13.10

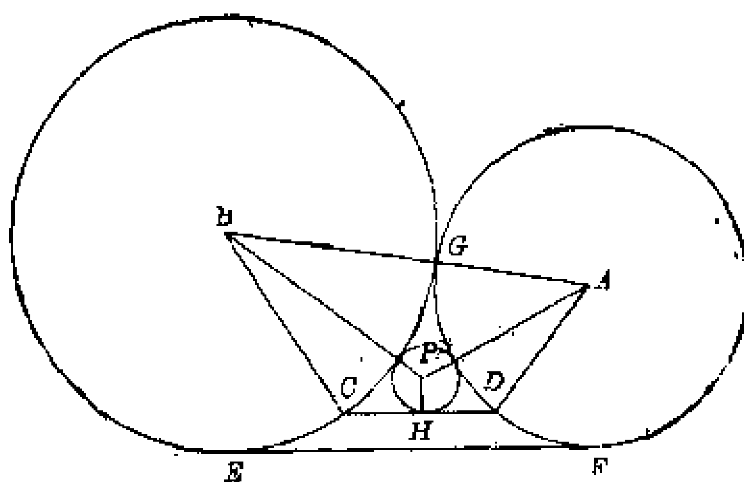


图 13.11

在点 C, D 分别沿着圆 B, 圆 A 向点 E, F 移动的过程中，与圆 A, 圆 B 相切的动圆 P 的半径 PH 越来越大. 而当点 C, D 分别移到点 E, F 时, 动圆 P 的半径达到最大, 设为 h'。但是在这个过程中, BC 和 AD 的值始终保持不变。因此, 由(1)中已证, 有

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{h'}}=\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

13.12 设 M 与 m 是凸四边形顶点间的最大距离与最小距离。由于它的各内角中必有一个不是锐角, 设为 $\angle ABC$, 所以, 由余弦定理, 有

$$M^2\geqslant AC^2\geqslant AB^2+BC^2\geqslant m^2+m^2=2m^2,$$

由此得到 $M\geqslant\sqrt{2}\,m$, 即 $\frac{M}{m}\geqslant 2$. 结论证毕。

13.13 对所给的 5 个点, 有如下两种情形:

(1) 这 5 个点是某个凸五边形的顶点。因为凸五边形内角和为 $540°=5\cdot108°$, 所以至少有一个内角 $\geqslant108°$。因此这 5 个点中至少可找到三个点, 它们组成的三角形有一个内角不小于 $108°$. 设这个三角形为 $\triangle ABC$, 并且 $\angle A\geqslant108°$. $\angle B\geqslant\angle C$. 它们的对边分别记作 a, b, c. 于是 $\angle C+\frac{1}{2}\angle A\leqslant90°$, $\angle C\leqslant90°-\frac{1}{2}\angle A$. 从而 $\sin\angle C\leqslant\sin\left(90°-\frac{1}{2}\angle A\right)=\cos\frac{1}{2}\angle A$,

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\angle A\cos\frac{1}{2}\angle A}{\sin\angle C}\geqslant2\sin\frac{\angle A}{2}\geqslant2\sin54° \quad ①$$

设五点间的最大距离为 p, 最小距离为 q, 则

$$\lambda=\frac{p}{q}\geqslant\frac{a}{c}\geqslant2\sin54°. \quad ②$$

(2) 这 5 个点不是凸五边形的顶点。则又有两种情形.

1) 其中有三点共线, 则 $\lambda\geqslant2>2\sin54°$.

2) 有一个点 M 在以其他四个点为顶点的(凸或非凸的)四边形内部, 则点 M 必在以某三点 A, B, C 为顶点的三角形内部。于是 $\triangle MAB$, $\triangle MBC$, $\triangle MCA$ 中至少有一个内角 $\geqslant120°$. 与(1)的证明相仿, 可得

$$\lambda\geqslant2\sin60°>2\sin54°.$$

从以上可以看出, 只有在情形(1), 并且①与②两式同时取等号时, λ 才取得最小值 $2\sin54°$, 于是

$$\angle A=108°,\ \angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A=\angle B,$$

即 $\triangle ABC$ 是顶角为 $108°$ 的等腰三角形, 并且 $p=a$, $q=b=c$. 设 D 与 E 是以 A, B, C 为顶点的正五边形另外两个顶点。又设题中所给的 5 个点为 A, B, C, M, N. 则 M, N 必定落在以 A 为圆心且半径为

BC 的圆(包括圆周)内；同时又落在以 B 为圆心且半径为 AB 的圆(包括圆周)外，也落在以 C 为圆心且半径为 CA 的圆（包括圆周)外 于是 M, N 落在图 13.12 所示的阴影面上，但又要求 $MN \geqslant q$ (即 $\geqslant DE$)。所以 M, N 中有一点为 D, 另一点为 E。因此当且仅当这 5 个点是一正五边形的顶点时，比值 λ 达到最小值。

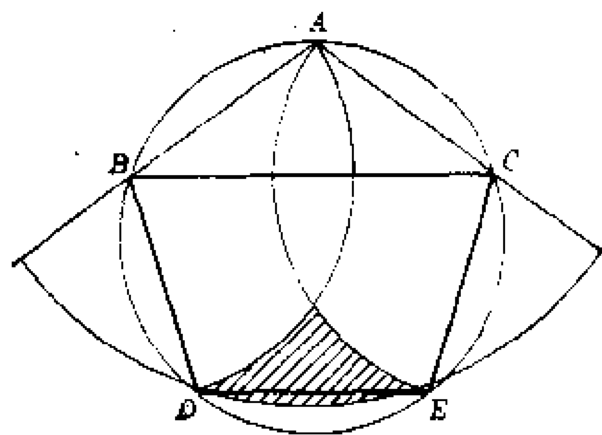


图 13.12

13.14 首先注意，如果在给定的点中有三个点 A, B, C, 使得 $120° \leqslant \angle ABC$, 则题中结论成立。事实上，设 M 与 m 分别是这些点间的最大距离与最小距离，则由余弦定理(它对 $\angle ABC = 180°$ 也成立)，有

$$M^2 \geqslant AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC$$

$$\geqslant m^2 + m^2 + 2m^2 \cdot \frac{1}{2} = 3m^2.$$

因此 $\frac{M}{m} \geqslant \sqrt{3}$。其次证明，六个点中必有三个点 A, B, C, 使得 $\angle ABC \geqslant 120°$。如果六个点是凸六边形的顶点，则一定有一个内角(注意内角之和为 $180° \cdot 4 = 120° \cdot 6$) 不小于 $120°$。如果六个点不是凸六边形的顶点，则其中一定有一点 O, 使得点 O 与其中任意一点的连线的每一侧都不含其他所有的点。于是其中有一点 A, 使得直线 OA 的两侧各有一点 B 与 C, 而且可取点 B 与 C, 使得 $\angle AOB$ 与 $\angle AOC$ 为最大(图 13.13)。则

$$\angle AOB + \angle AOC \geqslant 180°$$

(否则，所有的点将在直线 OB 的同侧)，因此有三种情形：$\angle AOB \geqslant 120°$, $\angle AOC \geqslant 120°$, $\angle BOC = 360° - \angle AOB - \angle AOC \geqslant 120°$。这就证明，不论何种情形，给定的点中必有三个点，它们构成的角不小于 $120°$。因此题中结论成立。

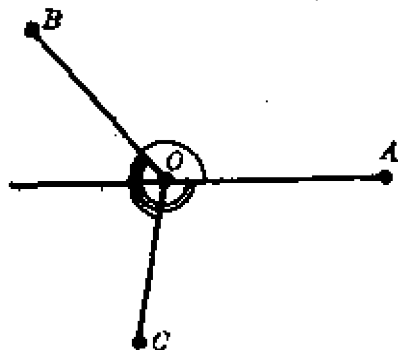


图 13.13

13.15 (1) 由平均值定理，有

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + b^2c + c^2b + 3abc$$

$$\geqslant 6\,abc + 3\,abc = 9abc.$$

由此可得，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{q}{P}.$$

(2) 不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{P^2}{3}$$

可由下列演算和比较大小得到：

$$P^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab + 2\,bc + 2\,ca$$

$$\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)$$

$$= 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

(3) 由海伦公式与平均值定理得到，

$$27S^2 = 27\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)$$

$$\leqslant 27\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{P}{2} - a\right) + \left(\frac{P}{2} - b\right) + \left(\frac{P}{2} - c\right)}{3}\right)^3 = \frac{P^4}{16}.$$

即

$$P^2 \geqslant 12\sqrt{3}\,S.$$

(4) 由不等式(2)和(3)，有

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{P^2}{3} \geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

(5) 不等式

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{P^3}{9}$$

可由下列演算与比较大小得到：

$$\begin{aligned}P^3&=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+3bc(b+c)\\&+3ca(c+a)\leqslant a^3+b^3+c^3+2(a^3+b^3+c^3)\\&+3(a^2-ab+b^2)(a+b)+3(a^2-ac+c^2)(a+c)+3(b^2-bc+c^2)(b+c)\\&=9(a^3+b^3+c^3).\end{aligned}$$

(6) 由不等式(3)和(5)，有

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{P^3}{9}\geqslant12\sqrt{3}\,\frac{SP}{9}=\frac{4\sqrt{3}}{3}SP.$$

(7) 由不等式(4)得到

$$16S^2\leqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{3}\leqslant a^4+b^4+c^4.$$

13.16 令 $\alpha_1=\angle OAC$，$\alpha_2=\angle OAB$，$\beta_1=\angle OBA$，$\beta_2=\angle OBC$，$\gamma_1=\angle OCB$，$\gamma_2=\angle OCA$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\beta_2$，$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$（图 13.14）。则所欲证的不等式

可由下述演算与比较大小得到：

$$\begin{aligned}p&=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}(OC\cos\gamma_1+OC\cos\gamma_2+OB\cos\beta_1\\&+OB\cos\beta_2+OA\cos\alpha_1+OA\cos\alpha_2)\\&=OC\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}+OB\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\\&+OA\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant OA\cos\frac{\alpha}{2}+OB\cos\frac{\beta}{2}\\&+OC\cos\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

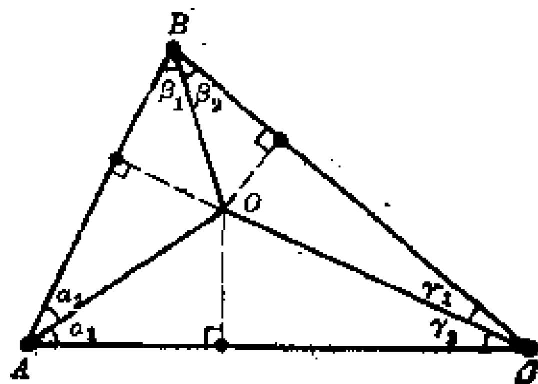


图 13.14

当 $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$，$\gamma_1=\gamma_2$，即O为 $\triangle ABC$ 的角平分线的交点时等式成立。

13.17 注意，当 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ 时，所欲证的不等式化为等式。设三角形有两个角不相等，设为 α 与 β，则

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma&=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)\\&<2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1\\&=-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2},\end{aligned}$$

即所欲证的不等式也成立，而且是严格的。于是等式只对等边三角形成立。

13.18 记 $f(\alpha,\beta,\gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$，其中 α，β，γ 是三角形的三个内角。则 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$，因此，

$$\begin{aligned}4\left(f(\alpha,\beta,\gamma)-\frac{3}{4}\right)&=4\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+\frac{1+\cos2\gamma}{2}-\frac{3}{4}\right)\\&=2\cos2\alpha+2\cos2\beta+2\cos2\gamma+3\\&=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+4\cos^2(\alpha+\beta)+1\\&=(2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))^2+1-\cos^2(\alpha-\beta)\geqslant0.\end{aligned}$$

由此得到所欲证的不等式

$$f(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant\frac{3}{4}.$$

其中当且仅当 $\cos(\alpha-\beta)=1$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$，即 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ 时等式成立。注意 $f(\alpha,\beta,\gamma)$ 不会

取到最大值，因为任意三角形的内角 α, β, γ 都满足

$$\varepsilon<\alpha, \beta, \gamma<180^\circ-2\varepsilon,$$

其中 ε 是充分小的正数。由此得到

$$|\cos\alpha|<\cos\varepsilon,\ |\cos\beta|<\cos\varepsilon,\ |\cos\gamma|<\cos\varepsilon,$$

且
$$f(\alpha, \beta, \gamma)<f(\varepsilon, \varepsilon, 180^\circ-2\varepsilon).$$

13.19 当三角形的内角 $\alpha, \beta, \gamma\leqslant 90^\circ$ 时，有

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$
$$+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$<2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha.$$

其中用到下列不等式：

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}<2\cos\frac{\gamma}{2},\quad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}<2\cos\frac{\beta}{2},\quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

要证明上述不等式，比如其中第一个，只须注意 $\frac{\gamma}{2}<60^\circ$，从而 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1=2\cos 60^\circ<2\cos\frac{\gamma}{2}$，同理可证其他不等式。

13.20 在 $\triangle ABC$ 中，设

$AB=c,\ AC=b,\ BC=a$ 且 $\angle BAC=\alpha$.

考虑 $\triangle ABC$ 的外接圆周上边 BC 的对弧 $\overset{\frown}{BAC}$(图 13.15) 因为弧的中点 D 是弧上离弦 BC 最远的点，所以对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的高 $AH=h$ 与 DK，有

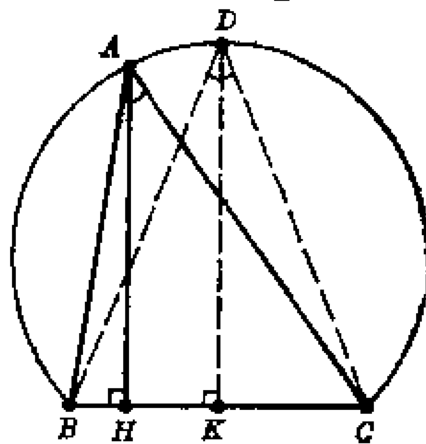


图 13.15

$$h\leqslant DK=BK\cdot\operatorname{ctg}\frac{\angle BDC}{2}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

由平均值定理，有

$$\frac{ab+ac+bc}{4S}\geqslant\frac{3}{4S}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)^2\cdot\frac{1}{2}ah}}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{h\sin\alpha^2}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}.$$

记 $\cos\alpha=x$，再由平均值定理，得到

$$\frac{1}{2}\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1+x)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3(1-x)}=\frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1+x}{3}\right)^3(1-x)}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{1+x}{3}+(1-x)\right)\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{2}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

从而
$$\frac{ab+bc+ca}{4S}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

结论证毕。

13.21 如果点 O 是六边形 $ABCDEF$ 的外接圆圆心，其半径为 R(图 13.16)，且

$$\alpha=\angle CAE,\ \beta=\angle AEC,\ \gamma=\angle ACE.$$

则由条件中所说的关于边的等式，有

$\angle AOB=\angle BOC=\beta$,

$\angle COD=\angle DOE=\alpha$,

$\angle EOF=\angle FOA=\gamma$.

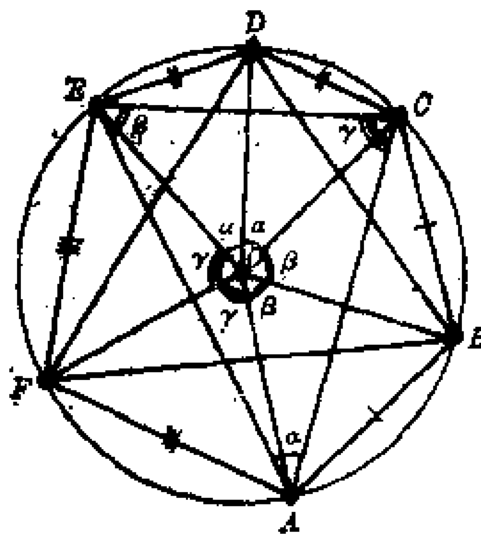


图 13.16

由此求得面积

$$S_{ACE}=\frac{EC\cdot CA\cdot AE}{4R}$$
$$=\frac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}{4R}$$
$$=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

同理，有

$$S_{BDF}=2R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

由于关系式

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma=(\sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta\sin\gamma)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\cdot\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma))\cdot\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha+\beta))\cdot\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha+\gamma))\cdot\frac{1}{2}(1-\cos(\beta+\gamma))$$
$$=\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2},$$

对满足 $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 的任意正值 α、β、γ 都成立，因此有

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

由此可推出所要证的不等式。

13.22 我们证明，$AA_1>\frac{AB+AC}{2}$。事实上，由托勒玫定理(定理69)，有

$$AA_1\cdot BC=AB\cdot A_1C+AC\cdot A_1B$$

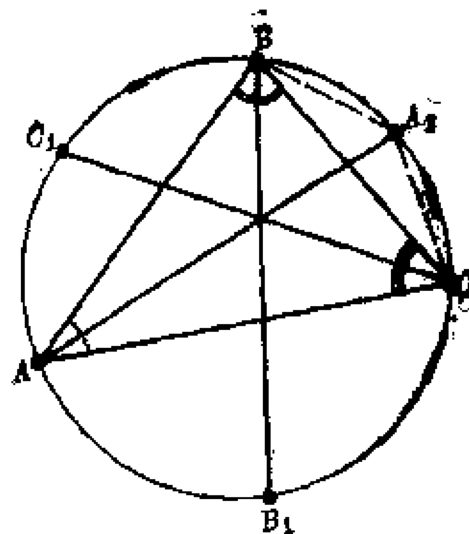


图 13.17

(图13.17)，并注意，圆周角$\angle BAA_1$，$\angle CAA_1$相等，因此$A_1B=A_1C=x$。于是由$2x=A_1B+A_1C>BC$，有

$$2AA_1=2\frac{ABx+ACx}{BC}=(AB+AC)\frac{2x}{BC}>AB+AC,$$

同理可证，

$$BB_1>\frac{BA+BC}{2},\qquad CC_1>\frac{CA+CB}{2}.$$

把它们相加，便得到所要证的不等式。

$$AA_1+BB_1+CC_1>\frac{1}{2}(AB+AC+AB+BC+AC+BC)$$
$$=AB+BC+AC.$$

13.23 过点B和C，分别作关于AD的中点O的对称点B'和C' (图13.18)。因为$ABCDE$是凸五边形，所以点B'和C'在$\triangle AED$内，于是问题化为证明，$AE+ED>AC'+C'B'+B'D$。延长AC'，交边ED于点P，延长DB'，交AP于点Q。则

$$AE+EP>AP=AC'+C'Q+QP,$$
$$QP+PD>QD=QB'+B'D,$$
$$C'Q+QB'>C'B'$$

上三式相加，并消掉QP，$C'Q$和QB'，得到

$$AE+EP+PD>AC'+C'B'+B'D,$$

即有$AE+ED>AC'+C'B'+B'D$。证毕。

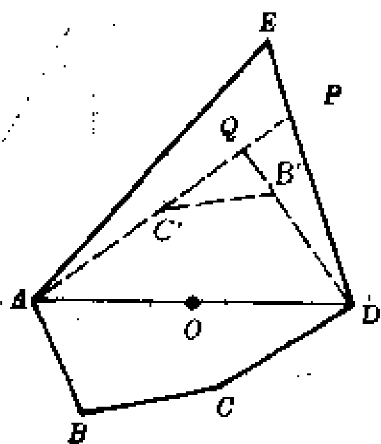


图 13.18

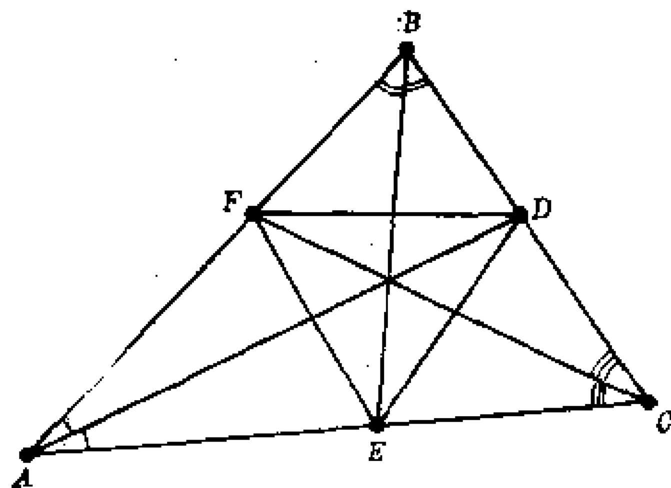


图 13.19

13.24 记 $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. $S=S_{ABC}$, $S_0=S_{DEF}$, 则由三角形角平分线的性质(图 13.19), 有

$$\frac{AF}{b}=\frac{BF}{a}=\frac{AF+BF}{b+a}=\frac{c}{a+b},$$

从而
$$AF=\frac{bc}{a+b}.$$

同理,有
$$AE=\frac{ac}{a+c}.$$

因此,
$$S_{AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot AE\sin\angle BAC$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC\cdot\frac{bc}{(a+b)(a+c)}=\frac{bcS}{(a+b)(a+c)}.$$

同理可得,
$$S_{BDF}=\frac{ac\,S}{(a+b)(b+c)},\quad S_{CDE}=\frac{ab\,S}{(a+c)(b+c)}.$$

由平均值定理得到,

$$\begin{aligned}S-S_0&=S_{AEF}+S_{BDF}+S_{CDE}\\&=\left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)S\\&=\frac{c^2b+b^2c+a^2c+c^2a+b^2a+a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}S\geqslant\frac{6abc\,S}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=3\left(1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ac}{(a+b)(c+b)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)S\\&=3(S-S_{AEF}-S_{BDF}-S_{CDE})=3S_0.\end{aligned}$$

于是 $S-S_0\geqslant 3S_0$, 即 $S_0\leqslant\frac{S}{4}$. 结论证毕.

13.25 首先,设三角形的边长为 a, b, c, 它们的对角为 α, β, γ, 周长为 P, 面积为 S 且内切圆半径为 r, 则

$$a=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),\ b=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$c=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),$$
$$\frac{P^2}{S}=\frac{2P^2}{Pr}=\frac{2(a+b+c)}{r}=4\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

所以,为证明题中结论,只须证明

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1}{2}<\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_2}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma_2}{2},$$

其中 $\alpha_j=\angle BA_jC$, $\beta_j=\angle A_jBC$, $\gamma_j=\angle A_jCB$, $j=1, 2$. 考虑 $\triangle A_1BC$ 的边上的点 A_3, 即直线 BA_2 与边 A_1C 的交点 A_3(图 13.20), 则 $\gamma_1=\gamma_3=\gamma$, 所以对 $\triangle A_1BC$ 与 $\triangle A_2BC$, 归结为证明下面的不等式.

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}<\operatorname{ctg}\frac{\alpha_3}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_3}{2}.$$

为此，只须注意

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_j}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_j}{2}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha_j}{2}+\frac{\beta_j}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_j}{2}\sin\frac{\beta_j}{2}}=\frac{2\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha_j}{2}-\frac{\beta_j}{2}\right)-\sin\frac{\gamma}{2}},$$

及不等式 $\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}>\cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}$

（它由 $\alpha_3>\alpha_1>\frac{\pi}{3}>\beta_1>\beta_3$，$0<\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}<\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}<\frac{\pi}{2}$ 推出）.

于是得到 $\frac{S_1}{P_1^2}>\frac{S_3}{P_3^2}$.

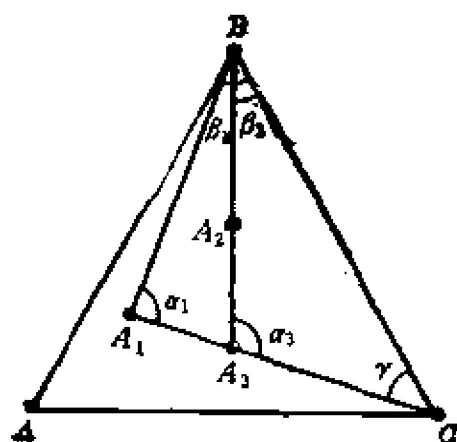


图 13.20

其中 S_j，P_j 是 $\triangle A_jBC$ 的面积与周长，$j=1, 3$. 对 $\triangle A_3BC$ 与 $\triangle A_2BC$ 再用所证明的事实（注意点 A_2 在 $\triangle A_3BC$ 的边 A_3B 上），即得

$$\frac{S_3}{P_3^2}>\frac{S_2}{P_2^2}.$$

于是，便得到题中的不等式.

13.26 同心圆 C_1 和 C_2 的圆心记为 O，连结 OA_3，OB_3，由托勒玫定理（定理 69），

$$OB_3\cdot A_3A_4\leqslant OA_3\cdot B_3B_4+OB_4\cdot A_3B_3.$$

因为 $OB_4=2OA_3$，$A_3B_4=A_3A_4+A_4B_4$，所以，

$$2(A_3A_4+A_4B_4)\leqslant B_3B_4+2A_3B_3.$$

同理，

$$2(A_4A_1+A_1B_1)\leqslant B_4B_1+2A_4B_4,$$
$$2(A_1A_2+A_2B_2)\leqslant B_1B_2+2A_1B_1,$$
$$2(A_2A_3+A_3B_3)\leqslant B_2B_3+2A_2B_2.$$

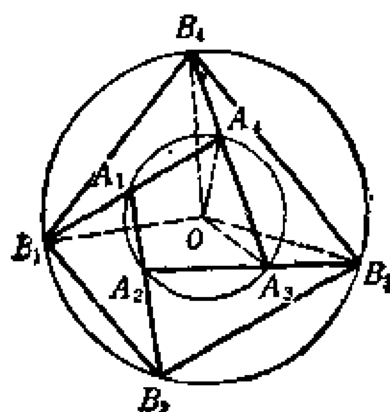


图 13.21

上面四式相加，得到，

$$2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)\leqslant B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1.$$

这就证明结论成立. 如果其中等式成立，则上面四个不等式中每一个等号都成立，从而相应的四点共圆，即 O，A_3，B_3，B_4 四点共圆，O，A_4，B_4，B_1 四点共圆. 由前者可知，$\angle OA_3A_2=\angle OB_4B_3=\angle OA_3B_4$，所以 $A_2A_3=A_3A_4$. 由后者得到，$A_4A_3=A_4A_1$，$A_1A_1=A_2A_3$. 因此 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形. 反之如果 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形，则 $\angle OA_3A_2=\angle OA_3A_4$，于是，可证 O，A_3，B_3，B_4 四点共圆，同理 O，A_4，B_4，B_1 四点共圆. 从而上面四个不等式均呈等式，从而结论中等式成立（图 13.21）

注 对 n 边形，类似的结论成立，即设两个同心圆半径之比 $\frac{OB_1}{OA_1}$ 为 k，则有

$$k(A_1A_2+\cdots+A_nA_1)\leqslant B_1B_2+\cdots+B_nB_1,$$

并且等式当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形时成立.

13.27 在所给的以 O 为圆心的圆中作一个直径为 2 的同心圆. 如果这个圆内有两个给定点，则这两点间的距离小于2，从而题中结论成立. 否则在两个圆周之间的环形区域中至少有 9 个点. 将这环域用过点 O 的射线分成 8 个相等的环状扇形（图13.22，相邻射线间的夹角为 45°）. 则一定有两个给定的点 A 与 B 落在同一环状扇形 $CDEF$ 上. 在半径 OC 与 OD 上各取点 A_1 与 B_1，使得 $OA_1=OA$，$OB_1=OB$. 由于 $\angle AOB<\angle A_1OB_1$，所以由余弦定理，有 $AB\leqslant A_1B_1$. 注意，

$$A_1B_1\leqslant\max\{A_1D,\ A_1E\}.$$

事实上，点 B_1 在直线 DE 上，并且介于 A_1 在 OD 上的投影 H 和点

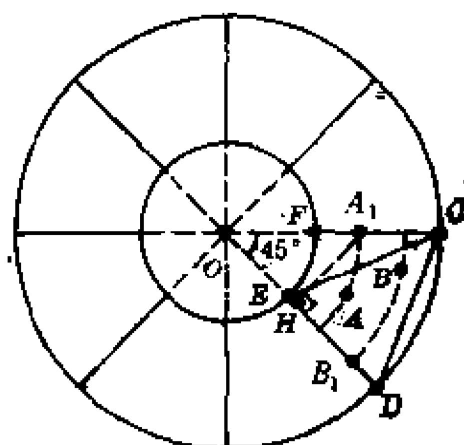


图 13.22

D(或点 E，不妨设为 D)之间。因此斜线 A_1D 在 OD 上的投影不小于斜线 A_1B_1 的投影 HB_1，从而有

$$A_1B_1 \leqslant A_1D.$$

同理可得，$DA_1 \leqslant \max\{DF, DC\}$，$EA_1 \leqslant \max\{EF, EC\}$。通过如下估算，

$$EF^2 < CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD\cos 45°$$

$$= 2 \cdot \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{2}}{4} < \frac{25}{2} - \frac{25 \cdot 1.4}{4} = 3.75 < 4,$$

$$EC^2 = FD^2 = OF^2 + OD^2 - 2OF \cdot OD\cos 45°$$

$$= 1 + \frac{25}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < 7.25 - \frac{5 \cdot 1.4}{2} = 3.75 < 4,$$

最后得到 $AB \leqslant A_1B_1 \leqslant \max\{DF, DC, EF, EC\} < 2$。结论证毕。

13.28 记 $\overrightarrow{OA_i} = \boldsymbol{a}_i$，$i = 1, \cdots, n$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，则有 $|\boldsymbol{a}_i| = 1$，$\overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}$，

从而

$$\sum_{i=1}^{n} BA_i = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}| = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{a}_i|$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i^2 - \boldsymbol{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i = n - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{o} = n.$$

结论证毕。

13.29 注意，如果点 A, B, C, D, E 共线，则不等式显然成立。事实上，为确定起见，设点 E 在点 C 与 D 之间，则有

$$(AC + AD) + (BC + BD + AE + BE) \geqslant CD + CD + AB$$

$$= (CE + ED) + CD + AB.$$

下面考虑一般情况。在平面上取一条直线 l_0，且在 l_0 上取一点 O。用 l_φ 表示将直线 l_0 绕点 O 按反时针方向旋转角 φ 后得到的直线，X_φ 表示任意一点 X 在直线 l_φ 上的投影(图 13.23)。则对任意一条平行于某直线 l_ψ 的线段 XY，有

$$X_\varphi Y_\varphi = XY \cdot |\cos(\psi - \varphi)|$$

(图 13.22)。由此得到

$$\int_0^\pi X_\varphi Y_\varphi d\varphi = XY\int_0^\pi |\cos\ (\varphi - \psi)|\,d\varphi = XY\int_{-\psi}^{\pi - \psi} |\cos x|\,dx$$

$$= XY\int_0^\pi |\cos x|\,dx = 2\ XY\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 2XY$$

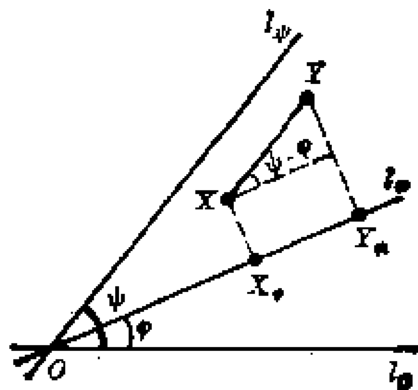


图 13.23

(因为以 π 为周期的函数 $|\cos x|$ 在长为 π 的区间上的积分不依赖这个区间在数轴上的位置)。对点 A, B, C, D, E 在直线 l_φ 上的投影 $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, D_\varphi, E_\varphi$，由前面的证明，有

$$A_\varphi B_\varphi + C_\varphi D_\varphi + D_\varphi E_\varphi + E_\varphi C_\varphi \leqslant A_\varphi C_\varphi + A_\varphi D_\varphi + A_\varphi E_\varphi + B_\varphi C_\varphi + B_\varphi D_\varphi + B_\varphi E_\varphi.$$

因此将上式由 0 到 π 对 φ 积分，便得到所要证的不等式

$$2AB + 2CD + 2DE + 2EC \leqslant 2AC + 2AD + 2AE + 2BC + 2BD + 2BE.$$

§ 14 几何极值问题

14.1 设 AD 是较大的底边，BH 是给定梯形 $ABCD$ 的高(图 14.1)。如果 $AB = CD = 13$，则 $AD + BC = 28 - 2 \cdot B = 2$，且 $S_{ABCD} = BH \cdot \frac{AD + BC}{2} \leqslant 13 \cdot \frac{2}{2} = 13 < 27$，不可能。因此 $AD = 13$。记 $AB = x$，则

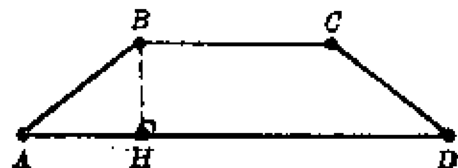


图 14.1

$$BC = 28 - 13 - 2x = 15 - 2x,\ AH = \frac{13 - (15 - 2x)}{2} = x - 1,$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{2x - 1}.$$

由平均值定理得到，

$$S_{ABCD}=\sqrt{2x-1}\cdot\frac{28-2x}{2}=\sqrt{(2x-1)(14-x)^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{(2x-1)+(14-x)+(14-x)}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{27}{3}\right)^3}=27.$$

其中当且仅当 $2x-1=14-x$，即 $x=5$，也即 $AB=BC=CD=5$ 时 $S_{ABCD}=27$，而等式 $S_{ABCD}=27.001$ 是不可能成立的。

14.2 设 a, b, c 是半周长 p 一定的三角形的边长，S 与 r 是它的面积与内切圆半径，则由平均值定理，有

$$(rp)^2=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$\leqslant p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27}.$$

由此得到 $r\leqslant\frac{p}{\sqrt{27}}$。并且，当且仅当 $p-a=p-b=p-c$，即三角形为等边三角形时 r 取到最大值。

14.3 设点 A 与圆心 O 的距离为 k。过点 A 作互相垂直的弦 KL 与 MN，又设 OB 与 OC 分别垂直于弦 KL 与 MN，且记 $\angle AOB=\alpha$(图 14.2)。则

$$KL=2BL=2\sqrt{1-k^2\cos^2\alpha},$$
$$MN=2MC=2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},$$

且

$$(KL+MN)^2=8-4k^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$+8\sqrt{1-k^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+k^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$$
$$=8-4k^2+4\sqrt{4-4k^2+k^4\sin^2 2\alpha}.$$

上式当 $\sin 2\alpha=1$，即 $\alpha=45°$ 时达到最大，当 $\sin 2\alpha=0$ 即 $\alpha=0°$ 或 $\alpha=90°$ 时达到最小。因此 $KL+MN$ 的最大值为

$$\sqrt{8-4k^2+4(2-k^2)}=2\sqrt{4-2k^2},$$

而最小值为

$$\sqrt{8-4k^2+8\sqrt{1-k^2}}=2(1+\sqrt{1-k^2}).$$

14.4 不妨设圆心落在如图 14.3(1)所示的 Z 中。则当 AB 弦向上平移时，由于图 14.3(2)中的阴影部分面积大于它左边无阴影的部分的面积，所以 $A(X)+A(Z)$ 增加，而 $A(Y)+A(W)$ 减少(注意 X, Y, Z, W 面积之和是定值 πr^2)，因而比值 $\frac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 增加。于是当点 A 与点 C 重合时，它才有可能取到最大值。

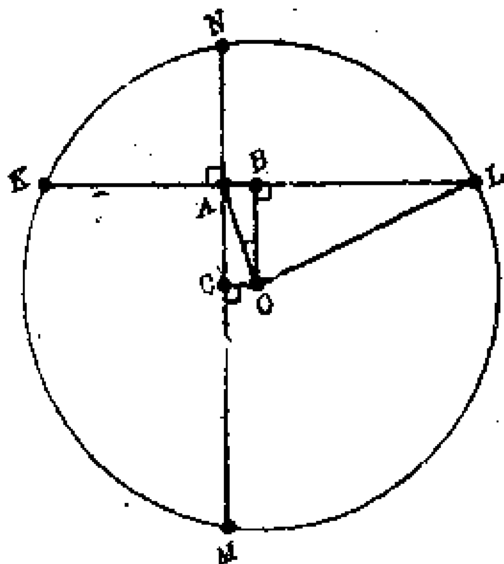


图 14.2

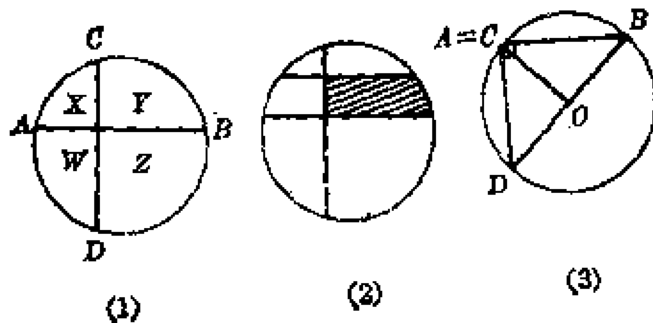


图 14.3

在图 14.3(3)中，直角三角形 ABD 的斜边 BD 是直径，$\triangle ABD$ 在 OA 为高时面积最大，这时 $A(Z)$ 为最大，$A(Z)+A(X)$ 也最大，其值为 $\frac{1}{2}\pi r^2+r^2$。而 $A(Y)+A(W)$ 为最小，其值为 $\frac{1}{2}\pi r^2-r^2$。

所以 $\dfrac{A(X)+A(Z)}{A(Y)+A(W)}$ 的最大值为

$$\frac{\frac{1}{2}\pi r^2+r^2}{\frac{1}{2}\pi r^2-r^2}=\frac{\pi+2}{\pi-2},$$

最小值为

$$\frac{\pi-2}{\pi+2}.$$

14.5 设 K, L, M, N 是四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点(图 14.4)。则

$$\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}),$$

同理有

$$\overrightarrow{NL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$$

因此

$$KM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|\leqslant\frac{1}{2}(AD+BC),$$

$$NL=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|\leqslant\frac{1}{2}(AB+DC).$$

从而有

$$KM+NL\leqslant\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA).$$

其中当且仅当向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 共线，即 $ABCD$ 为平行四边形时等式成立。

14.6 设 $\triangle EFG$ 是边长为 1 的正方形$ABCD$的任意一个内接正三角形，由于正三角形的三个顶点至少落在正方形的三边上，所以不妨设顶点F和G在正方形 $ABCD$ 的一组对边上 (图 14.5)。作 $\triangle EFG$ 的边 FG 上的高 EK，则 E, K, G, D 四点共圆．连结 KD，则有 $\angle KDE=\angle EGK=60°$。同理，连结 AK，则由 E, K, F, A 四点共圆得到，$\angle KAE=\angle EFK=60°$。所以 $\triangle KDA$ 是正三角形，而K是它的一个顶点．这就证明，内接正 $\triangle EFG$ 中边 FG 的中点K是不动点．又，正三角形的面积由它的边长所决

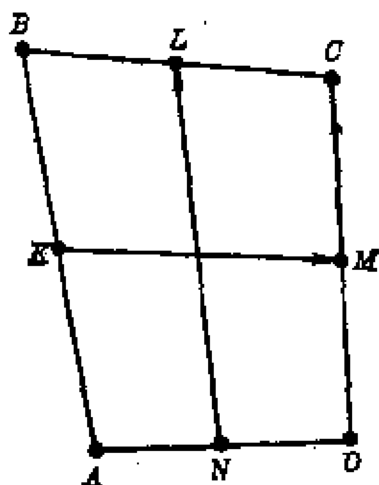


图 14.4

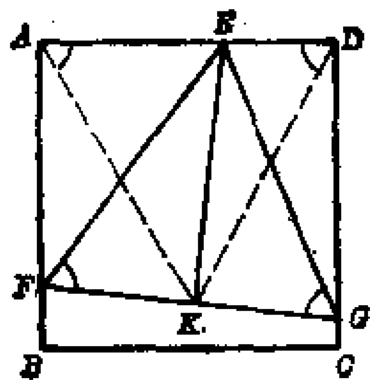


图 14.5

定。当 FK 与 AB 垂直时，内接 $\triangle EFG$ 的边长为 1，这时边长最小，从而其面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$也最小，当 KF 通过点B时，内接 $\triangle EFG$ 的边长为$\sqrt{2-\sqrt{3}}$，这时边长最大，它的面积 $S=2\sqrt{3}-3$也最大。

14.7 根据题意，有如下关系式(图 14.6)

$$\begin{aligned}OA^2+OB^2+OC^2+OD^2&=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2)+\frac{1}{2}(OB^2+OC^2)\\&\quad+\frac{1}{2}(OC^2+OD^2)+\frac{1}{2}(OD^2+OA^2)\\&\geqslant OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA\\&\geqslant 2S_{AOB}+2S_{BOC}+2S_{COD}+2S_{DOA}=2S.\end{aligned}$$

其中仅当 $OA=OB=OC=OD$，且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA$ 时等式成立。这时给定的四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 互相垂直，并且交点 O 是它们的等分点，即 $ABCD$ 是正方形，点 O 是它的中心。

14.8 令 $a_1=A_2A_3$，$a_2=A_1A_3$，$a_3=A_1A_2$，$h_1=A_1H_1$，$h_2=A_2H_2$，$h_3=A_3H_3$。则有

$$a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=a_1h_1\frac{a_3}{a_1}+a_2h_2\frac{a_1}{a_2}+a_3h_3\frac{a_2}{a_3}$$

$$=2S\left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right).$$

由平均值定理，有 $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\geqslant 3$。其中当且仅 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}$，即 $a_1=a_2=a_3$ 时等式成立。因此条件

$$a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=6S$$

与条件 $a_1=a_2=a_3$ 等价。这正是所要证明的。

图 14.6

14.9 设 h_a，h_b，h_c 是满足题中等式的三角形的高（图 14.7），S 是它的面积。则

$$a\sin\beta=h_c,\ b\sin\gamma=h_a,\ c\sin\alpha=h_b,$$

而题中等式等价于

$$P(h_a+h_b+h_c)=9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma).$$

一方面，由定理 75，有

$$9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)$$
$$=9R(2R\sin\alpha\cos\alpha+2R\sin\beta\cos\beta+2R\sin\gamma\cos\gamma)$$
$$=9R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=18S.$$

另一方面，由平均值定理可得

$$P(h_a+h_b+h_c)=(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)$$
$$\geqslant 9\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{h_ah_bh_c}=9\sqrt[3]{ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c}$$
$$=9\sqrt[3]{(2S)^3}=18S.$$

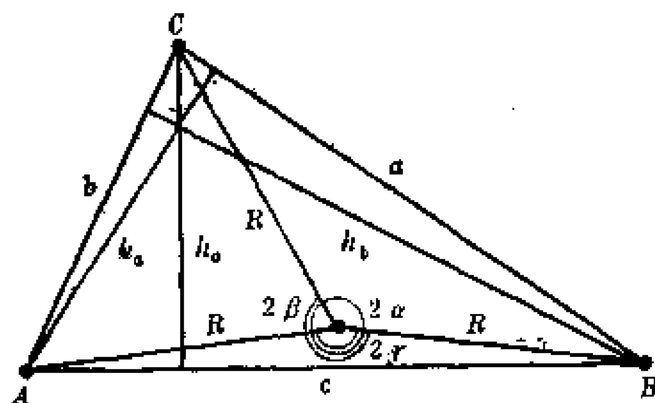


图 14.7

其中当且仅当 $a=b=c$，$h_a=h_b=h_c$，即三角形是等边三角形时等式成立。结论证毕。

14.10 设面积为 S_B 的正 n 边形 $B_1\cdots B_n$ 内接于面积为 S_A 的正 n 边形 $A_1\cdots A_n$。则当它们不重合时每一边 A_iA_{i+1} 上恰好有一个顶点 B_i，其中 $i=1, 2, \cdots, n$，且 $A_{n+1}=A_1$。事实上，如若不然，则由狄利克雷原理（定理 1），一定有某个边，不妨设为边 A_1A_2，含有两个点 B_1 与 B_2。为确定起见，设 $A_1B_2>A_1B_1$。则顶点 B_3（位于与 $\triangle B_1B_2B_3$ 相似的 $\triangle A_1A_2A_3$ 内）与顶点 B_n（在 $\triangle A_2A_1A_n$ 内）只能分别在边 A_2A_3 与 A_1A_n 上（由于 $n>3$，线段 A_1A_3 与 A_2A_n 是对角线而不能是 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 的边）。这表明 $B_1=A_1$，$B_2=A_2$。下面证明，$A_1B_1=A_2B_2=\cdots=A_nB_n$。事实上，由于

$$\angle B_1A_2B_2=\angle B_2A_3B_3=\angle B_1B_2B_3=180^\circ\cdot\frac{n-2}{n},$$

$$\angle A_2B_1B_2=180^\circ-\angle B_1A_2B_2-\angle A_2B_2B_1$$
$$=180^\circ-\angle B_1B_2B_3-\angle A_2B_2B_1=\angle A_3B_2B_3,$$
$$B_1B_2=B_2B_3$$

所以 $\triangle B_1A_2B_2$ 与 $\triangle B_2A_3B_3$ 全等（图 14.8）。因此 $A_2B_2=A_3B_3$。同理可证其余等式成立。显然，

$$S_B=S_A-S_{B_1A_2B_2}-S_{B_2A_3B_3}-\cdots-S_{B_nA_1B_1}$$
$$=S_A-nS_{B_1A_2B_2}.$$

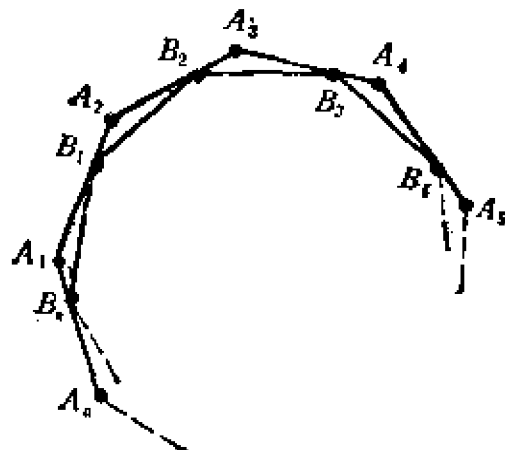


图 14.8

当 $\triangle B_1A_2B_2$ 的面积达到最大时取到最小值。设

$$A_1A_2=a,\ A_1B_1=x.$$

则
$$S_{B_1A_2B_2}=\frac{1}{2}B_1A_2\cdot A_2B_2\sin\angle B_1A_2B_2$$
$$=\frac{1}{2}(a-x)x\sin\angle B_1A_2B_2=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right)\sin\angle B_1A_2B_2.$$

当$x=\frac{a}{2}$，即 $A_1B_1=B_1A_2$ 时取到最大值。结论证毕。

14.11 我们证明，α 的最大值为$\frac{180°}{n}$。事实上，设平面上有 n 个点，使得 α 取到最大值。考虑过其中两点 A_1' 与 A_2' 的直线，使得所有其他给定点都在直线 $A_1'A_2'$ 的同侧。取点 A_3'，使得 $\angle A_1'A_2'A_3'$ 取到最大(图 14.9)。则所有其它的点都在这个角的内部，它们与 A_2' 的联线把 $\angle A_1'A_2'A_3'$ 分成 $n-2$ 个角，而且每一个角都不小于 α。所以有

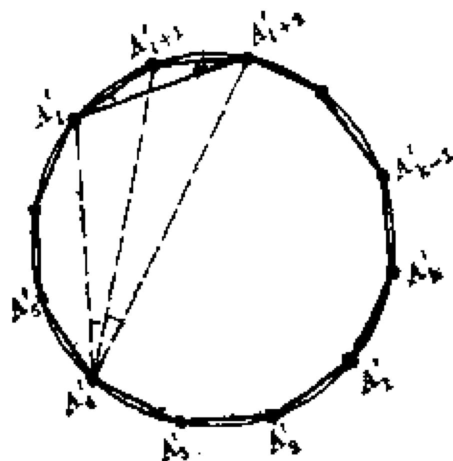


图 14.9

$$\angle A_1'A_2'A_3'\geqslant\alpha(n-2).$$

其次，取一点 A_4'，使得 $\angle A_2'A_3'A_4'$ 是最大的，则所有的点 $A_i\notin\{A_2',A_3',A_4'\}$ 都在这个角的内部，并且 $\angle A_2'A_3'A_4'\geqslant\alpha(n-2)$。若 $A_4'\neq A_1'$，$A_4'\neq A_2'$，则同样可以取一点 A_5'，如此继续。因为点的个数为 n，所以点列 A_1'，A_2'，$A_3'\cdots$一定从某项起回复到原来第一个点。设在取到点 $A_k'\cdots$后回复，即 $\angle A_{k-1}'A_k'A_i$ 对某个点 $A_i=A_i'\in\{A_1',\cdots,A_{k-2}'\}$，$\angle A_{k-1}'A_k'A_i$ 是最大的。于是，如果 $i\neq1$，则点 A_1' 在 $\angle A_{k-1}'A_k'A_i'$ 的内部，即在凸多边形 $A_i'A_{i+1}'\cdots A_{k-1}'A_k'$ 的内部，与它的取法矛盾。因此，$i=1$，并且凸 k 边形$A_1'A_2'\cdots A_k'$的内角和为$180°\cdot(k-2)\geqslant k\cdot\alpha(n-2)$。由此得到，

$$\alpha\leqslant\frac{180°(k-2)}{(n-2)k}=\frac{180°}{n-2}\left(1-\frac{2}{k}\right)\leqslant\frac{180°}{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{180°}{n}.$$

要使等式$\alpha=\frac{180°}{n}$成立，只有当 $k=n$，

$$\angle A_1'A_2'A_3'=\angle A_2'A_3'A_4'=\cdots=\angle A_k'A_1'A_2'=\alpha(n-2).$$

并且从 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 的任意一个角引出的所有对角线将该角分为等角 α 时才可能。这样的 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 一定是正 n 边形，因为对任意 $l=1,\cdots,n$，有

$$\angle A_l'A_{l+2}'A_{l+1}'=\angle A_{l+2}'A_l'A_{l+1}',\ 即\ A_l'A_{l+1}'=A_{l+1}'A_{l+2}'.$$

其中约定 $A_{n+1}'=A_1'$，$A_{n+2}'=A_2'$(图 14.9)。所以，这个 n 边形不仅角相等，而且边也相等。最后，正 n 边形的 n 个顶点的确满足 $\alpha=\frac{180°}{n}$，这是很明显的。因为如果作正 n 边形的外接圆，则从它的任意一个顶点引出的对角线中，任意两条相邻对角线的夹角所对的圆弧都是$\frac{360°}{n}$，即夹角为 $\frac{180°}{n}$。

14.12 设 $ABCD$ 是以O为中心且边长为 a 的正方形，它含有 5 个互不相交的半径为 1 的圆。则这些圆的圆心落在以O为中心且边长为 $a-2$ 的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，其中$A_1B_1\parallel AB$(图 14.10)。连接正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对边中点的连线把它自身分为四个小正方形。由狄利克雷原理(定理 1)，一定有一个小正方形含有两个圆心。于是，它们间的距离不超过小正方形的对角线长，另一方面又不小于 2。因此有

$$2\leqslant OA_1=\frac{A_1B_1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-2).$$

于是得到，$a\geqslant2\sqrt{2}+2$。

最后，如果 $a=2\sqrt{2}+2$，且圆心为点 O，A_1，B_1，C_1，D_1，则所要求的条件满足，于是所求的正方形的边长为 $2\sqrt{2}+2$。

14.13 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r 与外接圆半径R满足 $R=2r$，点 A_1，B_1，C_1 分别是边 BC，AC，AB 的中点。则 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似于$\triangle ABC$(相似比为$\frac{1}{2}$)，所以它的外接圆半径 ρ 是R的一半。如果这个

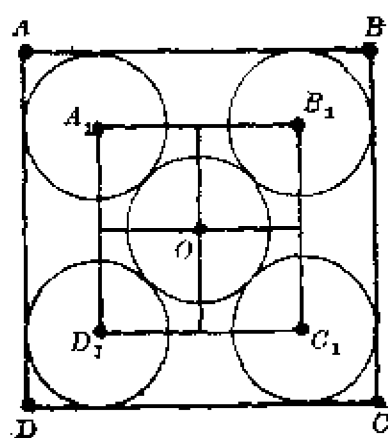


图 14.10

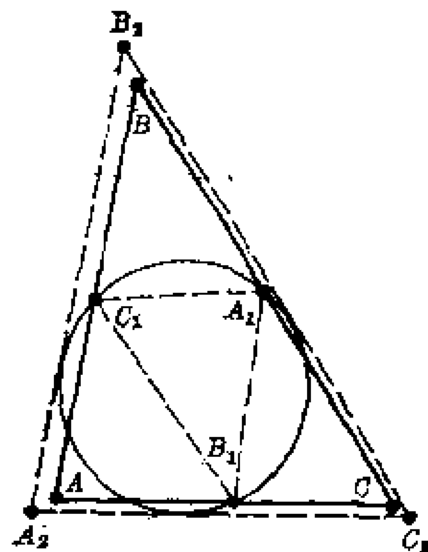


图 14.11

圆与 $\triangle ABC$ 的边不相切，则可引出平行于 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 且与该圆在 $\triangle ABC$ 外面的那段圆弧相切的切线(图 14.11). 设这三条切线围成 $\triangle A_2B_2C_2$, 则 $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 相似,具有半径为 ρ 的内切圆且它的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积. 因此有 $r<\rho=\frac{R}{2}$, 与题中的条件矛盾. 这表明, $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆与边 AB, BC, CA 相切. 根据切线的性质,有 $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, 因而 $AC=AB=BC$, 即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

14.14 我们证明，如果过点 O 引出线段 B_1C_1 与 B_2C_2，使它们的端点 B_1 与 B_2 在给定的 $\angle BAC$ 的边 AB 上，而端点 C_1 与 C_2 在边 AC 上，并且 $\angle AOB_2>\angle AOB_1\geqslant 90^\circ$ (图 14.12), 则有 $\frac{1}{B_1O}+\frac{1}{C_1O}>\frac{1}{B_2O}+\frac{1}{C_2O}$. 设 B_3 与 C_3 分别是过点 B_2 与 C_2 且平行于 AO 的直线与直线 B_1C_1 的交点,因为

$$\angle B_2B_3O=\angle AOB_3\geqslant 90^\circ,$$

所以 $OB_2>OB_3$, 并且

$$\frac{1}{B_1O}-\frac{1}{B_2O}=\frac{B_2O-B_1O}{B_1O\cdot B_2O}>\frac{B_3O-B_1O}{B_1O\cdot B_2O}$$
$$=\frac{B_1B_3}{B_1O\cdot B_2O}=\frac{B_2B_3}{AO\cdot B_2O}$$

(因为 $\triangle B_1B_3B_2\backsim\triangle B_1OA$). 同理可得

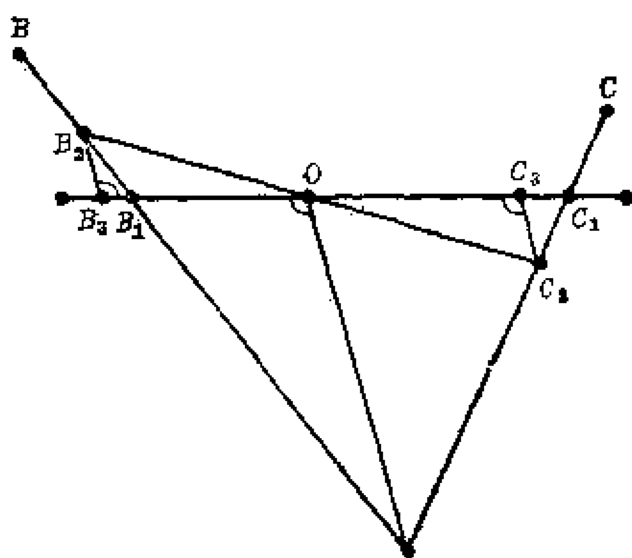


图 14.12

$$\frac{1}{C_1O}-\frac{1}{C_2O}>-\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}.$$

把上述两个不等式相加,并注意 $\triangle B_2B_3O\backsim\triangle C_2C_3O$, 便得到,

$$\left(\frac{1}{B_1O}+\frac{1}{C_1O}\right)-\left(\frac{1}{B_2O}+\frac{1}{C_2O}\right)>\frac{B_2B_3}{AO\cdot B_2O}-\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}$$
$$=\frac{1}{AO}\left(\frac{B_2B_3}{B_2O}-\frac{C_2C_3}{C_2O}\right)=0.$$

如果过点 O 且垂直于 AO 的直线和射线 AB 与 AC 分别交于点 B_1 与 C_1, 则 B_1C_1 即是所求的线段. 事实上,对过点 O 的另一线段 B_2C_2, 要么 $\angle AOB_2>90^\circ$, 要么 $\angle AOC_2>90^\circ$. 为确定起见，设点 B_2 与 C_2 分别在射线 AB 与 AC 上,且满足第一个不等式,则前面所说的不等式成立. 如果过点 O 且垂直于 AO 的直线与 $\angle BAC$ 的一边(设为边 AC)不相交,则所求的线段是不可能作出的. 设所求的线段是某个 B_2C_2, 其端点分别在边 AB 与 AC 上,则 $\angle AOB_2>90^\circ$. 这表明，如果在 AC_2 从 C_2 一端引出的延长线上取一点 C_1, 再通过 O 作一条线段 B_1C_1, 则有

$$90^\circ<\angle AOB_1<\angle AOB_2.$$

再根据上面证明的不等式可知 B_2C_2 不满足所需条件。

14.15 (1) 设 $\triangle ABC$ 是非钝角三角形. 则所求的点 T 即是 $\triangle ABC$ 的半径为 R 的外接圆的圆心 O. 事实上，过 O 且分别垂直于边 AB, BC, AC 的垂线 OH_1, OH_2, OH_3 将 $\triangle ABC$ 分为三个四边形.

$$OH_1AH_3,\ OH_1BH_2,\ OH_2CH_3$$

(图 14.13). 如果 $T \neq O$, 则点 T 在上述某个四边形中，不妨设在四边形 OH_1AH_3 中. 由于 $\angle OH_1A = \angle OH_3A = 90°$, 所以四边形 OH_1AH_3 内接于直径为 AO 的圆，于是 T 落在该圆内，所以有

$$m(T) \leqslant AT < AO = R = m(O),$$

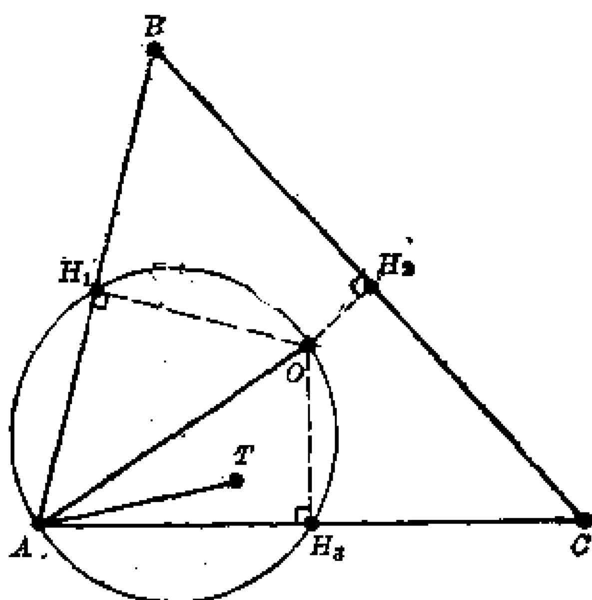


图 14.13

这表明，当 $T = O$ 时，$m(T)$ 取到最大值. 现在设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 是钝角，并且 $\angle C \leqslant \angle B$. 过边 AB 与 AC 的中点 D 与 E 且垂直于该边的垂线分别与 BC 边交于点 F 与 G. 记 $BF = b$, $CG = c$, 注意 $b \leqslant c$, 且仅当 $\angle C = \angle B$ 时 $b = c$. 事实上，由正弦定理，对 $\triangle BDF$, $\triangle CEG$ 与 $\triangle ABC$, 有

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{\cos\angle B} \cdot \frac{\cos\angle C}{CE} = \frac{AB}{AC}\frac{\cos\angle C}{\cos\angle B}$$

$$= \frac{\sin\angle C\cos\angle C}{\sin\angle B\cos\angle B} = \frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B} \leqslant 1.$$

其中用到 $0 < 2\angle C < 2\angle B < 180° - 2\angle C$. 其次，注意 $BG > c$, $FC > b$, 由 $\angle B + \angle C < 90° < \angle BAC$, 得到 $\angle B < \angle BAC - \angle C = \angle BAG$, 且 $BG > AG = GC = c$. 最后，$\triangle ABC$ 的高 AH 将它自身分为 $\triangle ABH$ 与 $\triangle ACH$. 如果点 $T \neq F$, 且在 $\triangle ABH$ 内，则 T 要么在直径为 BF 的圆内，要么在直径为 AF 的圆内 (图 14.14 与图 14.15 分别给出了 $\angle B < 45°$ 与 $\angle B > 45°$ 的情形). 从而有 $m(T) < m(F) = b$. 同理，如果点 $T \neq G$, 且在 $\triangle ACH$ 内，则 $m(T) < m(G) = c$. 于是，如果 $\triangle ABC$ 是等腰的，则点 F 与 G 都是所求的. 如果它不是等腰的，则 $m(F) < m(G)$, 且所求的点与 G 重合.

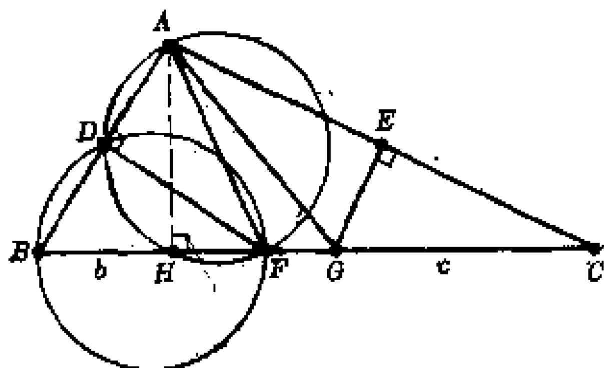


图 14.14

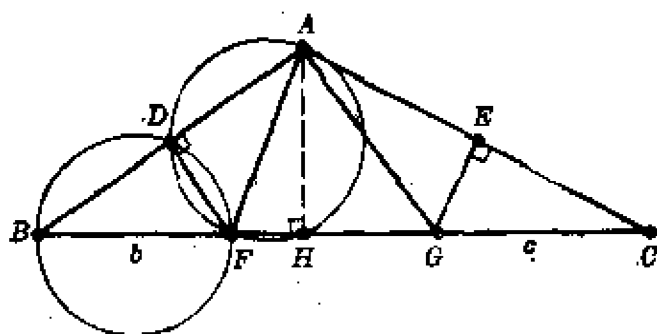


图 14.15

(2) 对 $\triangle ABC$ 中任意一点 T, 有

$$M(T) \geqslant TB, \qquad M(T) \geqslant TC.$$

因此
$$2M(T) \geqslant TB + TC \geqslant BC,$$

即 $\dfrac{BC}{2} \leqslant M(T)$. 最后，根据(1)中所证明的结论，在 $\angle A \geqslant 90°$ 的情况下 $M(T)$ 在线段 BC 上某点 G 处取到最大值. 因此对 $\triangle ABC$ 中任意一点 T, 有

$$m(T) \leqslant m(G) \leqslant \min\ \{GB,\ GC\} \leqslant \frac{BC}{2}.$$

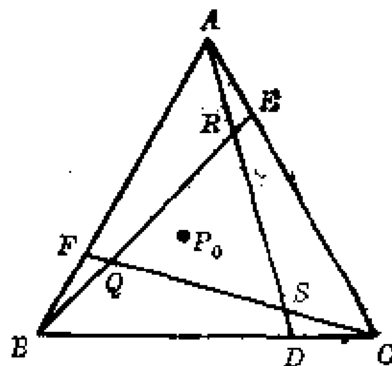


图 14.16

14.16 按题意画出图 14.16, 其中 $AB = BC = CA = 4$, $AE = CD = BF = 1$. 易见 $\triangle RSQ$ 是正三角形，并且也不难证明对 $\triangle ABC$ 中任何一点 P, 有

$$S=\frac{1}{2}(ax+by+cz),\ (S\text{是三角形面积})$$

从而
$$x+y+z=2\sqrt{3}.$$

当动点P在$\triangle RSQ$的内部及边界上变动时，我们证明(1)：若P在$\triangle RSQ$内，xyz不是最小值；(2) 若P在线段QS内，xyz也不是最小值。因此，由于在点R，S，Q处对应的xyz相等，所以在这三个点处时xyz是最小的。

(1) 点P_0在$\triangle RSQ$之内：过P_0作$MN\parallel BC$，其中M，N分别在RQ和RS上（图14.17）。记P_0到$\triangle ABC$三边距离为x_0，y_0，z_0。对MN上每一点P，对应的$x=x_0$，所以$y+z=2\sqrt{3}-x_0$是常数。注意$yz=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y-z}{2}\right)^2$，可见当$|y-z|$越大时$yz$的值越小。然而，$M$，$N$两点中总有一点的$|y-z|$比$|y_0-z_0|$大(图中$M$与$P_0$位于$BC$边的垂直平分线同侧，从而点$M$有此性质)。因此在$M$处有$yz<y_0z_0$，即$xyz<x_0y_0z_0$。

(2) 点P_0在线段QS内。设H为BC的中点，$BG=IC=1$，FC分别与AG，AH相交于L，K。BI也通过K并与AD相交于T(图14.18)。再分三种情况讨论。

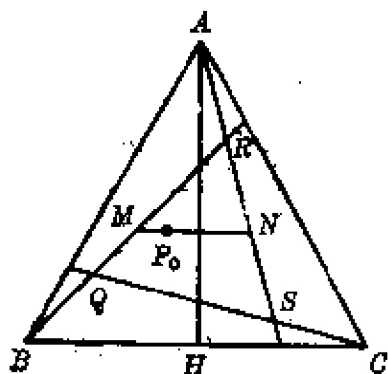


图 14.17

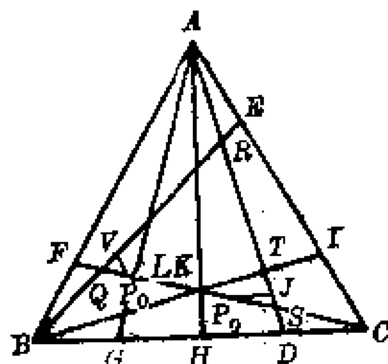


图 14.18

1) P_0在KS上($P_0\neq S$)：作$P_0J\parallel BC$，其中点J在AD上。此时P_0与J对应的x相等而J点对应的$z-y>z_0-y_0>0$(因为J比P_0离垂直平分线AH更远)，如(1)所证，有$yz<y_0z_0$，即$xyz<x_0y_0z_0$。

2) P_0在LK内。这时P_0关于AH的对称点必在线段KT内。P_0与其对称点对应的xyz值相等。但这时对称点已落在$\triangle RSQ$内部，所以由(1)的结论知$x_0y_0z_0$不是最小值。

3) P_0在QL上($P_0\neq Q$)：过P_0作$P_0V\parallel AC$，其中V在BE边上。因为BL垂直平分AC。V比P_0离BL更远，所以V对应的$x-z>x_0-z_0$，但$y=y_0$。因此$xz<x_0z_0$，即V对应的$xyz<x_0y_0z_0$。

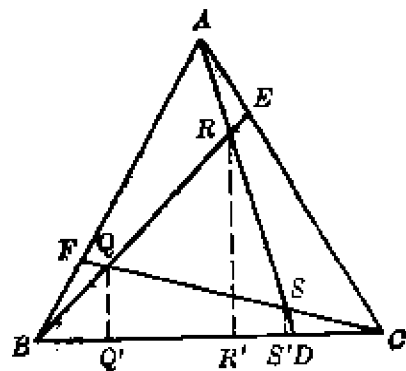


图 14.19

综上所述，可知只有在S，Q，R三个点上，xyz才取最小值。现在我们来计算xyz。注意$\triangle ARE\backsim\triangle ACD$所以$AR:RE=4:1$，即$AR:SD=4$。又$\triangle ASF\backsim\triangle ABD$，所以$AS:SF=4:3$。设$SD=w$，则$AR=4w$，$FQ=w$，所以

$$\frac{4}{3}=\frac{AS}{SF}=\frac{4w+RS}{QS+w}=\frac{4w+RS}{w+RS}.$$

由上式解得$RS=8w$，即$AR:RS:SD=4:8:1$。

作$RR'\perp BC$，$QQ'\perp BC$，$SS'\perp BC$，垂足各为R'，Q'，S'(图14.19)，则

$$\frac{RR'}{QQ'}=\frac{BR}{BQ}=\frac{AS}{AR}=3,$$

$$\frac{QQ'}{SS'}=\frac{QC}{SC}=\frac{AS}{AR}=3,$$

即$RR'=9SS'$，$QQ'=3SS'$，但$RR'+QQ'+SS'=2\sqrt{3}$。所以在R点，$x_1=RR'=\frac{9}{13}\cdot2\sqrt{3}$，$y_1=SS'=\frac{1}{13}\cdot2\sqrt{3}$，$z_1=\frac{3}{13}\cdot2\sqrt{3}$。因此$xyz$的最小值为$x_1y_1z_1=\frac{648}{2197}\sqrt{3}$。

第四章　立体几何

§15　四　面　体

15.1　设 AB 是四面体 $ABCD$ 中最长的棱，则有(图 15.1)

$$(AC+AD-AB)+(BC+BD-BA)$$
$$=(AC+CB-AB)+(AD+DB-AB)>0,$$

因此，要么 $AC+AD>AB$，要么 $BC+BD>BA$。这就保证，要么 AC，AD，AB 三条棱，要么 BC，BD，BA 三条棱能构成三角形(其他三角形不等式可由棱 AB 的取法得到)。

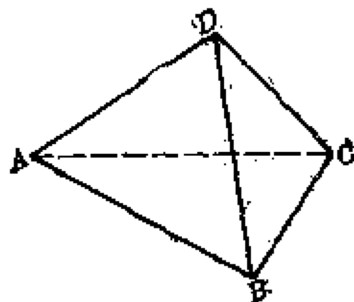


图　15.1

15.2　在题目所给的四面体 $ABCD$ 中，由余弦定理(见图 15.1)，有

$$2AB\cdot AC\cos\angle BAC=AB^2+AC^2-BC^2$$
$$=AB^2+AD^2-BD^2=2AB\cdot AD\cos\angle BAD,$$

由此得到

$$\operatorname{sign}\cos\angle BAC=\operatorname{sign}\cos\angle BAD,$$

即 $\angle BAC$ 与 $\angle BAD$ 要么都是锐角，要么都不是锐角。同理可证，对四面体的有公共顶点的任意平面角也有同样的结论。如果四面体 $ABCD$ 的所有平面角都是锐角，则它的每个面都是锐角三角形。如果其中有一个平面角不是锐角，不妨设它以 A 为顶点，则以 A 为顶点的所有三个平面角都不是锐角。这表明，四面体中所有其他平面角都是锐角(因为每个面至少有两个锐角)。在这种情况下，$\triangle BCD$ 一定是锐角三角形。

15.3　设通过长为 d 的线段 AB 的两个端点各作一条与 AB 垂直的直线，而且这两条直线也互相垂直，在这两条直线上分别截取以 A，B 为中点长为 a 的线段，以这两条线段的端点作为四面体的顶点，该四面体的每个面的面积等于

$$\frac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{a^2+4d^2},$$

由定理 87，知有体积

$$\frac{1}{6}a^2d.$$

因此，分别具有 $a_1=3$，$d_1=2$ 与 $a_2=1$，$d_2=\sqrt{56}$ 的两个四面体的界面面积相等，这只要注意，

$$a_1\sqrt{a_1^2+4d_1^2}=a_2\sqrt{a_2^2+4d_2^2}=15,$$

但体积不相等。因为

$$a_1^2d_1=18\neq\sqrt{56}=a_2^2d_2.$$

这表明，本题的答案是否定的。

15.4　设满足题中条件的四面体存在。我们证明，AB 是最长的棱，而 CD 是最短的棱。由题中条件可知，$\angle ACB$ 与 $\angle ADB$ 都是直角，并且 $\angle ACD$ 或 $\angle ADC$ 中有一个是直角，不妨设为 $\angle ACD$(图 15.2)。令 $\angle BAC=\varphi$，则 $\angle ABD=\varphi$，否则，由 $\angle BAD=\varphi$ 可得

$$AC = AD = AB\cos\varphi,$$

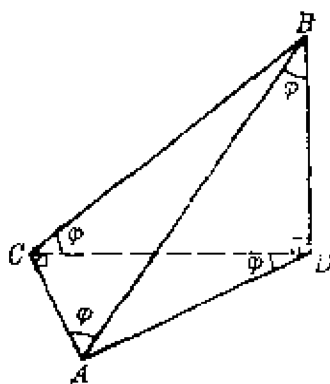


图 15.2

但 AD 是直角$\triangle ACD$的斜边，故不可能．同理，有$\angle CDA=\varphi$(否则由$\angle CAD=\varphi$可推出 $AB=AD$，不可能)．因此有

$$BD = AC = AB\cos\varphi,\ BC = AD = AB\sin\varphi,$$
$$CD = AD\cos\varphi = AB\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$AC = AD\sin\varphi = AB\sin^2\varphi,$$

由此可得

$$\cos\varphi = \sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi,$$

即

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

于是，最长的棱 AB 的长为 1，最短的棱 CD 的长为

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{\cos\varphi}\cdot\cos\varphi = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

为证明这种四面体是存在的，只须注意：如果取四面体 $ABCD$，使它的棱为

$$CA = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ CB = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ CD = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

且平面角为

$$\angle BCA = \angle DCA = 90^\circ,\ \angle BCD = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

则

$$AB = 1,\ AD = CB,\ BD = AC,\ \angle CAB = \angle BCD.$$

从而得到$\triangle ABD = \triangle ABC$，$\triangle CBD = \triangle DAC$，并且四面体的四个面都是相似的。

15.5 由于所作的任意一个平面都包含连接四面体对棱中点的线段之一，故所有这些平面都通过这些线段的交点，而这个交点是在四面体内部的(定理 92)。因此，所作的六个平面将整个空间分解成具有公共顶点的多面角．这表明，这些小四面体的任何一个必定有一个面是属于原四面体的一个面的．另一方面，原四面体的两个面决不可能成为同一个小四面体的两个面．这是因为它的两个面一定被通过它们的公共棱的平面互相分离．这样一来，小四面体的个数就等于原四面体表面被分成的块数．由于原四面体每个面被分成 6 块(被它的中线所分)，整个的块数就是$6\times4=24$．考虑到关于六个平面中任何一个的对称性，可以得知，所有的小四面体彼此相等，因而每一个的体积都等于 $\frac{1}{24}$．

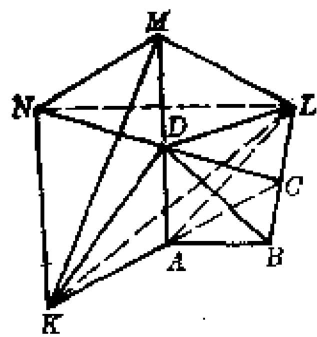


图 15.3

15.6 由题中的条件得，NM 与 AC 平行且相等，从而 NM 与 KA 平行且相等，即四边形 $KNMA$ 是平行四边形(图 15.3)．于是有 $S_{KNM}=S_{AKM}$，所以 $V_{LKNM}=V_{LAKM}$．

类似地，因为 $S_{AKM}=2S_{AKD}=2S_{CAD}$，所以有

$$V_{LAKM} = 2V_{LAKD} = 2V_{LCAD}.$$

因为 $S_{CLD}=S_{BCD}$，故有 $V_{LCAD}=V_{DABC}=V$．因此，得

$$V_{LKNM} = V_{LAKM} = 2V_{LCAD} = 2V.$$

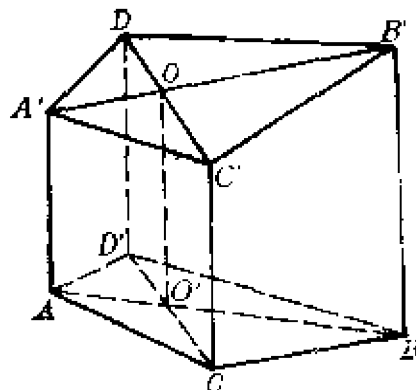


图 15.4

15.7 对$\triangle A'B'C'$所在平面上任意一点 D，$\triangle A'B'C'$总有一条边和连接点 D 及与之相对的顶点的直线相交．为确定起见，设 O 是边 $A'B'$ 与直线 $C'D$ 的交点，而过点 O 且平行于直线 DD' 的直线交平面 ABC 于点 O'（图 15.4)．则由直线 AA'，BB'，CC'，DD'，OO' 的平行性可得，线段 AB 与直线 CD' 交于点 O'．直线 OO' 与平面ABC之间的交角记作 φ．则有

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DD'\sin\varphi = \frac{DD'}{OO'}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot OO'\sin\varphi$$

$$=\frac{DD'}{OO'}\cdot V_{ABCO}.$$

同理有

$$V_{A'B'C'D'}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}.$$

其次，设 a 是直线 AA' 与 BB' 之间的距离，则

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot OO'\sin\angle OO'B=\frac{1}{2}a\cdot OO'.$$

同理，

$$S_{A'B'O'}=\frac{1}{2}a\cdot OO'.$$

用 b 表示平面 ABB' 与直线 CC' 之间的距离，则得到

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}S_{ABO}\cdot b=\frac{1}{3}S_{A'B'O'}\cdot b=V_{A'B'C'O'}.$$

由此，

$$V_{ABCD}=\frac{DD'}{OO'}V_{ABCO}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}=V_{A'B'C'D'},$$

这正是所要证明的。

15.8 设 V 是四面体 $ABCD$ 的体积，则有

$$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_1}{OA_1}=\frac{AO}{A_1O}+\frac{OA_1}{OA_1}=k+1.$$

同理有

$$\frac{V}{V_{OACD}}=\frac{V}{V_{OABD}}=\frac{V}{V_{OABC}}=k+1.$$

由此得到

$$k+1=\frac{4V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\frac{4V}{V}=4,$$

即 $k=3$。

15.9 我们证明，所有直线 K_nL_n 都过某个固定点 O，而点 O 在过顶点 A 且平行于直线 BC 的直线上，其中 $n\in N$。事实上，如果直线 K_nL_n 与直线 BC 交于点 P（位于射线 CB 上，图 15.5），则由于 $\triangle K_nBP$ 与 $\triangle K_nAO$ 相似，所以

$$\frac{PB}{OA}=\frac{BK_n}{AK_n}=n-1;$$

由 $\triangle L_nCP$ 与 $\triangle L_nAO$ 相似，有

$$\frac{PC}{OA}=\frac{CL_n}{AL_n}=n.$$

因而

$$OA=nOA-(n-1)OA=PC-PB=BC.$$

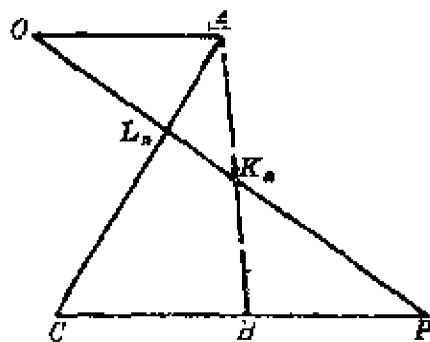


图 15.5

同理可证，对于 $n\in N$，所有直线 L_nM_n 都过某个固定点 Q，而点 Q 在过顶点 A 且平行于 CD 的直线上。因此，对 $n\in N$，所有平面 $K_nL_nM_n$ 都过直线 OQ。

15.10 为使连接点 B, C 与 $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ 内切圆中心的两条直线相交，其必要且充分条件是，它们在同一个平面上。而这等价于，$\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 的平分线与棱 AD 交于同一点（图 15.6）。根据三角形平分线的性质（定理 77），后一条件当且仅当

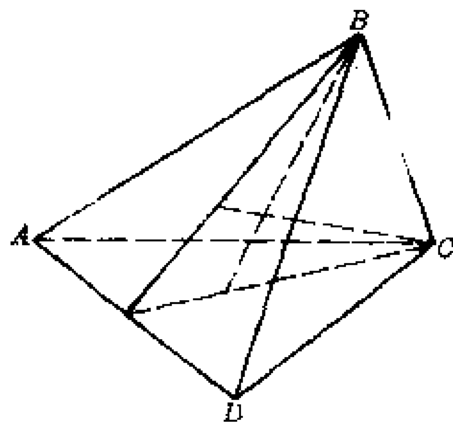


图 15.6

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD},$$

即 $AB\cdot CD=AC\cdot BD$ 时成立。于是，如果在题中所说的四条直线交于一点，则它的对棱长度的乘积相等。反之，如果所说的三个乘积相等，则四条直线中任意两条都相交，且任意三条不共面。因此所有直线交于同一点。

15.11 用 V, S 与 r 分别表示四面体的体积，表面积与内切球的半径。在四面体被平面截成的两个部分中有一个是底面在该平面上的棱锥。用 V_1, S_1 与 r_1 分别表示该棱锥的体积，侧面积与球心在该平面上且和侧面相切的球面的半径。棱锥的底面过四面体内切球的球心的必要且充分条件是 $r=r_1$。根据公式

$$V=\frac{1}{3}Sr,\quad V_1=\frac{1}{3}S_1r_1,$$

因而 $r=r_1$ 等价于

$$\frac{V}{V_1}=\frac{S}{S_1},$$

即

$$\frac{V-V_1}{V_1}=\frac{S-S_1}{S_1}.$$

这就证明了题中的结论。

15.12 设四面体 $ABCD$ 的诸棱满足 $AC\perp BD$, $AD\perp BC$。现在过四面体的每条棱作一个平行于对棱的平面，得到三对平行平面，它们构成一个平行六面体 $AB'CD'A'BC'D$ (图 15.7)。平行四边形 $AB'CD'$ 与 $A'BC'D$ 是菱形，因为它们的对角线分别平行于互相垂直的直线 AC 与 BD。同理，平行四边形 $AA'DD'$ 与 $BC'CB'$ 也是菱形。因此，平行六面体中所有棱长都相等。最后，从平行六面体的对称中心 O 到四面体的任意一条棱的中点之距离等于平行六面体的棱长的一半 (例如点 O 到棱 AB 的中点之距离等于平行四边形 $ABC'D'$ 的对称中心到边 AB 的距离，即平行六面体中棱 AD' 的长的一半)。这就证明了题中的结论。

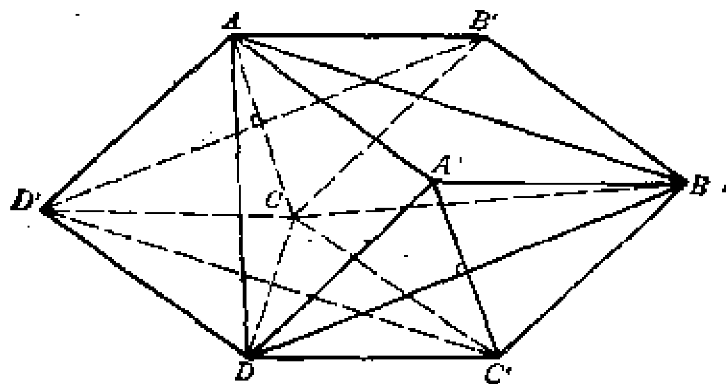


图 15.7

15.13 由于三角形任意两边之差小于第三边，所以对题中所给的数据，含有一边长为 2 的三角形的其他两边长只能有下面四种情形:

(1) 3, 3; (2) 5, 5; (3) 4, 5; (4) 3, 4.

从而，对题中的四面体，以 2 为公共边的两个侧面三角形的其他两边只能有下列三种情形:

1) (1)与(2); 2) (1)与(3); 3) (2)与(4).

下面分情形讨论。

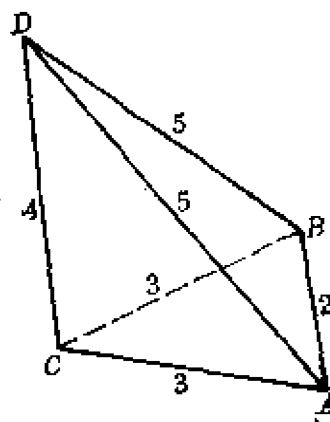


图 15.8

1) 如图 15.8 所示，$AC=BC=3$, $AD=BD=5$。因为 $3^2+4^2=5^2$，所以 $CD\perp AC$, $CD\perp BC$，从而 CD 垂直于平面 ABC。由对称性，这样的四面体只有一个，其体积为

$$V_1=\frac{1}{3}CD\cdot S_{ABC}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3^2-1}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

2) 如图 15.9 所示，这样的四面体有两个(互为镜像)。其体积为

$$V_2=\frac{1}{3}h_2S_{ABC}<\frac{1}{3}DB\cdot S_{ABC}=\frac{4}{3}S_{ABC}=V_1.$$

其中注意，$\triangle ABD$ 不是直角三角形，所以点 D 到平面 ABC 的距离 $h_2<DB$。



图 15.9

3) 如图 15.10 所示，这样的四面体也有两个（互为镜像），其体积

$$V_3=\frac{1}{3}h_3S_{ACD}<\frac{1}{3}ABS_{ACD}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{11},$$

其中 h_3 为点 B 到平面 ACD 的距离，显然 $h_3<AB$。

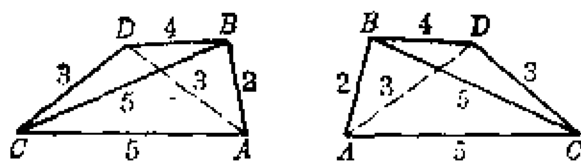


图 15.10

比较 V_1, V_2, V_3 可知，最大的体积为

$$V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

15.14 设正四面体 T_1 内接于正四面体 T_2，则四面体 T_1 的外接球面 S 的半径 R_1 不小于内切于四面体 T_2 的球面的半径 r_2。事实上，作平行于 T_2 各面且与球面 S 相切的平面，可以得到一个四面体 T_3，因为它与 T_2 相似，所以也是正四面体，它外切于球面 S 且包含四面体 T_2。因此，T_3 的内切球半径 $r_3=R_1$ 不小于 r_2。因为内切于正四面体 T_1 的球面半径 r_1 是 T_1 的外接球面的半径 R_1 的三分之一，所以 $3r_1=R_1\geqslant r_2$。由此便得到要证明的不等式。

15.15 为确定起见，设点M在$\triangle ABC$ 的边 AB 上，且$\angle MDB=\varphi$（图 15.11），则

$$S=c+a\cos\varphi+b\sin\varphi.$$

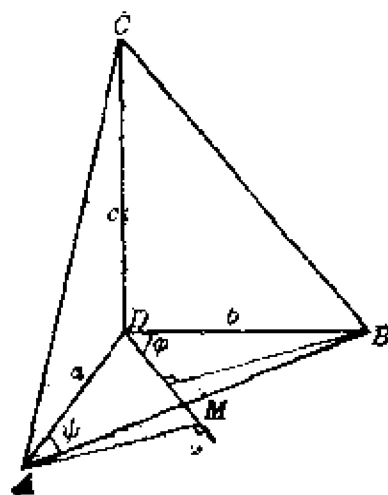


图 15.11

记

$$d=a\cos\varphi+b\sin\varphi,$$

$$\psi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

则

$$d=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi-\psi)\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

其中当且仅当 $\varphi=\psi$，即

$$\cos\varphi=\frac{AD}{AB}=\cos\angle DAB,$$

也即 $DM\perp AB$ 时等式成立。其次，由平均值定理（定理 6），得到

$$S=c+d\leqslant\sqrt{2(c^2+d^2)},$$

其中等式当且仅当 $c=d$ 时成立。这就证明了所要的不等式

$$S\leqslant\sqrt{2(c^2+a^2+b^2)},$$

其中当且仅当 AD, BD, CD 是某个直角三角形的三条边，而 DM 是$\triangle ABC$ 的最小边上的高时等式成立。

15.16 首先证明，如果 AB 与 CD 分别是长为 a, b 的异面线段，它们之间的距离为 d，夹角为 α，则以 A, B, C, D 为顶点的四面体体积

$$V \leqslant \frac{1}{6} abd \sin\alpha.$$

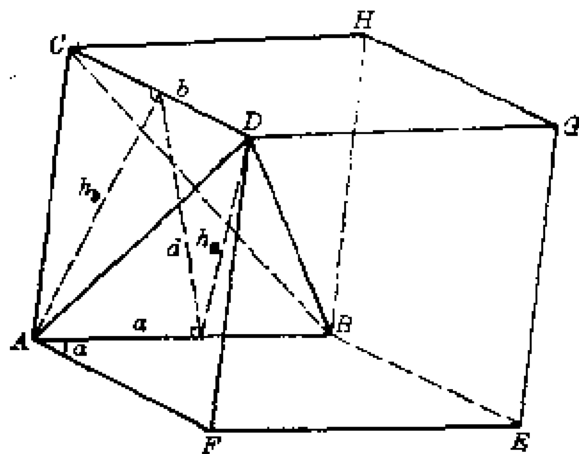


图 15.12

事实上，过 AB 与 CD 分别作平行四边形 $ABEF$ 与 $CDGH$，使得 $AF \parallel CD$, $CH \parallel AB$(图 15.12)。连 AC, BH, EG, FD, 构成一个平行六面体。则四面体 $ABCD$ 可视为以 $\triangle ABC$ 为底面的三棱锥，其体积 V 是平行六面体体积的六分之一。设平行六面体上下两面之间的高为 h，则它的体积为 $abh\sin\alpha$。容易看出，$h \leqslant d$，所以有

$$V = \frac{1}{6} abh \sin\alpha \leqslant \frac{1}{6} abd \sin\alpha.$$

其次，从上面的图形还可看出

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} ah_a > \frac{1}{2} ad,$$

其中 h_a 是 $\triangle ABD$ 中 AB 边上的高。同理可得

$$S_{ABC} > \frac{1}{2} ad, \quad S_{ACD} > \frac{1}{2} bd, \quad S_{BCD} > \frac{1}{2} bd,$$

所以四面体 $ABCD$ 的表面积

$$S = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD} > (a+b)d.$$

最后，利用公式 $V = \frac{1}{3} rS$，便得到不等式

$$r = \frac{3V}{S} \leqslant \frac{abd \sin\alpha}{2S} \leqslant \frac{abd}{2S} < \frac{ab}{2(a+b)}.$$

15.17 设点 O 在四面体 $ABCD$ 的内部。用 P 表示直线 DO 与平面 ABC 的交点，Q 表示直线 BP 与边 AC 的交点(图 15.13)。由定理 84 得到

$$\begin{aligned}
&\angle AOB + \angle AOC \\
&= \angle AOB + \angle AOQ + \angle QOC \\
&> \angle BOQ + \angle QOC \\
&= \angle BOP + \angle POQ + \angle QOC > \angle BOP + \angle POC \\
&= 180^\circ - \angle BOD + 180^\circ - \angle COD,
\end{aligned}$$

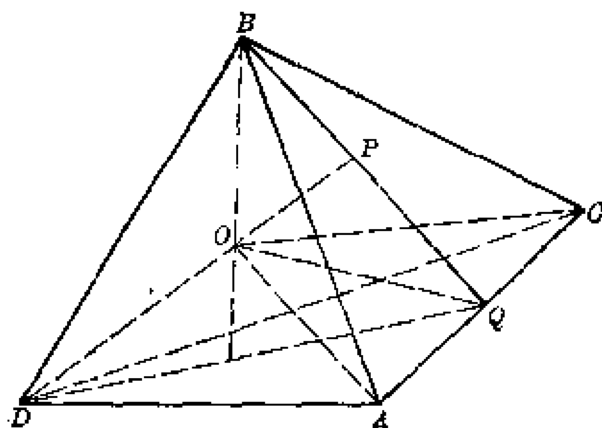


图 15.13

从而有

$$\angle AOB + \angle AOC + \angle BOD + \angle COD > 360^\circ.$$

同理可得

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle AOD + \angle COD > 360^\circ,$$
$$\angle AOC + \angle BOC + \angle AOD + \angle BOD > 360^\circ.$$

上述三个不等式相加后除以 2，即得所要证明的不等式。

15.18 假设点 M 关于四面体 $ABCD$ 的各棱的张角的余弦都大于 $-\frac{1}{3}$。如果让顶点 A, B, C, D 分别沿射线 MA, MB, MC, MD 移动，易知射线间的夹角并不改变。因此，不妨设四面体各顶点到 M 的距离都相等且等于 1，并可设 ABC 是距点 M 最近的界面，且 AD 是棱 AD、BD、CD 中最长的。过点 M 引直线垂直于面 ABC，并在该直线上取点 D_1，使得 $MD_1 = 1$ 且射线 MD_1 与面 ABC 不相交(图 15.14)。下面证明 $AD_1 \leqslant AD$。如果 $AD_1 > AD$，则 $AD_1 > BD$, $AD_1 > CD$。因为 $MA = MB = MC$，所以这三条线段

在平面 ABC 上的投影相等。于是进而有 $AD_1=BD_1=CD_1$。因此，$BD_1>BD$，$CD_1>CD$。过线段 DD_1 的中点作垂直 DD_1 的平面 π。因为 $MD=MD_1$，所以点M在平面 π 上。但另一方面，因为 $AD_1>AD$，所以点 A 与 D 在平面 π 的同侧。又因 $BD_1>BD$，$CD_1>CD$，所以点 A，B，C，D 都在平面 π 的同侧，从而点M不在平面 π 上，矛盾。这表明，$AD_1\leqslant AD$。于是，

$$\cos\angle AMD_1\geqslant\cos\angle AMD>-\frac{1}{3}.$$

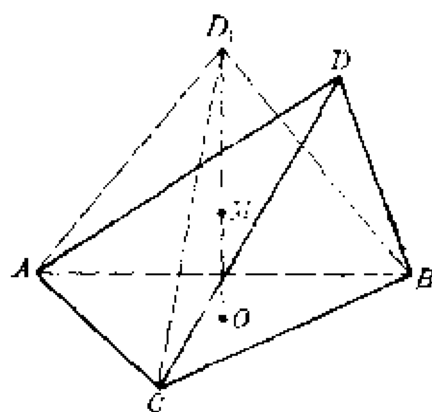


图 15.14

因为 $AD_1=BD_1=CD_1$，所以点M关于四面体 $ABCD_1$ 的各棱的张角的余弦都大于 $-\frac{1}{3}$。因为面 ABC 是四面体 $ABCD$ 中距点M最近的界面，所以过点M引向平面 ABC 的垂直射线，除了面 ABC 外，不穿过其他的界面。例如，如果这条射线穿过面 BCD 后到达面 ABC，则点M到界面 BCD 的距离比点M到界面 ABC 的距离小，与前面的假设矛盾。因此，点M在平面 ABC 上的投影O是$\triangle ABC$ 的外心，且它位于这个三角形内，这表明，$\triangle ABC$ 是锐角三角形。记$\angle AMD_1=\alpha$，则有

$$-\frac{1}{3}<\cos\alpha<0,$$

因此

$$\sin\alpha>\sqrt{\frac{8}{9}}.$$

因为 AO 是$\triangle ABC$ 的外接圆半径，所以

$$AO=MA\cdot\sin\angle AMO=1\cdot\sin\angle AMD_1=\sin\alpha.$$

设 AB 是$\triangle ABC$ 中最长的边，则 $60^\circ<\angle ACB<90^\circ$，再由正弦定理得

$$AB=2\sin\alpha\cdot\sin\angle ACB>2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

另一方面，由于

$$\cos\angle AMB>-\frac{1}{3},$$

所以由余弦定理得

$$AB^2=2-2\cos\angle AMB<2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3},$$

这与前面的 $AB>\sqrt{\frac{8}{3}}$ 矛盾。证毕。

15.19 我们证明，如果点M到棱长为 2 的正四面体各顶点的距离都是整数，则一定有一个距离是 0 (其逆命题无疑是正确的)。注意，如果点M在四面体的棱所在直线上，不妨设在以H为中点的棱 AB 的直线上。记 $MH=x$，$MC=y$，则有 $y>x\geqslant0$ 且 $x^2+(\sqrt{3})^2=y^2$，从而 $(y-x)(y+x)=3$。由此得 $y-x=1$，$y+x=3$，因而 $x=1$。这表明，点M与顶点 A 或 B 重合。如果点M不在上面所说的那些直线上，则M到四面体各顶点的最短距离 $x>0$，而其他的距离与 x 之差小于 2，也就是说，它们要么为 x 要么为 $x+1$。现在考虑四种情形。

(1) 所有四个距离都为 x。此时M是四面体的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的外接球面的球心，但因 $x\in N$，故不可能。

(2) 三个距离为 x，一个为 $x+1$。为确定起见，设 $MA=MB=MC=x$，$MD=x+1$，并设点O是$\triangle ABC$ 的中心。此时M在射线 DO 上且

$$x\geqslant AO=\frac{2}{\sqrt{3}}>1,$$

即

$$DM=x+1>2>2\sqrt{\frac{2}{3}}=DO=DM-MO=x+1-\sqrt{x^2-\frac{4}{3}},$$

由此得到

$$x+1=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x-\frac{19}{12}}>\frac{3}{2}+x-\frac{1}{2}=x+1,$$

不可能。

(3) 三个距离为 $x+1$, 一个为 x。与情形(2)类似, 可设 $MD=x\geqslant 1$, $MA=MB=MC=x+1\geqslant 2$. 此时点M在直线 OD 上且点O不能在M与D之间, 否则有

$$x=2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}>1+x.$$

因此, 点M在射线 OD 上, 且

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}=OD=OM-MD=\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}-x$$

$$<(x+1)-x=1<2\sqrt{\frac{2}{3}},$$

也不可能。

(4) 两个距离为 x, 另两个为 $x+1$。为确定起见, 设 $MA=MB=x\geqslant 1$, $MC=MD=x+1\geqslant 2$. 注意, $x\neq 1$(前面已证明, 点M不能在直线 AB 上)。所以 $x\geqslant 2$. 设点E与F分别是线段 AB 与 CD 的中点。此时点M在射线 EF 上, 且

$$MF=\sqrt{(x+1)^2-1}\geqslant\sqrt{3}>\sqrt{2}=EF,$$

从而有

$$\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}=MF-ME=EF=\sqrt{2}.$$

但因当 $1<x\in N$ 时,

$$\sqrt{(x+1)^2-1}-\sqrt{x^2-1}<\sqrt{2},$$

所以也不可能。

于是, 结论完全得证。

15.20 用V与S表示四面体的体积与表面积, 用 S_i 表示第 i 个面的面积, 这个面上对应的四面体的高为 h_i, 旁切球面半径为 r_i. 由定理 88 的两个公式, 有

$$3V=h_1S_1=r_1(S_2+S_3+S_4-S_1)=r_1(S-2S_1).$$

同理, 对其他的 i, 有

$$3V=h_iS_i=r_i(S-2S_i).$$

因此,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{3V}(S-2S_1+S-2S_2+S-2S_3+S-2S_4)$$
$$=\frac{2S}{3V}=\frac{2}{3V}(S_1+S_2+S_3+S_4)=2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right),$$

即等式成立。

15.21 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中, 用 h_i 表示由顶点 A_i 引出的高, S_i 为顶点 A_i 所对的那个面的面积, d_1, d_2, d_3 和 ψ_1, ψ_2, ψ_3 分别是棱 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 与它们的对棱之间的距离和夹角, Q_1, Q_2, Q_3 表示以 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 与它们的对棱为两条对角线且交角为 ψ_1, ψ_2, ψ_3 的三个平行四边形的面积, φ_1, φ_2, φ_3 表示关于棱 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 的二面角, 则由定理 87, 四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}h_iS_i=\frac{1}{6}A_2A_3\cdot A_1A_4\cdot d_1\sin\psi_1=\frac{1}{3}d_kQ_k,$$

其中 $i=1, 2, 3, 4$; $k=1, 2, 3$. 其次, 由定理 90, 有

$$S_4=S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3.$$

最后, 还有

$$S_4^2+S_k^2-2S_4S_k\cos\varphi_k=Q_k^2.$$

上式可证如下：作一个与棱 A_2A_3 垂直的平面，并且设 a, b, c 分别是棱 A_1A_2, A_2A_4, A_1A_4 在该平面上投影的长。根据余弦定理，有

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi_1=c^2.$$

上式两边同乘以 $\left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2$，就得到所要的等式中当 $k=1$ 时的情形。当 $k=2, 3$ 时，证明是相仿的。于是得到

$$\begin{aligned}Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2&=3S_4^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_4(S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3)\\&=S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}&=\frac{Q_1^2}{9V^2}+\frac{Q_2^2}{9V^2}+\frac{Q_3^2}{9V^2}\\&=\frac{S_1^2}{9V^2}+\frac{S_2^2}{9V^2}+\frac{S_3^2}{9V^2}+\frac{S_4^2}{9V^2}=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2},\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

15.22 用 K, L, M, N 分别表示棱 AB, BC, CD, DA 与球面的切点（图 15.15）。从球心 O 作一条直线 l 垂直于正方形 $KLMN$ 所在的平面。与球面相切于点 K, L, M, N 的四个平面和正方形 $KLMN$ 所在的平面构成相等的二面角。这表明，它们要么与直线 l 平行，要么交于直线 l 上某个点 S。在后一情形下，它们构成了以 S 为顶点的正四棱锥，它以正方形 $KLMN$ 为底面，以 SK, SL, SM, SN 为侧棱。因为棱 AB, BC, CD, DA 在这四棱锥相应的侧面上，所以点 A, B, C, D 在它的侧棱上。由于 $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle DSA$ 的角平分线 SK, SL, SM, SN 相等，所以 $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$ 与 $\triangle DSA$ 全等，从而

$$SA=SC,\ SB=SD,\ AK=CL=CM=AN.$$

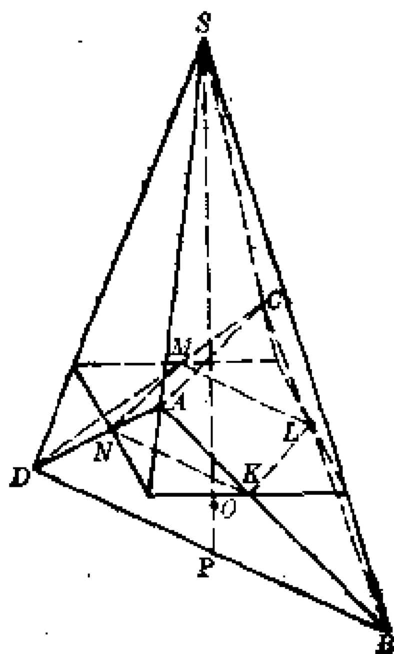


图 15.15

如果棱 AC 也与球面相切，则

$$AC=AK+CL=2AK.$$

由于等腰 $\triangle ASC$ 与 $\triangle BSD$ 相似，所以由三角形角平分线的性质（定理 77），有

$$\frac{BD}{AC}=\frac{SB}{SA}=\frac{KB}{AK}.$$

从而

$$BD=\frac{AC}{AK}\cdot KB=2KB.$$

因此，对直线 l 上棱 BD 的中点 P，有 $OP=OK$（因为具有公共斜边 BO 的 $\triangle BOP$ 与 $\triangle BOK$ 的直角边 BP 与 BK 相等），即棱 BD 与球面相切于点 P。最后，如果所说的四个切平面都平行于直线 l，则它们与正方形 $KLMN$ 所在的平面的截线构成一个正方形，且以 K, L, M, N 为其各边的中点。在这种情形下，$AK=KB=BL=LC=CM=MD=DN=NA$。它的中心 O 与正方形 $KLMN$ 的中心重合，且到棱 AC 与 BC 的距离相等。这表明，球面只能同时与这两条棱相切。证毕。

15.23 设四面体 $ABCD$ 外接一个球心为 O，半径为 R 的球面。记

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\ \boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC},\ \boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD},$$

对空间中任意一点 X，记 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$。则

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{d}^2=R^2,$$

其中向量 $\boldsymbol{x}$ 与自身的数量积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ 记作 $\boldsymbol{x}^2$。因为 $\alpha\perp OA$，所以在平面 α 上点 X 满足 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$

$=R^2$. 同理，平面 β, γ, δ 上的点X分别满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$. 注意，对任意不同时为零的数 λ, μ, 方程

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}=(\lambda+\mu)R^2$$

给出了一个过平面 α 与 β 的交线 l 的平面(因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 且对任意 $X\in l$, 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=R^2$). 另外，对空间中任意一点$X$也存在一对不同时为零的数 λ, μ, 使得

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}-R^2)=0,$$

即适当选取 λ 与 μ, 可使相应的平面过点 X. 因此直线 CD 与直线 l 共面的必要且充分条件是关于未知数 λ 与 μ 的方程组

$$\begin{cases}\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)=0,\\ \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}-R^2)+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}-R^2)=0\end{cases}$$

有非零解，即有

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2)=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}-R^2)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-R^2).$$

同理可证，平面 γ 与 δ 的交线和直线 AB 共面的必要且充分条件为

$$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-R^2)(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}-R^2)=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-R^2)(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}-R^2).$$

因为上面得到的两个条件是等价的，所以题中结论得证。

15.24 先考虑以点O为球心且半径为 r 的球面P与球面 S_1, S_2, S_3, S_4 都外切的情形. 设球面S_1, S_2, S_3, S_4 的半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4, 球面 S_1, S_2, S_3 两两外切的切点 B, C, D 必分别在 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 上，故有 $A_1B=A_1D=r_1$, $A_2B=A_2C=r_2$, $A_3C=A_3D=r_3$. 而面 $A_1A_2A_3$ 截以点O为球心且半径为R的球面Q所得的截圆 $B'C'D'$ 是$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，它在 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 上的切点分别为 B', C', D'(图 15.16)，从而 $A_1B'=A_1D'$, $A_2B'=A_2C'$, $A_3C'=A_3D'$. 因为

$$A_1B=\frac{A_1A_2+A_1A_3-A_2A_3}{2},$$

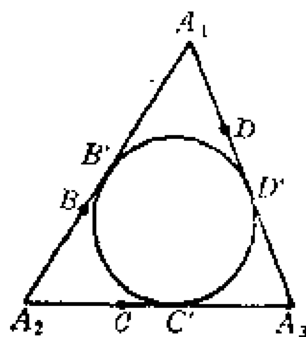


图 15.16

同样,

$$A_1B'=\frac{A_1A_2+A_1A_3-A_2A_3}{2},$$

且B和 B' 都是 A_1A_2 的内点，所以B和 B' 重合. 同理，C 和D分别与 C' 和 D' 重合. 这表明，球面 S_1, S_2, S_3, S_4 两两外切的切点与球面Q和各棱的切点分别重合. 过点 A_1, A_2 和O作截面 (图 15.17). OB 是球面 S_1 和 S_2 的公切线，且 $OB=R$, 则由切割线定理 (定理73), 有 $R^2=r(r+r_1)=r(r+r_2)$. 由此得到，$r_1=r_2$. 同理可得，$r_1=r_2=r_3=r_4$. 从而

$$A_1A_2=A_1A_3=A_1A_4=A_2A_3=A_2A_4=A_3A_4,$$

即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体. 至于球面P与球面 S_1, S_2, S_3, S_4 都内切的情形，证明是相仿的.

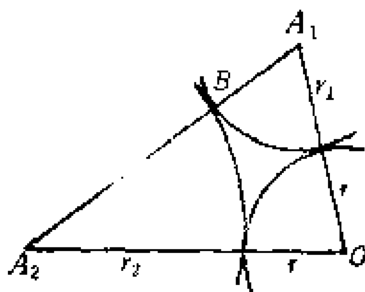


图 15.17

15.25 设$ABCD$是四面体，作它的外接球面S. 过顶点A作S的直径 AP, 这里点P是连接顶点A与外接球面S的球心O的线段的延长线与外接球面S的交点. 由于AP是S的直径，且点 B, C, D 都在S上，因此

$$\angle ABP=\angle ACP=\angle ADP=\frac{\pi}{2}.$$

所以点P在过点B且垂直于棱 AB 的平面上，同样也在过点C且垂直于棱 AC 的平面上，以及在过点D且垂直于棱 AD 的平面上. 从而，过点 B, C, D 分别作棱 AB, AC, AD 的垂直平面，这三个平面的交点与点A的连线即是四面体 $ABCD$ 的外接球面的直径(当点P与点 B, C, D 之一重合时，这一结论仍成立). 于是，三个四面体 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ 的外接球面 S_1, S_2, S_3 的直径分别为 A_1E, A_2E, A_3E. 而点 A_1, A_2, A_3 在同一直线上，所以，当 A_1, A_2, A_3 三点重合时，三个外接球面 S_1, S_2, S_3 重合，

即三个外接球面的交集是一个球面；当 A_1, A_2, A_3 不全重合，而且点E也在直线 l 上时，三个外接球面的交集即是点E构成的集合；当 A_1, A_2, A_3 不全重合，且点E不在直线 l 上时，设点E到直线 l 的垂足为Q，则三个外接球面的交集是以 EQ 为直径的圆，而且此圆在过点Q且垂直于直线 l 的平面上。

§ 16　多面体、球面和其他集合

16.1　用x表示立方体的棱长，则题中所说的体积差为

$$f(x)=\begin{cases}abc-x^3, & 当\ 0<x\leqslant a\ 时,\\ abc+(x-a)x^2-ax^2, & 当\ a<x\leqslant b\ 时,\\ x^3+ab(c-x)-abx, & 当\ b<x\leqslant c\ 时,\\ x^3-abc, & 当\ c<x\ 时.\end{cases}$$

注意，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$是连续的，且它的导数为

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2, & 当\ 0<x<a\ 时,\\ 3x^2-4ax, & 当\ a<x<b\ 时,\\ 3x^2-2ab, & 当\ b<x<c\ 时,\\ 3x^2, & 当\ x>c\ 时.\end{cases}$$

因此，当 $0<x<a$ 时，函数 $f(x)$是递减的；当 $x>b$ 时，则是递增的。而在区间(a, b)上，因为

$$3x^2-4ax<3b^2-4ab\leqslant 0,$$

所以如果$b<\frac{4a}{3}$，则 $f(x)$是递减的；如果 $b>\frac{4a}{3}$，则 $f(x)$在 $x=\frac{4a}{3}$ 处有极小值。于是，函数 $f(x)$的最小值要么在 $x=b$ 处取到$\left(当\ b\leqslant\frac{4a}{3}\ 时\right)$，要么在 $x=\frac{4a}{3}$ 处取到$\left(当\ b>\frac{4a}{3}\ 时\right)$，从而所求的$x$为

$$\min\left\{b,\ \frac{4a}{3}\right\}.$$

16.2　长方体在水平面上的投影是六边形，设为 $ABCDEF$(图16.1)。因为长方体每个侧面在水平面上的投影都是平行四边形，所以$\triangle ACE$ 的面积是整个长方体投影面积的一半。设 $\triangle ACE$ 是长方体内 $\triangle A'C'E'$ 的投影，则 $\triangle A'C'E'$ 在空间中摆放的位置完全确定了长方体在空间中的位置，其投影$\triangle ACE$ 的面积完全确定了长方体在水平面的投影面积。由定理 90，有

$$S_{ACE}=S_{A'C'E'}\cos\varphi,$$

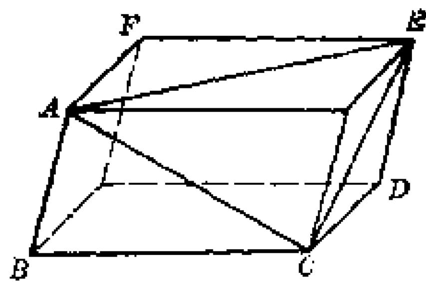


图 16.1

其中 φ 是$\triangle A'C'E'$所在平面与水平面的夹角。显然，要使得长方体的投影面积最大，应当 S_{ACE} 最大，因而必须有 $\cos\varphi=1$，也即 $\varphi=0°$。这表明，当长方体中的 $\triangle A'C'E'$ 所在平面与水平面平行时，长方体的投影面积达到最大。

16.3　过给定的立方体 $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ 的中心O作垂直于对角线 A_1A_3' 的平面 (图 16.2)，它分别过棱 $A_1'A_4'$, A_2A_2', A_3A_4 的中点 B_1, B_2, B_3，因为点 B_1, B_2, B_3 到顶点 A_1 与 A_3' 的距离相等，都是 $\frac{\sqrt{5}}{2}a$。由于 $B_1O=B_2O=B_3O$，且

$$B_1B_2=B_2B_3=B_3B_1=\sqrt{\frac{3}{2}}a>\frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

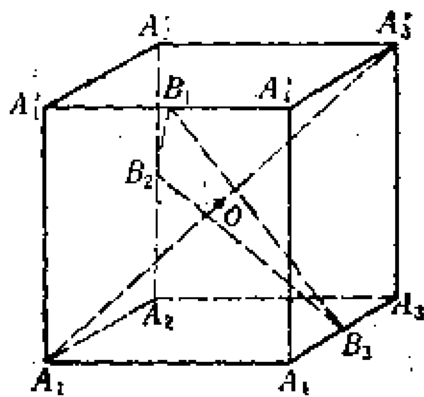


图 16.2

所以，正棱锥 $A_1B_1B_2B_3$ 及 $A_3'B_1B_2B_3$(它们没有公共内点)各含有一个正四面体，其高为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=A_1O=A_3'O,$$

而其底面 $\triangle B_1'B_2B_3'$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 关于中心 O 是位似的。最后，所求的正四面体分别在四面体 $A_1B_1'B_2'B_3'$ 与 $A_3'B_1'B_2'B_3'$ 的内部，它们关于其中心是位似的，其位似系数为

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}<1,$$

而高为 $\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$，从而棱长即为 a。

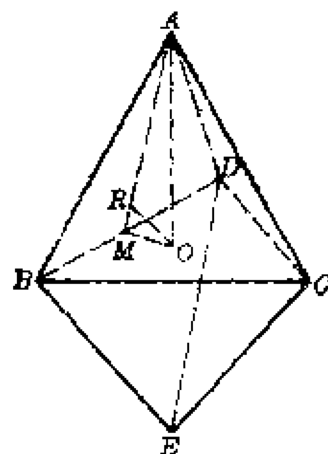


图 16.3

16.4 如图 16.3 中六面体 $ABCDE$ 的内切球的半径 r 是等边 $\triangle BCD$ 的中心 O 到一个面 ABD 的垂线长 OR。而 OR 又是直角 $\triangle AOM$ 的斜边 AM 上的高。所以，

$$r=OR=\frac{AO\times OM}{AM}.$$

但

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad OM=\frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

因此

$$AO=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

所以，

$$r=\frac{\sqrt{6}}{9}a.$$

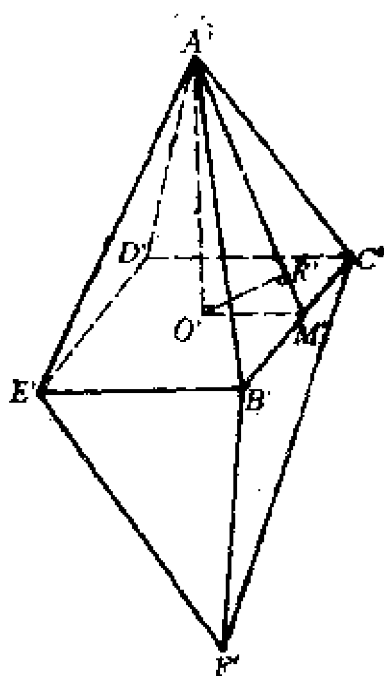


图 16.4

另一方面，在图 16.4 中正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ 的内切球的半径 r' 是正方形 $B'C'D'E'$ 的中心 O' 到一个面 $A'B'C'$ 的垂线长 $O'R'$。而 $O'R'$ 是直角 $\triangle A'O'M'$ 的斜边 $A'M'$ 上的高，所以，

$$r'=O'R'=\frac{A'O'\times O'M'}{A'M'}.$$

但

$$A'M'=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad O'M'=\frac{a}{2},$$

从而

$$A'O'=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

于是

$$r'=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

所以，

$$\frac{r}{r'}=\frac{2}{3}.$$

由于 2 和 3 互素，因此 $m=2$，$n=3$，从而 $mn=6$。

16.5 考虑一个具有指定点 A_1，A_2，A_3，A_4 为顶点的四面体，则其外部空间被它的界面分成两个集合，其中一个是 4 个同型区域之并，每个区域都是由一个依附于四面体的某个顶点并且关于这个顶点与四面体对称的三面角组成的。如果点 A_5 在其中一个，设为依附于顶点 A_4 的区域内，则直线 A_4A_5 一定与 $\triangle A_1A_2A_3$ 相交（图 16.3）。而另一个集合是 6 个同型区域之并，每个区域是关于四面体某条棱的二面角和它的对棱的二面角关于对棱对称的二面角之交。如果点 A_5 在其中一个，设为相应于棱 A_3A_4 的区域内，则直线 A_1A_2 与 $\triangle A_3A_4A_5$ 相交(图 16.4)。

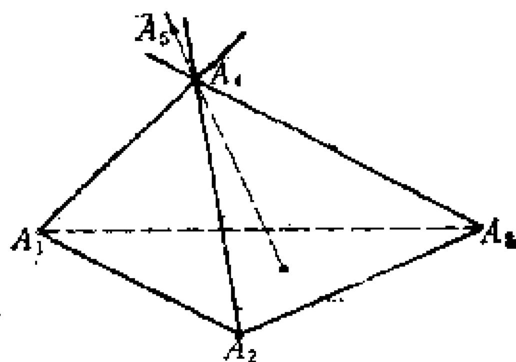


图 16.5

16.6 设题中结论不真，则任意一个平面至多与其中 3 个

集合相交．在不同的集合中各取一点，记为 A, B, C, D, E，则其中任意 4 点不共面，因而其中任意 3 点不共线，而且可过其中 3 点作一平面，使得其他两点分属不同的半空间(平面 ABC, ABD, ABE 之一就具有这种性质)．设这个平面过 A, B, C 三点，则它与直线 DE 的交点 F 属于各含点 A, B, C 的三个集合中的一个，设属于含点 A 的集合．于是过点 D, E, F, B 的平面至少与 4 个集合相交，矛盾．结论证毕．

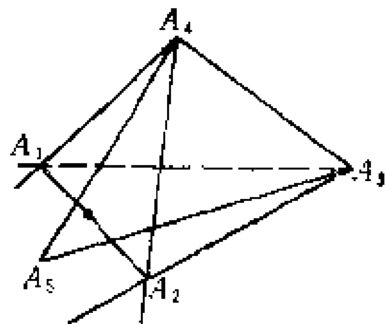


图 16.6

16.7 设题中结论不真，空间被划分为 3 个集合 M_1, M_2, M_3，并且存在这样的正数 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$，使得对 $i=1, 2, 3$，集合 M_i 中任意两点间的距离都不等于 a_i．考虑四面体 $ABCD$，它的棱长为 $AB=a_1$, $AC=BC=a_2$, $AD=BD=CD=a_3$ (这样的四面体是存在的，因为具有所说的边长的等腰锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O 在三角形内部．这表明 $OA=OB=OC<a_2 \leqslant a_3$．于是在过点 O 且垂直于平面 ABC 的直线上一定存在所需的点 D)，并且满足

$$A, B, C \notin M_3 \quad 且 \quad A, B \notin M_2.$$

为此只需使顶点 D 在 M_3 内 (如果 $M_3=\varnothing$，则自然有 A, B, $C \notin M_3$)，并使顶点 C 在 M_2 内，且点 C 与 D 的距离为 a_3(如果这样的点不存在，则自然有 A, $B \notin M_2$)．于是得到，A, $B \in M_1$ 且 $AB=a_1$，与假设矛盾．题中结论证毕．

16.8 用 A_n 表示 2^n 个所有可能的 n 数组 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 组成的集合，其中 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i=1, 2, \cdots, n$，并记

$$\boldsymbol{a}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{a}_k,$$

其中 $\varepsilon \in A_n$，且 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是任意向量．现在对 $n \in N$ 用归纳法证明：

$$\sum_{\varepsilon \in A_n} \boldsymbol{a}_\varepsilon^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k^2.$$

当 $n=1$ 时，因为

$$\sum_{\varepsilon \in A_1} \boldsymbol{a}_\varepsilon^2 = \boldsymbol{a}_1^2 + (-\boldsymbol{a}_1)^2 = 2\boldsymbol{a}_1^2 = 2^1 \sum_{k=1}^{1} \boldsymbol{a}_k^2,$$

所以等式成立．设等式对某个 $n-1 \in N$ 成立．如果在 n 数组 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ 中，记 $n-1$ 数组 $\varepsilon'=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$，并且记

$$\boldsymbol{a}_{\varepsilon'} = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \boldsymbol{a}_k,$$

则由于对任意两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，由平行四边形法则，有

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2 = 2\boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{c}^2,$$

所以进而有

$$\sum_{\varepsilon \in A_n} \boldsymbol{a}_\varepsilon^2 = \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} ((\boldsymbol{a}_{\varepsilon'}+\boldsymbol{a}_n)^2 + (\boldsymbol{a}_{\varepsilon'}-\boldsymbol{a}_n)^2) = \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} 2(\boldsymbol{a}_{\varepsilon'}^2 + \boldsymbol{a}_n^2)$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \boldsymbol{a}_k^2 + 2 \cdot 2^{n-1} \boldsymbol{a}_n^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k^2.$$

这正是所要证明的．

16.9 设线段 CD 与题中所说的平面相交于点 E，而点 C' 与 D' 是点 C 与 D 在该平面上的投影(图 16.7)，由于 $CC'=DD'=\dfrac{a}{2}$，$\angle CEC'=\angle DED'$，所以直角 $\triangle CC'E$ 与 $\triangle DD'E$ 全等，从而 OE 是直角 $\triangle C'OD'$ 的中线，由此得到，$C'D'=2OE=2r$．因此

$$CD=2\sqrt{C'C^2+C'E^2}=\sqrt{4r^2+a^2},$$

而点 C 是以点 A 为中点、长为 $4r$ 的线段上的任意一点．

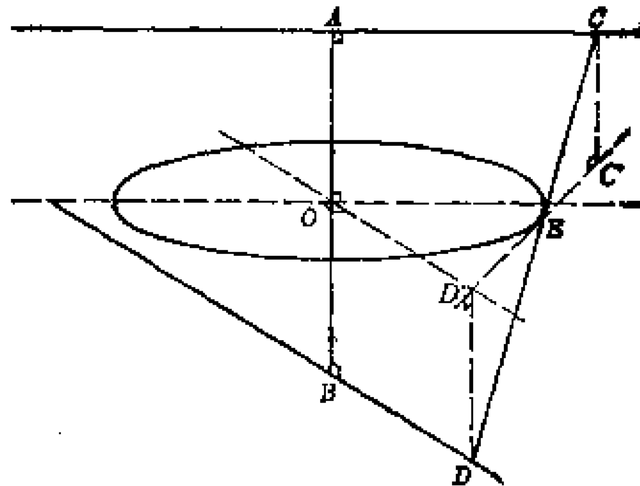


图 16.7

16.10 过点 A, B 及球面 S 的球心 O 作一平面．则球

面S的截口是一个以O_1为圆心，半径为$r_1 \leqslant r$且与直线AB相切的圆周。设OH与OK分别垂直于直线AB与O_1C（图16.8）。记$AB=2a$，$OH=h$，则有

$$
\begin{aligned}
AC^2+BC^2 &= (a+HC)^2+(a-HC)^2 \\
&= 2a^2+2HC^2 \\
&= 2(R^2-OH^2)+2(OO_1^2-O_1K^2) \\
&= 2(R^2-h^2)+2(r_1^2-(r_1-h)^2) \\
&= 2R^2-4h^2+4hr_1 \\
&= 2R^2+r_1^2-(2h-r_1)^2 \leqslant 2R^2+r^2.
\end{aligned}
$$

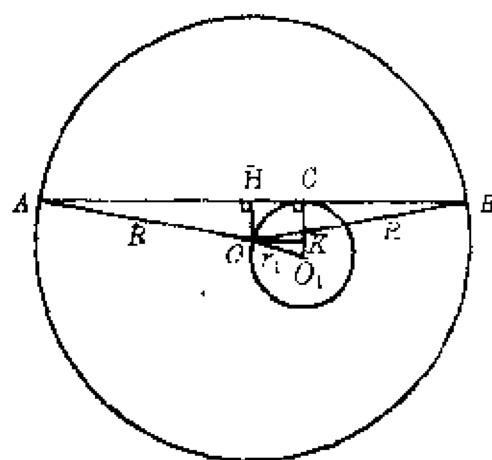


图 16.8

16.11 过点A作一条垂直于平面ABC的直线d，则与球面S相切的球面的球心O_1与O_2位于与点A，B，C等距离的点组成的直线l上，这表明，直线l与d平行。设A'是A关于直线l的对称点，D是直线OA'与l的交点（图16.9）。点A（及点A'）同时在两个球面上，所以$O_1A=r_1$，$O_2A=r_2$。由球面相切的条件，有$O_1O=R-r_1$，$O_2O=R-r_2$，因而

$$O_1O+O_1A=R=O_2O+O_2A.$$

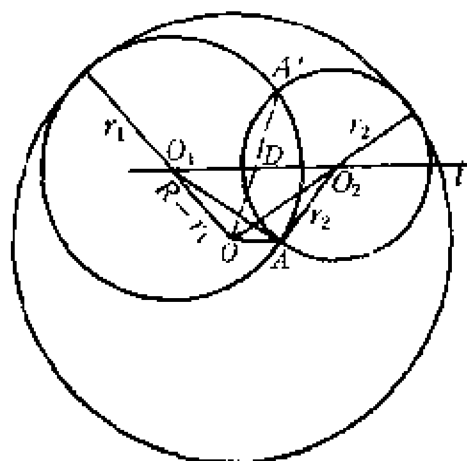


图 16.9

下面证明，点O_1与O_2关于点D是对称的。事实上，固定点O_1，使得$O_1O+O_1A=R$，则因为点O_2是点O_1关于点D的对称点，所以有

$$O_2O+O_2A=O_1A+O_1O=R.$$

其次，对直线l上介于点D与O_2之间的任意一点O_2'，有

$$O_2'O+O_2'A=O_2'O+O_2'A'<O_2O+O_2A'=O_2O+O_2A=R$$

（因为内三角形的周长小于外三角形的周长），而对位于线段D_2O在点O一侧延长线上的任意一点O_2''，同理有

$$O_2''O+O_2''A>R.$$

同样，仔细考察射线DO_1上的点，则得到

$$R-r_1=O_1O=O_2A=r_2,$$

从而有$r_1+r_2=R$。证毕。

16.12 正四棱锥$S-ABCD$如图16.10所示。不妨设平面π过底面正方形$ABCD$的对角线AC，且设点S，A，B，C，D在平面π上的投影分别为点S'，A'，B'，C'，D'，正四棱锥$S-ABCD$在平面π上的投影图形为P'。因为平面SBD垂直于AC，所以点S'，B'，D'，O'必落在$A'C'$（即AC）的中垂线上，且$A'B'C'D'$必是菱形（图16.11）。而$O'B'=OB\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，$O'S'=h\sin\alpha$。当$O'S'\leqslant O'B'$，即$h\sin\alpha\leqslant\sqrt{2}\times\cos\alpha$时，$S'$落在菱形$A'B'C'D'$上，因此，投影图形$P'$的面积$S_{P'}$为

$$S_{P'}=S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}\cos\alpha=4\cos\alpha.$$

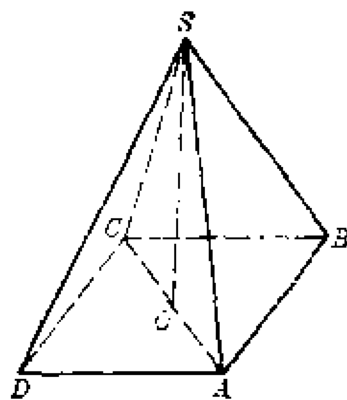


图 16.10

所以投影面积$S_{P'}$在$\alpha=0$时取到最大值4；当$O'S'\geqslant O'B'$，即

$$h\sin\alpha\geqslant 2\cos\alpha$$

时，

$$
\begin{aligned}
S_{P'} &= S_{A'D'C'}+S_{A'C'S'}=2\cos\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 2h\sin\alpha \\
&= \sqrt{2h^2+4}\sin(\alpha+\varphi),
\end{aligned}
$$

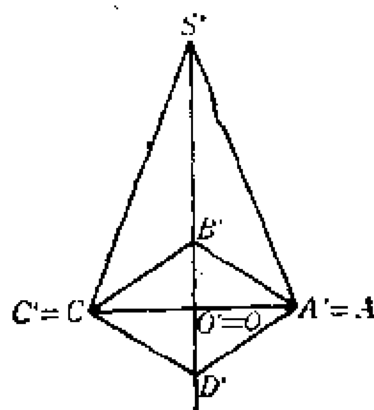


图 16.11

其中

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{h}.$$

所以当
$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$$
时，投影面积 $S_{P'}$ 取到最大值 $\sqrt{2h^2+4}$。注意，当 $h\geqslant\sqrt{6}$ 时，$\sqrt{2h^2+4}\geqslant 4$，因此，当 $h\geqslant\sqrt{6}$ 时，$S_{P'}$ 的最大值为 $\sqrt{2h^2+4}$，此时取 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$；当 $h\leqslant\sqrt{6}$ 时，$S_{P'}$ 的最大值为 4，此时取 $\alpha=0$。

16.13 引进一些补充记号：Q—底面积，h—棱锥的高，x—底面与侧面张成的二面角的余弦，a—底边的长，r—底面的内切圆半径，则有
$$a=2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},\quad Q=n\cdot\frac{1}{2}ra=nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},$$
$$h=r\operatorname{tg}(\arccos x)=r\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{x},\quad S=Q+\frac{Q}{x}.$$
由此得到
$$Q=\frac{xS}{x+1},$$
$$r=\sqrt{\frac{Q}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}=\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}},$$
$$V=\frac{1}{3}hQ=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{xS}{x+1}$$
$$=\frac{1}{3}\frac{S^{3/2}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}\cdot f(x),$$
其中
$$f(x)=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}.$$

(1) 我们有
$$f'(x)=\frac{1-3x}{2(1+x)^2\sqrt{x(1-x)}},$$
因此当 $x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 中的最大值为
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$
于是，所求的体积
$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}.$$

(2) 从上述关于 V, S, n, x 的各关系式中代入 n, S, V 的值，得到关于 x 的方程
$$\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}=\frac{2}{9},$$
它的根为 $x_1=\frac{1}{17}$ 与 $x_2=\frac{4}{5}$。因此，$Q_1=8$，$Q_2=64$，从而 $r_1=\sqrt{2}$，$r_2=4$。于是 $a_1=2\sqrt{2}$，$h_1=24$ 且 $a_2=8$，$h_2=3$。

16.14 用 h 表示棱柱的高，则在四面体 $A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$ 中(图 16.12)，$A'_{n+1}A'_{n+2}\parallel A'_1A'_2\parallel A_1A_2$，所以对棱 A_1A_3 与 $A'_{n+1}A'_{n+2}$ 之间的角为
$$\angle A_3A_1A_2=\frac{1}{2}\angle A_3OA_2=\frac{180^\circ}{2n},$$
其中 O 是多边形 $A_1\cdots A_{2n}$ 的中心。棱 A_1A_3 与

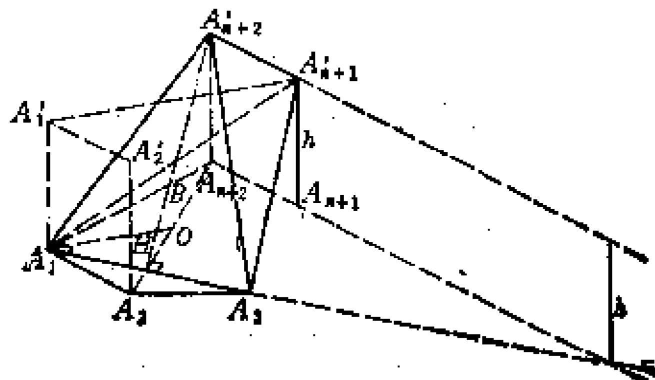


图 16.12

$A'_{n+1}A'_{n+2}$ 之间的距离为 h，而它们的长为

$$A_1A_3=2R\sin\frac{180^\circ}{n},\quad A'_{n+1}A'_{n+2}=2R\sin\frac{180^\circ}{2n},$$

因此所说的四面体体积为

$$\frac{1}{6}A_1A_3\cdot A'_{n+1}A'_{n+2}\cdot h\sin\frac{180^\circ}{2n}=\frac{2}{3}R^2\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}.$$

另一方面，如果 φ 是直线 $A_1A'_{n+1}$ 与平面 $A_1A_3A'_{n+2}$ 之间的夹角，则同样有体积

$$\frac{1}{3}S_{A_1A_3A'_{n+2}}\cdot A_1A'_{n+1}\sin\varphi,$$

其中

$$A_1A'_{n+1}=\sqrt{(A_1A'_1)^2+(A'_1A'_{n+1})^2}=\sqrt{h^2+4R^2},$$

$$S_{A_1A_3A'_{n+2}}=\frac{1}{2}A_1A_3\cdot A'_{n+2}H$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2+\left(2R\cos^2\frac{180^\circ}{2n}\right)^2},$$

这里 $A'_{n+2}H$ 是 $\triangle A_1A_3A'_{n+2}$ 的高。于是，得到

$$\frac{2}{3}R^2h\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}$$

$$=\frac{1}{3}R\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}\sqrt{h^2+4R^2}\sin\varphi.$$

因此

$$\sin\varphi=2R\sin^2\frac{180^\circ}{2n}\left(h^2+\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}+4R^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

于是，当

$$h^2+\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}\geqslant 2\sqrt{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}$$

取等号，即

$$h^2=\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2},$$

也即

$$h=2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$$

时，$\sin\varphi$ 取到最大值。这正是所要证明的。

16.15 由棱锥 $SA_1\cdots A_n$ 各条侧棱相等得知，顶点 S 在底面上的投影 O 到顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是等距离的。也就是说，它是多边形 $A_1, \cdots, A_n$ 的外接圆的圆心。由于对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，棱锥 SOA_kA_{k+1} 关于棱 SO 的二面角的平分平面是对称的，其中 $A_{n+1}=A_1$。所以它们关于棱 SA_k 与 SA_{k+1} 的二面角等于同一数值 φ_k。因为由条件

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi_2+\varphi_3=\cdots=\varphi_{n-1}+\varphi_n=\varphi_n+\varphi_1,$$

及 n 是奇数，所以

$$\varphi_1=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=\varphi_2=\cdots=\varphi_{n-1}.$$

由此得到，所有的棱锥 SOA_kA_{k+1} 都是全等的(因为任意相邻的棱锥关于其公共界面对称)，并且所有的角 $\angle A_kOA_{k+1}$ 也是相等的。因而 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正多边形。

图 16.13

16.16 记 $\overrightarrow{SA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{SB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{SC}=\boldsymbol{c}$(图 16.13)。则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, 并且如果 $\overrightarrow{SQ}=x\boldsymbol{a}$, 则

$$\overrightarrow{SR}=(1-x)\boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SA}+x\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+x(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),$$
$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\boldsymbol{a}+x(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),$$

并且对任意 x，向量 $\overrightarrow{QR}$ 与 $\overrightarrow{QP}$ 都不平行(从它们关于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的表达式可知，它们不共面)。因为点M在过点N且平行于平面 α 的平面上，所以存在 λ 与 μ，使得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SM}&=\overrightarrow{SN}+\lambda\overrightarrow{QR}+\mu\overrightarrow{QP}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})+\lambda((1-x)\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a})+\mu((1-x)\boldsymbol{a}+x(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}))\\&=\left(\frac{1}{2}-\lambda x+\mu(1-x)\right)\boldsymbol{a}+\left(-\frac{1}{2}-\mu x\right)\boldsymbol{b}+(1+\lambda(1-x)+\mu x)\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

因此，点M在直线SB上的必要且充分条件是$\overrightarrow{SM}=y\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\lambda x+\mu(1-x)=0,\\1+\lambda(1-x)+\mu x=0.\end{cases}$$

上述方程组对任意 x 有解，其解为

$$\mu=-\frac{x+1}{2(2x^2-2x+1)},\quad \lambda=\frac{3x-2}{2(2x^2-2x+1)}.$$

其中 $4x^2-4x+2=(2x-1)^2+1>0$。因此，不管对哪个 x 的值，所求的 y 值是，也只能是

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{2(2x^2-2x+1)}.$$

换句话说，对所求的 y 值，方程

$$(4y+1)x^2-(4y+3)x+(2y+1)=0$$

应有实根 x，即要求

$$(4y+3)^2-4(4y+1)(2y+1)=-16y^2+5\geqslant 0.$$

于是，所求的值 y 充满整个区间$\left[-\frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{5}}{4}\right]$.

16.17 设原棱台中较大底面 M_1 的面积为 S_1，较小底面 M_2 的面积为 S_2，由原棱台截出的两个棱台的公共底面M的面积为 S_0。延长棱台的侧棱到它们的交点 T，并用 P_1，P_2 与 P_0 分别表示以T为顶点，M_1，M_2 与 M_0 为底面的棱锥(图16.14)。底面 M_1 与 M_0 关于点T的位似关系可以转化为棱锥 P_1 与 P_0 的内切球面之间的位似关系。同样，底面 M_0 与 M_2 的位似关系也可转化为棱锥 P_0 与 P_2 的内切球面之间的位似关系。因此，在棱锥 P_1，P_2，P_0 的内切球面半径 R_1，R_2，R_0 之间与侧面积 Q_1，Q_2，Q_0 之间分别有如下的比例关系

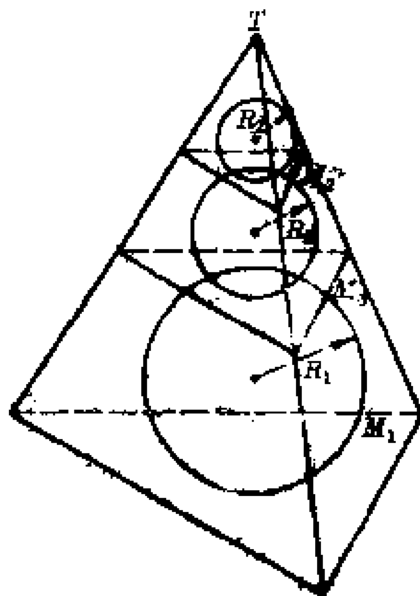


图 16.14

$$\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_2}{R_1},$$
$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

一方面，棱锥 P_2 的体积等于

$$\frac{1}{3}R_2(Q_2+S_2).$$

另一方面，因为半径为 R_0 的球面在棱锥 P_2 外面与它相切，所以它又等于

$$\frac{1}{3}R_0(Q_2-S_2).$$

因此
$$R_2(Q_2+S_2)=R_0(Q_2-S_2),$$
从而
$$\frac{Q_2-S_2}{Q_2+S_2}=\frac{R_2}{R_0}=\frac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}=\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}},$$
即
$$(Q_2-S_2)\sqrt[4]{S_1}=(Q_2+S_2)\sqrt[4]{S_2}.$$
于是得到
$$\frac{Q_2}{S_2}=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}},$$
最后有
$$S=Q_1-Q_2=\frac{Q_2}{S_2}(S_1-S_2)=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}(S_1-S_2)$$
$$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2})^2.$$
这正是所要证明的。

16.18 (1) 我们证明，如果点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在一个以O为球心，半径为1的球面上，使得其中任意两点 $A_i, A_j(i\neq j)$之间的距离不小于$\sqrt{2}$，则 $n\leqslant 6$。事实上，如果 $n>6$，则由余弦定理，有
$$(A_iA_j)^2=2-2\cos\angle A_iOA_j\geqslant 2,$$
因此，$\angle A_iOA_j\geqslant 90°$，即 $\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}\leqslant 0$。在空间中以$O$为原点并按如下方式选取直角坐标系：首先注意，向量$\overrightarrow{OA_i}$中一定有三个向量不共面，否则，所有 $n>4$ 个向量都在同一个平面上，于是一定有一对向量张成一个锐角，不可能。不妨设 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ 不共面。取直线 OA_1 为 OX 轴，使点 A_1 的横坐标为 1。其次取 OY 轴，使得点 A_2 在 XOY 平面上，并且它的纵坐标是正的。最后取 OZ 轴，使点 A_3 的竖坐标是正的。用(x_i, y_i, z_i)表示点 A_i 的坐标，则
$$\overrightarrow{OA_1}=(1, 0, 0), \overrightarrow{OA_2}=(x_2, y_2, 0), \overrightarrow{OA_3}=(x_3, y_3, z_3),$$
其中 $y_2>0$, $z_3>0$。因此对所有 $i>1$，有
$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}=x_i\leqslant 0.$$
其次，对所有 $i>2$，有
$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_2}=x_ix_2+y_iy_2\leqslant 0.$$
于是，因为 $x_2\leqslant 0$, $x_i\leqslant 0$, $y_2>0$, 所以 $y_i\leqslant 0$。最后，对所有 $i>3$，有
$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_3}=x_i\cdot x_3+y_iy_3+z_iz_3\leqslant 0.$$
于是，因为 $x_3\leqslant 0$, $x_i\leqslant 0$, $y_3\leqslant 0$, $y_i\leqslant 0$, $z_3>0$，所以 $z_i\leqslant 0$。在四个向量 $\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}, \overrightarrow{OA_6}, \overrightarrow{OA_7}$ 中必有两个，它们所有的坐标都是负数。这表明，它们的数量积是正的，因此 $n\leqslant 6$。因为坐标分别为
$$(\pm1, 0, 0), (0, \pm1, 0), (0, 0, \pm1)$$
的六个点确实满足题中条件，所以最大点数为 6。

(2) 下面证明，如果点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在半径为 1 的球面上，任意两点 $A_i, A_j(i\neq j)$之间的距离大于$\sqrt{2}$，则 $n\leqslant 4$。事实上，如果 $n>4$，则 $\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}<0$。如(1)中取直角坐标系，则当 $n>3$ 时，同样有 $x_i<0$, $y_i<0$, $z_i<0$。所以它们的数量积为正的，这就证明 $n\leqslant 4$。由于一个内接于球面的正四面体的顶点满足(2)中条件，所以最大点数为 4。

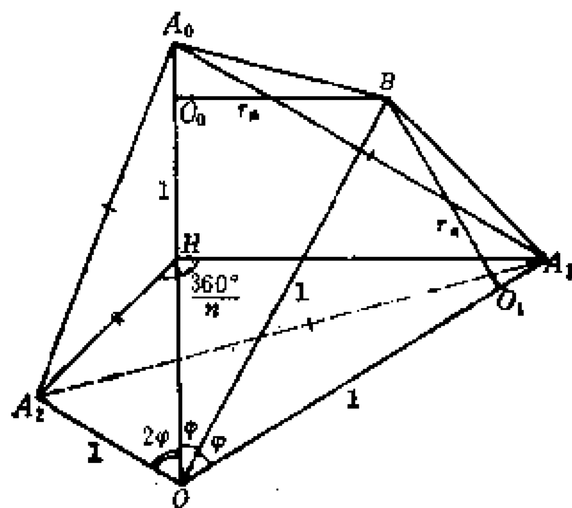


图 16.15

16.19 设O是球心，O_i 是圆 C_i 的圆心，$i=0, 1, 2, \cdots, n$,

A_i 是射线 OO_i 与球面的交点，B 是圆周 C_0 与 C_1 的切点。记 $\varphi=\angle A_0OB$，则由

$$OB=OA_0=OA_1=1,$$
$$O_0B=O_1B=r_n,$$
$$\angle OO_0B=\angle OO_1B=90^\circ,$$

有 $\sin\varphi=r_n$，$A_0A_1=2r_n$（图 16.15）。在正三棱锥 $OA_0A_1A_2$ 中，关于顶点O的平面角为 2φ，关于棱 OA_0 的二面角为 $\frac{360^\circ}{n}$。如果 A_1H 是垂直于棱 OA_0 的垂线，则

$$A_1H=A_2H=\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=2r_n\sqrt{1-r_n^2}.$$

其次有

$$2r_n=A_0A_1=A_1A_2=2A_1H\sin\frac{180^\circ}{n}=4r_n\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180^\circ}{n},$$

从而

$$2\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180^\circ}{n}=1.$$

因此

$$\sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{1}{2\sqrt{1-r_n^2}}>\frac{1}{2},$$

即 $n<6$（上式也可由如下事实得到，对于侧棱 OA_0 的二面角

$$\angle A_1HA_2=\frac{360^\circ}{n}$$

大于棱锥底面的平面角 $\angle A_1A_0A_2=60^\circ$）。对其他 $n=2, 3, 4, 5$，有

$$r_n=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

16.20 由于射线 AC' 与 AB' 垂直于公共半径 OA，所以，$\angle C'AB'$ 就是由分别过点C与B以及棱 OA 的面组成的二面角的平面角（图 16.16），同样，$\angle D'AB'$ 是由分别过点D与B以及棱 OA 的平面组成的二面角的平面角。因为所说的二面角关于直线 OB 是对称的（直线 OA 与自己对称，点C与D对称），所以它们相等。这表明，它们的平面角

$$\angle C'AB'=\angle D'AB'.$$

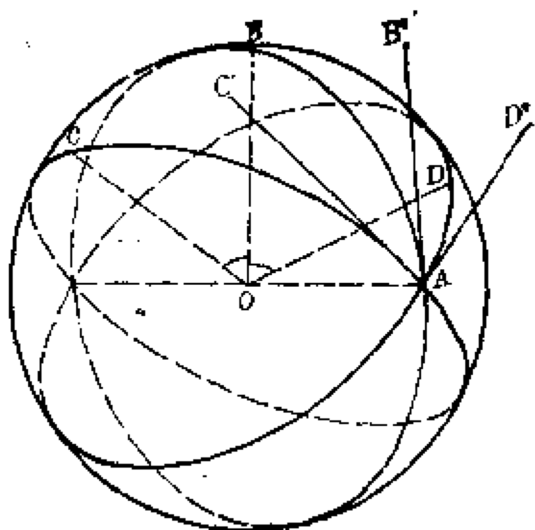


图 16.16

16.21 设点 C' 与C关于圆柱体的中心 O 是对称的（图 16.17）。如果三面角 $OABC$ 关于棱 OA, OB, OC 的二面角依次为 α, β, γ，则三面角 $OABC'$ 关于棱 OA, OB, OC' 的二面角依次为 $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, γ。设D是以 AB 为直径的圆的圆心，因为棱锥 $OADC'$ 关于棱 OD 的二面角的平分平面对称，所以，棱锥 $OADC'$ 中关于棱 OA 与 OC' 的二面角相等。同理，在棱锥 $OBDC'$ 中，关于棱 OB 与 OC' 的二面角也相等。因此，

$$(180^\circ-\alpha)+(180^\circ-\beta)=\gamma,$$

即

$$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ.$$

证毕。

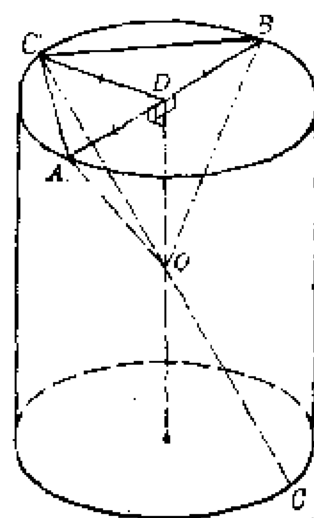


图 16.17

16.22 注意，以S为顶点，SA_1, SA_2, …, SA_n 为棱的 n 面角的各平面角之和小于 360°。任取 n 面角的一个内点 O，并从点O作平面 SA_iA_{i+1} 的垂线 OH_i，$i=1, 2, \cdots, n$，且记 $A_{n+1}=A_1$。所得到的以O为顶点，OH_i 为棱的

n 面角是凸的，其原因是，每个面，它的每条棱连同点 S 都在同一半空间内。它的每一个平面角

$$\angle H_iOH_{i-1} \quad (H_0 = H_n)$$

与关于棱 OA_i 的二面角的平面角之和为 $180°$。因为 n 面角的各平面角之和小于 $360°$，所以原 n 面角的二面角之和大于 $180°\cdot n-360°$。当 $n\geqslant 4$ 时，它不可能小于 $360°$。因此，题中的条件只有三面角才能满足。

16.23 在空间中建立坐标系，并且对每个 $i=1, 2, \cdots, 1979$，把横坐标满足

$$[x]\equiv i(\bmod 1979)$$

的点归在第 i 个集合。这样作出的实例表明，题目的答案是肯定的。

16.24 首先对 n 用归纳法证明，n 条直线至多把平面分为

$$p(n)=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

个部分，而且当 n 条直线处于通常位置，即其中任意两条不平行、任意三条不共点时把平面分为 $p(n)$ 个部分。事实上，$p(0)=1$。设结论对 $n-1$ 成立，则 $n-1$ 条直线至多把平面分为

$$p(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}+1$$

个部分，而且当 $n-1$ 条直线处于通常位置时恰分为 $p(n-1)$ 个部分。现在添加一条直线，它与 $n-1$ 条直线至多有 $n-1$ 个交点，这些交点把新添的直线至多分为 n 个线段，每个线段把原先的部分分为两个，于是，有

$$p(n)\leqslant p(n-1)+n=\frac{(n-1)n}{2}+1+n=\frac{n(n+1)}{2}+1,$$

其中当 $n-1$ 条直线处于通常位置且新添的直线与原先 $n-1$ 条直线恰有 $n-1$ 个交点，即 n 条直线处于通常位置时等式成立。其次对 n 用归纳法证明，n 个平面至多把空间分为

$$q(n)=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

个部分，而且当 n 个平面处于通常位置，即其中任意两个不平行，任意三个不共线，任意四个不共点时恰好分为 $q(n)$ 个部分，事实上，$q(0)=1$。设结论对 $n-1$ 成立，则 $n-1$ 个平面至多把空间分为

$$q(n-1)=\frac{(n-1)^3+5n+6}{6}$$

个立体部分。现在添加一个平面，它与 $n-1$ 个平面至多有 $n-1$ 条交线。这些交线把新添加的平面分为 $p(n-1)$ 个(平面)部分，每个平面部分把原先的立体部分分为两个。于是有

$$\begin{aligned} q(n)&\leqslant q(n-1)+p(n-1)\\ &=\frac{(n-1)^3+5(n-1)+6}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+1=\frac{n^2+5n+6}{6}, \end{aligned}$$

其中当 $n-1$ 个平面处于通常位置且新添加的平面与 $n-1$ 个平面恰有 $n-1$ 条交线，即 n 个平面处于通常位置时等式成立。最后因为

$$q(12)=299<300<378=q(13),$$

所以 12 个平面是不够的，但用 13 个平面即可。用 12 个处于通常位置的平面把空间分为 299 个部分，每个部分各取一点，然后取一个足够大的立方体，使它含有所取的 299 个点，而且它的顶点 A 不在所有 12 个平面上。在过顶点的三条棱上各取一点，记为 U，V，W，使得 $AU=AV=AW=\varepsilon$，其中 ε 为足够小的正数。于是平面 UVW 把立方体中含顶点 A 的部分分为两个部分，其他部分不动。因此 13 个平面便把足够大的立方体分为 300 个部分。对一般的立方体 K，只要作适当的位似变换，把足够大的立方体变为 K 即可。

16.25 在多面体上任取一顶点 A。在由 A 引出的所有棱中，除一条染上红色外，其余都染上蓝色，并

按图 16.18 所示的方式完成一部分染色，则对图中所示的顶点和棱，题中要求是能满足的。对已经染色部分，依次添加与这一部分有公共棱的那些面，并按下述方式给其他棱染色：如果该面有两条棱已经染色，则第三条棱可任意染色，如图 16.19 中的面 α。如果该面只有一条棱已经染色，则余下的两条棱分别染不同颜色，如图 16.19 中的面 β，则对添加的顶点和棱，题中要求还是满足的。如此继续，就可染完整个多面体的每条棱。

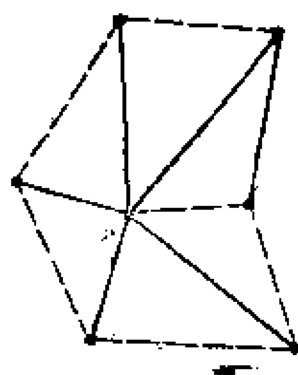


图 16.18

16.26 我们证明，在题中条件下，不论平面 α' 在什么位置，直线 AA' 与 BB' 都是相交的，因为在原先位置上这些直线是相交的。所以点 A, A', B, B' 共面。因此直线 AB 与 $A'B'$ 要么相交要么平行。在前一情形下(图 16.20)，它们的交点 O 在直线 l 上，并且因为直线 AA' 与 BB' 不平行，所以

$$OA\cdot OB'\neq OB\cdot OA'.$$

因为对其它位置的 α'，这个条件仍然成立，所以直线 AA' 与 BB' 和原先一样也是相交的。在后一种情形下，直线 $AB\parallel A'B'$，也平行于 l，并且 $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$。它们在平面 α' 旋转时保持不变。因此，在这种情形下，直线 AA' 与 BB' 对任何位置的 α' 也是相交的。如果直线 AA', BB', CC' 原先不共面，并交于一点，则对不同于 α 的任意位置的 α'，它们也同样不共面，并且如上所证明，它们两两相交，即有公共的交点。最后，如果直线 AA', BB', CC' 原先是共面的，则考虑过它们的交点且不与它们共面的第四条直线 DD'。于是，直线 AA', BB', DD' 交于一点，且 AA', CC', DD' 也交于一点，并且这些交点与 AA', DD' 的交点重合。因此，直线 AA', BB', CC' 对不同于 α 的任意位置 α' 都是相交的。通过给定直线在原来位置的交点 $M=M_0$ 作一个平面 β，使得它与直线 l 垂直。注意，点 M 在平面 α' 旋转时不会离开这个平面。在平面 β 上作一条直线 f，使它过点 M 且平行于平面 α'。可以证明，它与平面 α 的交点 F 并不依赖于 α' 的位置。如果在原来位置时这个点是 F_0，而在另一位置时是 F_1，则平面 α' 在后一位置时，直线 $MF_0(M\neq F_0$，否则 $F_0=M=F_1)$ 与平面 α' 交于某个点 F'。因此，如前所证，在原先位置时，直线 F_0F' 同样也过点 M，即与直线 f 重合，但不平行于 α'。同理可证，平面 α' 与过点 M 且平行于平面 α 的直线 g 的交点 G 在平面 α 旋转时也保持不变。于是，当平面 α' 旋转时，点 M 绕着点 F 旋转，与它保持着一个不变的距离(等于点 G 到直线 l 的距离)，并且与平面 α 和 α' 构成同一个角。因此，所求的集合为平面 β 上以 F 为中心、半径为 FM_0 (可能为零)的圆周，其中有两个属于平面 α 的对径点。

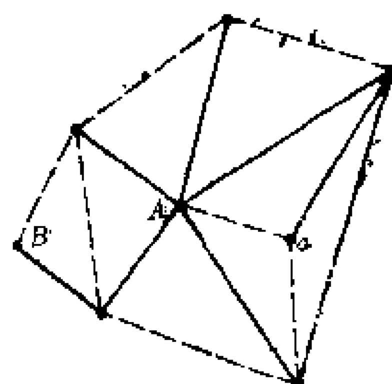


图 16.19

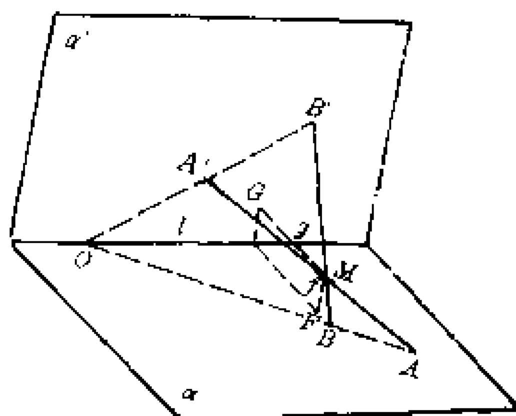


图 16.20

16.27 直线 l 是把点 A 变为点 B 的旋转轴的必要且充分条件是，点 A 与点 B 在直线 l 上的投影相同，且和它的距离相等，即直线 l 在过线段 AB 的中点且垂直于 AB 的平面 α_1 上。绕直线 l 作角度为 φ 的旋转和相继施行关于平面 α_1，然后关于平面 α_2 的对称变换的效果是相同的，其中 α_2 是平面 α_1 在绕直线 l 作角度为 $\frac{\varphi}{2}$ 的旋转(按同一方向)下的像。为证明这一事实，只须注意，比如在平面 ABO (它垂直于轴 l) 绕点 O 作角度为 φ 的旋转和作如下两次对称变换的效果是一致的：这两个对称变换分别是关于平面 ABO 和平面 α_1 与 α_2 的交线 l_1 与 l_2 的。因为关于平面 α_1 的对称已将点 A 变为点 B，所以对于题中所考虑的旋转(也只有对那些旋转)来说，平面 α_2 要通过点 B。因此，在所考虑的旋转下，点 C 的所有的像可以按如下方式得到：首先把点 C 作关于平面 α_1 的对称反射(得到顶点 D)，然后再作关于通过点 B 并与平面 α_1 不平行的任一平面 α_2 的对称反射。因此，点 C 的像组成了以 B 为中心，半径为 BD 的球面，除了那个关于平面

BCC' 与点D对称因而不在立方体表面上的点之外。由此可见，所求的集合是这个球面与立方体表面的交，并且它由三段分别以A, B', C为中心，以立方体棱长为半径的圆弧DA', $A'C'$, $C'D$组成（图16.21）。

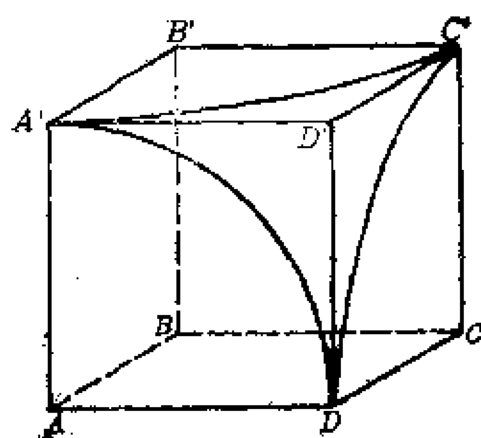


图 16.21

16.28 首先假设立方体$A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$四个给定的具有整数坐标的顶点中有三个在立方体的同一界面上（图16.2）。为确定起见，设它们是点A_1, A_2, A_3。因为向量

$$\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_2A_1}$$

的坐标是整数，所以顶点A_4也有整数坐标。由于

$$\overrightarrow{A_1A_1'}=\overrightarrow{A_2A_2'}=\overrightarrow{A_3A_3'}=\overrightarrow{A_4A_4'},$$

因此立方体其他四个顶点A_1', A_2', A_3', A_4'中不管哪一个是第四个顶点，它们的所有坐标也都是整数。现在设给定的具有整数坐标的四个顶点中没有三个点是在立方体的同一界面上，则这四个给定点是某个正四面体的顶点，它的棱是立方体的某些面的对角线。为确定起见，设这些顶点是A_1, A_2', A_3, A_4'。下面证明，向量$\overrightarrow{A_1A_3'}$具有整数坐标。事实上，考虑向量

$$2\overrightarrow{A_1A_3'}=\overrightarrow{A_1A_2'}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4'},$$

它有整数坐标x, y, z. 记

$$(\overrightarrow{A_1A_2'})^2=(\overrightarrow{A_1A_3})^2=(\overrightarrow{A_1A_4'})^2=a,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2'}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A_2'}\cdot\overrightarrow{A_1A_4'}=\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4'}=a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}=b,$$

则a, $b\in Z$，并且

$$x^2+y^2+z^2=(2\overrightarrow{A_1A_3})^2=3a+3\cdot 2b=12b\equiv 0 \pmod 4.$$

因为偶数的平方被4除的余数为0，而奇数的平方被4除的余数为1，所以$x^2+y^2+z^2$被4除的余数等于x, y, z中奇数的个数。于是向量$2\overrightarrow{A_1A_3'}$的所有坐标$x$, y, z都是偶数，从而$\overrightarrow{A_1A_3'}$的坐标都是整数。因此，与点A_2', A_4'共面的点A_3'有整数坐标。从而如前所证，立方体所有顶点的坐标都是整数。

16.29 设想把长方体所在空间划分为一些棱长为$\frac{1}{2}$的立方体，并把它们按国际象棋棋盘的方式染上黑白两种颜色(即使得任意两个有公共界面的立方体的颜色不同)。下面证明，如果任意一个长方体有一条整数棱，且它的每个面都与立方体平行，则它所含的白色部分和所含的黑色部分体积相等。事实上，用垂直于这条整数棱的截面把整个长方体分为厚度为$\frac{1}{2}$的层。注意，从最外面的一层平移到它的相邻一层，第一层的白色部分与第二层的黑色部分恰好重合，并且第一层的黑色部分也与第二层的白色部分恰好重合。随后的相邻层次的平移中情形也相同。因此在彼此相邻的层次，白色部分的体积与黑色部分的体积相等。因为总共有偶数个层次，所以这个结论对整个长方体也成立。设原长方体的界面与立方体的界面平行，它的一个顶点A和其中一个立方体的顶点重合，但它的各条棱都不是整数，则按题中条件划分的所有各长方体都有一条棱长为整数(它们的界面当然平行于立方体的面)。因此，由上面的结论，在每个小长方体中(从而在整个长方体中)白色部分的体积等于黑色部分的体积。另一方面，在原长方体中用三个平行于它的界面的平面截去一个以A为顶点、棱长全是整数且体积最大的长方体。余下七个长方体中有六个具有一条整数值的棱长，另一个的所有棱长都小于1，而且它有一个顶点B和立方体的一个顶点相合。把这个长方体装到一个具有棱长为1并以B为顶点的立方体内。在这个立方体内，割下这个长方体的三个平面将立方体切成了八个长方体，其中必有一个其所有棱长均不超过$\frac{1}{2}$，因而它包含的白色部分与黑色部分体积不相等（因为这两个体积中有一个为0)。对于与这个长方体有公共界面的三个长方体(它们每一个都与它共同

构成一个棱长为 1 的长方体)，上述结论也是对的。而这个结论又可以推到与上述四个长方体有公共界面的三个长方体，最后可以推到以 B 为顶点的那个长方体。这样一来，原先的长方体被分成八个长方体，其中有七个，它包含的白色部分与黑色部分体积相等，但第八个则不等。所得的矛盾说明原先的长方体不可能没有整数棱长。

第五章　　分　　析

§17　数　　列

17.1　注意，对每个 $n=1, 2, \cdots, 99$，有

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

代入所求的和中便得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{99}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}.$$

17.2　应用公式

$$\operatorname{tg} 1=\frac{\operatorname{tg} k-\operatorname{tg}(k-1)}{1+\operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1)}$$

（注意，因为 π 是无理数，所以上式对所有 $k\in N$ 都有意义），我们得到：对每个 $n\in N$，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\operatorname{tg} k-\operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1}-1\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1}-n=\frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1}-n.$$

于是，

$$A=\frac{1}{\operatorname{tg} 1}\quad \text{和}\quad B=-1$$

满足题中要求。

17.3　因为对每个 $n\in N$，

$$a_n^2=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1},$$

故

$$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

17.4　设 $A\in(0, 1)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$。则存在自然数 N，使得对所有的 $n\geqslant N$，都有

$$\frac{2A}{3}<a_n<\frac{4A}{3}.$$

如果对每个 $n>N$，有 $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$，则

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_{n-1}}=\sqrt{A}.$$

因此 $A\in\{0, 1\}$，与 $A\in(0, 1)$矛盾。又如果对某个 $n>N$，$a_n\neq\sqrt{a_{n-1}}$，则

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{4A}{3}=\frac{2A}{3},$$

即

$$a_n<\frac{2A}{3},$$

与N的取法矛盾，因此，数列$\{a_n\}$不可能有属于$(0, 1)$的极限。

17.5 考察数组 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 中的数 a_i。以 a_i 为中项的三项算术级数的个数既不超过 $i-1$，也不超过 $n-i$，这是因为第一个数只能从 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 中选取，而后一个数只能从 $a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_n$ 中选取，因此级数的总数不超过和

$$\sum_{i=1}^{n}\min\{i-1, n-i\}=S.$$

如果 $n=2l$, $l\in N-\{1\}$，则

$$S=\sum_{i=1}^{l}(i-1)+\sum_{i=l+1}^{n}(n-i)=l(l-1).$$

如果 $n=2l+1$, $l\in N$，则

$$s=\sum_{i=1}^{l}(i-1)+\sum_{i=l+1}^{n}(n-i)=l^2.$$

最后注意：所求得的级数个数的界在数列 $a_i=i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 时达到。

17.6 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$是题中所说的数列，考虑定义在整数集上的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为偶数时,}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为奇数时。}\end{cases}$$

并用公式 $b_n=f(a_n)$，$n\in N$ 给出数列$\{b_n\}$。因为 a_{n+4} 为偶数的必要且充分条件是，

$$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$$

为偶数，所以对任意 $n\in N$，有

$$\begin{aligned}b_{n+4}=f(a_{n+4})&=f(a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})=f(f(a_n)+f(a_{n+1})+f(a_{n+2})+f(a_{n+3}))\\&=f(b_n+b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}).\end{aligned}$$

数列$\{b_n\}$ 的前九项依次为 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1。因此，$b_6=b_1$, $b_7=b_2$, $b_8=b_3$, $b_9=b_4$，而且一般地有 $b_{n+5}=b_n$。这表明，在数列$\{b_n\}$中，0 只出现在下标为 $n=3+5k(k\in Z^+)$的位置上。因此，在数列$\{a_n\}$中，任意两个偶数项的下标之差被 5 整除，因此不可能依次连续出现数 1, 2, 3, 4。

17.7 设 $n\in N$ 是给定的，则由条件得到，$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 中每一个都不超过 $2n$。把数 $1, 2, \cdots, 2n$ 分成 n 对：$(1, n+1)$, $(2, n+2)$, $\cdots$, $(n, 2n)$。因为 $1, 2, \cdots, 2n$ 中至少包含数列$\{a_n\}$的 $n+1$ 项，所以必有两个数 a_p 与 a_q，$q<p$，它们属于同一对。显然有 $a_p-a_q=n$。

17.8 用下述方式构造数列$\{b_n\}$：

$$b_n=\begin{cases}a_n, & \text{当 } a_n\leqslant A \text{ 时,}\\ A, & \text{当 } a_n>A \text{ 时。}\end{cases}$$

并用 c_n 表示 $\frac{a_n}{b_n}$。则对所有 $n\in N$，有 $1\leqslant c_n\leqslant B$。因此，对任意 $m, n\in N$，有

$$\frac{c_m}{c_n}\leqslant B,$$

即

$$\frac{a_m}{a_n}\leqslant B\,\frac{b_m}{b_n}.$$

17.9 用下面的方式构造递增的下标序列$\{i_n\}$：设 a_{i_1} 是 $a_1, a_2, \cdots$中的最小者，因为数列$\{a_n\}$的每个项都是自然数，所以由最小数原理，a_{i_1} 是存在的。再设 a_{i_2} 是 $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \cdots$中的最小者，$a_{i_3}$ 是 a_{i_2+1},

a_{i_2+2}, …中的最小者，等等，于是无穷数列$\{a_{i_n}\}$是不减的。设b_{i_k}是b_{i_1}, b_{i_2}, …中的最小者，则$i_k<i_{k+1}$, $a_{i_k}\leqslant a_{i_{k+1}}$; $b_{i_k}\leqslant b_{i_{k+1}}$, 即可以分别取$i_k$与$i_{k+1}$作为所求的下标$p$与$q$。

17.10 对n用归纳法。当$n=1$时，$a_1^2\leqslant a_1-a_2<a_1$，因此$a_1<1$。此外

$$a_2\leqslant a_1-a_1^2=\frac{1}{4}-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2}.$$

即当$n=2$时，

$$a_n<\frac{1}{n}.$$

设结论对某个$n\geqslant 2$成立。现在证明结论对$n+1$成立。因为函数$f(x)=x-x^2$，在区间$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$上递增，且$a_n<\frac{1}{n}$，所以

$$a_{n+1}\leqslant f(a_n)\leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n^2(n+1)}<\frac{1}{n+1}.$$

这正是所要证明的。

17.11 关系式$a_k=a_{k-1}+\frac{a_{k-1}^2}{n}$等价于

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}.$$

因为

$$\frac{1}{2}=a_0<a_1<\cdots<a_n,$$

所以

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n},\ k=1,\ \cdots,\ n.$$

将它们相加便得到，

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1.$$

因此，

$$\frac{1}{a_n}>2-1=1,$$

即$a_n<1$，从而有

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1},\ k=1,\ \cdots,\ n.$$

把它们相加又得到，

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}.$$

因此

$$\frac{1}{a_n}<2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},$$

从而

$$a_n>\frac{n+1}{n+2}>\frac{n-1}{n}.$$

证毕。

7.12 设$A_i=\{4k+i\mid k\in Z\}$, $i=1,\ 2,\ 3$. 下面对$m\in Z^+$用归纳法证明，$a_{3m+i}\in A_i(i=1,\ 2,\ 3)$。当$m=0$时，因为$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=7$，所以$a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $a_3\in A_3$。设对$m\in N$，有$a_{3m+1}\in A_1$, $a_{3m+2}\in A_2$, $a_{3m+3}\in A_3$，则

$$a_{3m+4}=5a_{3m+3}-3a_{3m+2}=4(5r-3q+2)+1\in A_1.$$
$$a_{3m+5}=a_{3m+4}-a_{3m+3}=4(4r-3q+1)+2\in A_2.$$

$$a_{3m+6}=5a_{3m+5}-3a_{3m+4}=4(5r-6q)+3\in A_3.$$

其中 $r, q\in Z$，这就证明，$a_n\in A_1\cup A_2\cup A_3$，$n\in N$。但是 $0\notin A_1\cup A_2\cup A_3$，所以对每个 $n\in N$，$a_n=0$。

17.13 由条件得到

$$a_{k+m}-1\leqslant a_k+a_m\leqslant a_{k+m}+1,\ k,\ m\in N.$$

对 $q\in N$ 用归纳法证明：对任意 $p, q\in N$，有

$$a_{pq}-(q-1)\leqslant qa_p\leqslant a_{pq}+(q-1).$$

当 $q=1$ 时，结论显然成立。设结论对 q 成立。下面证明，结论对 $q+1$ 也成立。事实上，对任意 $p\in N$，有

$$(q+1)a_p=qa_p+a_p\leqslant a_p+a_{pq}+(q-1)\leqslant a_{p+pq}+q=a_{p(q+1)}+q.$$

同理可以证明

$$(q+1)a_p\geqslant a_{p(q+1)}-q.$$

这就证明结论成立。由 p, q 的对称性得到

$$a_{pq}-(p-1)\leqslant pa_q\leqslant a_{pq}+(p-1).$$

因此

$$\begin{aligned}|pa_q-qa_p|&\leqslant\max\{|a_{pq}+(p-1)-(a_{pq}-(q-1))|,\ |a_{pq}+(q-1)-(a_{pq}-(p-1))|\}\\&=p+q-2<p+q.\end{aligned}$$

从而

$$\left|\frac{a_q}{q}-\frac{a_p}{p}\right|<\frac{1}{q}+\frac{1}{p},$$

这正是所要证明的。

7.14 对 n 用归纳法。当 $n=1$ 时，只可能有

$$\frac{a}{b}=\frac{0}{1}<\frac{1}{1}=\frac{c}{d},$$

显然有 $bc-ad=1$。假设当 $n=k$ 时，对任意两个相邻的既约分数 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，都有 $bc-ad=1$。下面证明，当 $n=k+1$ 时，相应的结论也成立。因为在序列

$$\frac{0}{k},\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \cdots,\ \frac{k}{k}$$

任意相邻的两个数之间，至多只能有集合

$$\left\{\frac{1}{k+1},\ \frac{2}{k+1},\ \cdots,\ \frac{k}{k+1}\right\}$$

中的一个数，所以，如果

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}.$$

在 $n=k$ 时的排列中是两个相邻的数，而它们在 $n=k+1$ 的排列中不相邻，则在 $n=k+1$ 时的排列中，$\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 之间恰好有一个既约分数 $\frac{q}{p}$。因此只要分下面两种情况讨论：1) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ 在 $n=k+1$ 时相邻，且在 $n=k$ 时也相邻。此时由归纳假设，显然有 $bc-ad=1$；2) $\frac{a}{b}<\frac{q}{p}<\frac{c}{d}$ 在 $n=k+1$ 时相邻，$\frac{q}{p}$ 是既约分数，且 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 在 $n=k$ 时相邻，下面证明 $A=bp-aq=1$，$B=cq-pd=1$。易知 A 和 B 都是正整数。假设 $\max\{A, B\}>1$，则有

$$b+d<Bb+Ad=bcq-bdp+adp-adq=q\leqslant k+1.$$

另一方面，由

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d},$$

得

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

这表明 $\frac{a+c}{b+d}$ 已出现在 $n=k$ 时的排列中，从而与 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 在 $n=k$ 时相邻矛盾。这也就是说，$A=1$ 且 $B=1$。

17.15 设非正项的集合是有限的，则存在自然数 N，使得对所有 $n \geqslant N$，有 $a_n>0$。于是，如果 $a_n \leqslant 1$，则

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)\leqslant 0,$$

因此，当 $n \geqslant N$ 时，$a_n>1$。另一方面，

$$a_{N+1}=\frac{1}{2}\left(a_N-\frac{1}{a_N}\right)<\frac{a_N}{2},$$

$$a_{N+2}=\frac{1}{2}\left(a_{N+1}-\frac{1}{a_{N+1}}\right)<\frac{a_{N+1}}{2}<\frac{a_N}{4}.$$

且对所有 $k\in N$，有

$$a_{n+k}<\frac{a_N}{2^k},$$

因此，如果 $2^k>a_N$，则 $a_{N+k}<1$，矛盾。证毕。

17.16 当 $n\in N$ 时，有

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}=2^{n-1}-3\cdot 2^{n-2}+9a_{n-2}=\cdots=2^{n-1}-3^1\cdot 2^{n-2}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1}+(-1)^n 3^n a_0.$$

由此得到

$$a_n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}3^n}{5}+(-1)^n 3^n a_0.$$

它对 $n=0$ 也成立。其次，可求出

$$\begin{aligned}
d_n=a_n-a_{n-1}&=\frac{2^n+(-1)^{n+1}3^n}{5}+(-1)^n3^na_0\\
&\quad-\frac{2^{n-1}+(-1)^n3^{n-1}}{5}-(-1)^{n-1}3^{n-1}a_0\\
&=\frac{2^{n-1}}{5}+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4\cdot 3^{n-1}}{5}+(-1)^n\cdot 4\cdot 3^{n-1}a_0\\
&=\frac{2^{n-1}}{5}+(-1)^{n+1}\cdot 4\cdot 3^{n-1}\left(\frac{1}{5}-a_0\right)\\
&=\frac{2^{n-1}}{5}\left(1+4\cdot(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(1-5a_0)\right).
\end{aligned}$$

如果 $1-5a_0>0$，则对充分大的偶数 n，有 $d_n<0$；如果 $1-5a_0<0$，则对充分大的奇数 n，也有 $d_n<0$。因此，如果 $a_0\neq\frac{1}{5}$，则数列 $\{a_n\}$ 不是递增的。如果 $a_0=\frac{1}{5}$，则对所有 $n\in N$，

$$d_n=\frac{2^{n-1}}{5}>0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 是递增的。

17.17 注意，对题中所说的数列，

$$a_{n+1}a_{n+3}+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a_na_{n+2},\quad n\in N.$$

由此得到，

$$\frac{a_{n+3}+a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}.$$

因此，如果记

$$b_n=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}},$$

则

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b,$$

由此得到

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=b_n=b_1=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\left(\frac{a_2^2+a}{a_1}+a_1\right)\frac{1}{a_2}=\frac{a_1^2+a_2^2+a}{a_1a_2}\in Z,$$

即

$$a_{n+2}=ba_{n+1}-a_n,$$

其中 $b\in Z$, $n\in N$. 因为 a_1, $a_2\in Z$, 所以

$$a_3=ba_2-a_1,\ a_4=ba_3-a_2,\ \cdots$$

都是整数.

17.18 注意 $a_0=0$, $a_1=1$, 并可证明,对每个 $n\in Z^+$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ (由此依次得到 a_2, a_3, a_4, $\cdots$ 都是整数), 事实上,记

$$\alpha=\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},\quad \beta=\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

则

$$a_n=\alpha-\beta,\quad a_{n+1}=(2+\sqrt{3})\alpha-(2-\sqrt{3})\beta.$$

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=(2+\sqrt{3})^2\alpha-(2-\sqrt{3})^2\beta=(7+4\sqrt{3})\alpha-(7-4\sqrt{3})\beta\\&=(8+4\sqrt{3})\alpha-(8-4\sqrt{3})\beta-(\alpha+\beta)=4a_{n+1}-a_n.\end{aligned}$$

因此,

$$a_{n+2}\equiv(a_{n+1}-a_n)(\bmod 3).$$

而数列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 的前八项除以 3 的余数依次为 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 所以

$$a_6\equiv a_0(\bmod 3),\ a_7\equiv a_1(\bmod 3),$$

且对 $n\in Z$, 有 $a_{n+6}\equiv a_n(\bmod 3)$. 于是,在这个数列中, 形如 a_{3k} 的项且只有这些项除以 3 的余数为 0, 其中 $k\in Z^+$, 又因为

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1,$$

所以有

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^{-n}-(2+\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}}=-a_{-n}.$$

由此推知,对负的 n, a_n 也是整数,且,当且仅当 $n\equiv 0(\bmod 3)$ 时 $a_n\equiv 0(\bmod 3)$.

17.19 记 $a_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$, 则当 $n\in N$ 时 $a_n>0$, 并且

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2}\\&=\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\\&\quad-\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}a_{n+1}-a_n.\end{aligned}$$

面对 $n\in N$ 用归纳法证明, a_{2k-1} 是整数, 且 a_{2k} 具有形式 $m\sqrt{5}$, 其中 $m\in Z$. 事实上, 当 $k=1$ 时, $a_1=1$, $a_2=\sqrt{5}$. 设结论对某个 $k\in N$ 成立, 则

$$a_{2k+1}=\sqrt{5}a_{2k}-a_{2k-1}=5m-a_{2k-1},$$

$$a_{2k+2}=\sqrt{5}a_{2k+1}-a_{2k}=\sqrt{5}(a_{2k+1}-m).$$

即结论对 $k+1$ 也成立. 因此

$$\begin{aligned}b_n&=-2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\&=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}-2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\\&=\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)^2=a_n^2.\end{aligned}$$

所以,当 n 是奇数时, b_n 是 $a_n\in N$ 的平方; 而当 n 是偶数时, b_n 有如下的形式:

$$(m\sqrt{5})^2=5m^2\quad(m\in N).$$

17.20 所求之 α 为 $\pm\frac{2}{3}\pi+2m\pi,\ m\in Z$。事实上，如果 α 满足题中条件，则

$$\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{4}.$$

否则，设

$$-\frac{1}{4}<\cos\alpha<0,$$

则

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1<-\frac{7}{8}\ \text{与}\ \cos 4\alpha=2\cos 2\alpha-1>0.$$

同理，对任意 $n\in N$，都有

$$\cos 2^n\alpha\leqslant-\frac{1}{4}.$$

于是

$$\left|\cos 2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4}.$$

再利用恒等式

$$\cos 2x+\frac{1}{2}=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right),$$

得到

$$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2\left|\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n\in N.$$

这表明，$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|$ 可小于任意一个正数，因而只有

$$\cos\alpha+\frac{1}{2}=0.$$

即

$$\alpha=\pm\frac{2}{3}\pi+2m\pi,\ m\in Z.$$

此时，

$$0>-\frac{1}{2}=\cos\alpha=\cos 2\alpha=\cos 4\alpha=\cos 8\alpha=\cdots.$$

17.21 注意，$a_n=(1+\sqrt{a})^n$ 与 $a_n=(1-\sqrt{a})^n$ 这两个数列都满足递推关系式

$$a_{n+1}=2a_n+(a-1)a_{n-1}\quad n\in N.$$

事实上，对任意 $n\in N$，有

$$a_{n+1}-2a_n+(1-a)a_{n-1}=(1\pm\sqrt{a})^2a_{n-1}-2(1\pm\sqrt{a})a_{n-1}+(1-a)a_{n-1}=0.$$

因此，任意形如

$$a_n=A(1+\sqrt{a})^n+B(1-\sqrt{a})^n$$

的数列也满足这个关系式，特别，取

$$A=-B=\frac{1}{2\sqrt{a}},$$

便得到数列

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{a}}((1+\sqrt{a})^n-(1-\sqrt{a})^n).$$

它满足题中所说的递推式，因为 $a_0=0,\ a_1=1$，所以由牛顿二项式定理得到，对任意不等于 2 的(从而是奇数的)素数 p，有

$$a_p=\frac{1}{2\sqrt{a}}((1+\sqrt{a})^p+(1-\sqrt{a})^p)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sum_{i=0}^{p}C_p^i(\sqrt{a})^i-\sum_{i=0}^{p}C_p^i(-\sqrt{a})^i\right)=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^{2i+1}a^i\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ (\mathrm{mod}\,p).$$

其中用到下面的事实：后一和式中所有形如 $C_p^{2i+1}a^i$ 的被加项当 $i=0, 1, \cdots, \frac{p-1}{2}-1$ 时被 p 整除（因为当 $k=1, 2, \cdots, p-1$ 时

$$C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!}\equiv 0(\bmod p).$$

而当 $i=\frac{p-1}{2}$ 时相应的被加项 $C_p^p a^i=a^{\frac{p-1}{2}}$。当 $p=2$ 时，有

$$a_p=\frac{1}{2\sqrt{a}}((1+\sqrt{a})^2-(1-\sqrt{a})^2)=2\equiv 0(\bmod p).$$

于是，使题中所说的结论(1)与(2)成立的必要且充分条件是，a 被满足 $0<p\leqslant p_0$ 的每个素数 p 整除，而不被任意大于的 p_0 素数 p 整除，具有这一性质的 $a\in N$ 的最小值就是满足 $3\leqslant p\leqslant p_0$ 的所有素数 p 的乘积。

17.22 设数列 $\{a_n\}$ 满足题中条件，因为 $a_1>0$, $a_2>0$, 且 $a_2^3+1=a_1a_3$, 所以 $a_3>0$。仿此可得，当 $n=4, 5, \cdots$ 时，$a_n>0$。因此，当 $n\in N$ 时，

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^3+1}{a_n},$$

从而

$$a_3=\frac{a_2^3+1}{a_1}=a_2^3+1,$$

$$a_4=\frac{a_3^3+1}{a_2}=\frac{(a_2^3+1)^3+1}{a_2}=\frac{a_2^9+3a_2^6+3a_2^3+2}{a_2}=a_2^8+3a_2^5+3a_2^2+\frac{2}{a_2}.$$

因为 $a_4\in Z$, 所以 $a_2>1$ 是 2 的因数，即 $a_2=2$。由于数列所有其他的项都唯一地被其前面两项确定，所以所说的数列是唯一的。现在对 $n\in N$ 用归纳法证明，这个数列的每个项都是整数（即确实满足题中条件）。首先，上已验明，a_1, a_2, a_3, a_4 都是整数，其次，设对某个 $n\geqslant 5$, $a_1, \cdots, a_{n-1}\in Z$, 则

$$a_n=\frac{a_{n-1}^3+1}{a_{n-2}}=\frac{((a_{n-2}^3+1)/a_{n-3})^3+1}{a_{n-2}}=\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-2}a_{n-3}^3}.$$

因为

$$\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-3}^3}=a_{n-1}^3+1$$

是整数，所以上式左端分子 $a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3$ 被 a_{n-3}^3 整除，又因为

$$\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-2}}=a_{n-2}^8+3a_{n-2}^5+3a_{n-2}^2+a_{n-4}.$$

所以 $a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3$ 也被 a_{n-2} 整除，最后，由于

$$(a_{n-2}, a_{n-3})=\left(\frac{a_{n-3}^3+1}{a_{n-4}}, a_{n-3}\right)\leqslant(a_{n-3}^3+1, a_{n-3})=(1, a_{n-3})=1.$$

所以 a_{n-2} 与 a_{n-3} 互素。因此 $a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3$ 被乘积 $a_{n-3}^3a_{n-2}$ 整除，从而 a_n 是整数。证毕。

17.23 记

$$S_n=\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_0}{a_2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}+\frac{p}{a_{n+1}},$$

则数列 S_1, S_2, $\cdots$ 由相同的数组成的必要且充分条件是，对每个 $n\in N$,

$$S_{n+1}-S_n=\frac{a_0}{a_{n+1}}+\frac{p}{a_{n+2}}-\frac{p}{a_{n+1}}=\frac{p}{a_{n+2}}-\frac{p-a_0}{a_{n+1}}=0,$$

即

$$a_{n+2}=\frac{p}{p-a_0}a_{n+1}.$$

设数列 a_0, a_1, $\cdots$ 满足题中条件，则对每个 $n\geqslant 3$, 有

$$a_n=\frac{p}{p-a_0}a_{n-1}=\left(\frac{p}{p-a_0}\right)^2a_{n-2}=\cdots=\left(\frac{p}{p-a_0}\right)^{n-2}a_2.$$

由于 $a_n\in N$, 且 p 与 $p-a_0$ 互素（因为 $0<p-a_0<p$），所以 a_2 被 $p-a_0$ 的（具有自然数指数的）任何次幂整除，由此可知，$p-a_0=1$。因此

$$a_0=p-1,\ \frac{p-1}{a_1}+\frac{p}{a_2}=1,\ a_n=p^{n-2}a_2,\ (a_1, a_2\in N),\ n=3, 4, \cdots.$$

反之，设数列 $\{a_n\}$ 满足上述等式，则因为 $S_1=1$, $S_{n+1}=S_n$, $n\in N$, 所以数列 $\{a_n\}$ 满足题中条件。于是，问题

归结为，对给定的素数 p，求方程

$$\frac{p-1}{a_1}+\frac{p}{a_2}=1$$

的自然数解的个数。将方程化为

$$pa_1=a_2(a_1-(p-1)).$$

并注意，方程左端被 p 整除，而且 $a_2>0$，$a_1-(p-1)>0$，因此，当 $a_2=kp$ 或 $a_1-(p-1)=mp$，$k, m\in N$ 时，方程可能有解。因为当 $a_1-(p-1)\equiv 0(\bmod p)$ 时，$a_1\equiv -1(\bmod p)$，即方程左端不被 p^2 整除，从而 a_2 不被 p 整除，所以上述两个条件 $a_2=kp$ 与 $a_1-(p-1)\equiv mp$ 是不相容的。设 $a_2=kp$，则原方程化为

$$a_1=k(a_1-(p-1)) \quad 即 \quad p-1=(k-1)(a_1-p+1).$$

因此，方程的每个解可用下述方法得到：取 $p-1$ 的任意一个因数作为 a_1-p+1，然后令 $a_2=kp$，其中

$$k=\frac{p-1}{a_1-p+1}+1.$$

现在设 $a_1-(p-1)=mp$，则原方程有解的必要且充分条件是

$$mp+p-1=a_2m, \quad 即 \quad p-1=(a_2-p)m,$$

而所有的解可以这样得到：取 $p-1$ 的任意一个因数作为 m，然后令

$$a_2=\frac{p-1}{m}+p, \quad a_1=mp+p-1.$$

因为上述两个条件是不相容的，因此所得到的解都不相同，所以方程 $pa_1=a_2(a_1-(p-1))$ 的解的个数，也即所求数列的个数，是 $p-1$ 的因数个数的两倍。

17.24 首先证明：$a, b, c\in N$(其中 $b<a$, $c<a$)。满足题中条件当且仅当下述两个条件成立：

$$bc\equiv 1(\bmod a) \qquad ①$$

$$nbc^n+(n-1)bc^{n-1}\equiv(n+1)bc^{n+1}(\bmod a), \qquad ②$$

设 a、b、c 满足题中条件，则由 $bc\equiv a_1(\bmod a)$，$a_1=1$ 即得条件①，再由 $2bc^2\equiv a_2(\bmod a)$，$a_2=a_1$ 得到 $n=1$ 时的条件②，即

$$bc\equiv 2bc^2(\bmod a) \qquad ③$$

对其他的 $n>1$，因为

$$a_n\equiv nbc^n(\bmod a),\ a_{n-1}\equiv(n-1)bc^{n-1}(\bmod a),\ a_{n+1}\equiv(n+1)bc^{n+1}(\bmod a),$$

$$a_n+a_{n-1}=a_{n+1}. \qquad ④$$

所以条件②成立。现在设 a、b、c 满足条件①与②。下面对 $n\in N$ 用归纳法证明，每个 a_n-nbc^n 都被 a 整除，因为 $a_1=a_2=1$，所以当 $n=1$ 与 $n=2$ 时，结论可由条件①与③(即 $n=1$ 时的条件②)得到证明，设结论对某个 $n>1$ 成立，即 a_n-nbc^n 与 $a_{n-1}-(n-1)bc^{n-1}$ 都被 a 整除。于是，由条件②与④得到：

$$a_{n+1}-(n+1)bc^{n+1}\equiv((a_n-nbc^n)+(a_{n-1}-(n-1)bc^{n-1}))(\bmod a)$$

也被 a 整除。注意，由条件①还可得到，$(b, a)=(c, a)=1$，而条件②等价于：当 $n\in N$ 时，每个数

$$d_n=(n+1)c^2-nc-(n-1)=(n+1)(c^2-c-1)+(c+2)$$

都被 a 整除，从而也等价于 $c^2-c-1=d_2-d_1$ 与 $c+2=d_1-2(c^2-c-1)$ 都被 a 整除。因此，

$$(c^2-c-1)-(c+2)(c-3)=5$$

应被 a 整除。由于 $a>1$，所以 $a=5$，又由于

$$c+2\equiv 0(\bmod 5),\ 1\leqslant c<5 \quad 及 \quad bc\equiv 1(\bmod 5),\ 1\leqslant b<5.$$

所以 $c=3$，$b=2$。最后，直接验证表明，当 $a=5$，$b=2$，$c=3$ 时，它们确实满足条件①，而且 $c+2=5$，与 $c^2-c-1=5$ 都被 $a=5$ 整除。

§18 极 值

18.1 因为

$$f(x, y)-2=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)$$

$$\geqslant \frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0.$$

所以当 $x, y>0$ 时，$f(x, y)$ 的最小值为 2，而且当且仅当 $x=y$ 时 $f(x, y)=2$。

18.2 由平均值定理，

$$\sqrt[4]{x^2y^2z^2u} = \sqrt[4]{2x\cdot xy\cdot z\cdot yzu} \leqslant \frac{2x+xy+z+yzu}{4} = \frac{1}{4},$$

即

$$x^2y^2z^2u \leqslant \frac{1}{512},$$

而且当

$$2x = xy = z = yzu = \frac{1}{4},$$

即

$$x=\frac{1}{8},\ y=2,\ z=\frac{1}{4},\ u=\frac{1}{2}$$

时等式成立。于是，所求的最大值为 $\frac{1}{512}$。

18.3 首先设 $n=2k$，其中 $k\in N$，由三角形不等式，有

$$\begin{cases} |x-a_1|+|x-a_n|\geqslant a_n-a_1, \\ |x-a_2|+|x-a_{n-1}|\geqslant a_{n-1}-a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x-a_k|+|x-a_{k+1}|\geqslant a_{k+1}-a_k, \end{cases}$$

由此得到，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i| \geqslant \sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j).$$

于是，如果 $x\in[a_k, a_{k+1}]$，则

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j).$$

另一方面，如果 $x\notin[a_k, a_{k+1}]$，则 $|x-a_k|+|x-a_{k+1}|>a_{k+1}-a_k$，从而，

$$f(x)>\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j).$$

于是，对任意 $x\in[a_k, a_{k+1}]$，函数 $f(x)$ 取到最小值

$$\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j).$$

现在设 $n=2k-1$，其中 $k\in N$，则

$$\begin{cases} |x-a_1|+|x-a_n|\geqslant a_n-a_1, \\ |x-a_2|+|x-a_{n-1}|\geqslant a_{n-1}-a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x-a_{k-1}|+|x-a_{k+1}|\geqslant a_{k+1}-a_{k-1}, \\ |x-a_k|\geqslant 0, \end{cases}$$

由此得到，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i| \geqslant \sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j).$$

因此，如果 $x=a_k$，则

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j).$$

而如果 $x\neq a_k$，则

$$f(x)\geqslant \sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)+|x-a_k|>\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j).$$

于是，当 $x=a_k$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值

$$\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j).$$

18.4 (1) 求乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最小值。设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是满足题中条件的任意一个数组。考虑新数组 $(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$，其中

$$x_1^{(1)}=x_1,\ x_2^{(1)}=x_2,\ \cdots,\ x_{n-2}^{(1)}=x_{n-2},\ x_{n-1}^{(1)}=\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-\frac{1}{n^2}},\quad x_n^{(1)}=\frac{1}{n}.$$

这个数组显然满足

$$x_i^{(1)}\geqslant\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)})^2=1.$$

而且因为

$$x_{n-1}^2x_n^2-(x_{n-1}^{(1)}x_n^{(1)})^2=x_{n-1}^2x_n^2-\left(x_{n-1}^2+x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2}$$
$$=\left(x_{n-1}^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)\geqslant 0.$$

所以，

$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_n^{(1)}.$$

其次，设

$$x_1^{(2)}=x_1^{(1)},\ x_2^{(2)}=x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_{n-3}^{(2)}=x_{n-3}^{(1)},$$
$$x_{n-2}^{(2)}=\sqrt{(x_{n-2}^{(1)})^2+(x_{n-1}^{(1)})^2-\frac{1}{n^2}},$$
$$x_{n-1}^{(2)}=x_n^{(2)}=\frac{1}{n}.$$

同理，

$$x_i^{(2)}\geqslant\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(2)})^2=1,$$
$$x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_n^{(1)}\geqslant x_1^{(2)}x_2^{(2)}\cdots x_n^{(2)}.$$

重复这个过程 $n-1$ 次，最后得到数组 $(x_1^{(n-1)}, \cdots, x_n^{(n-1)})$，其中

$$x_1^{(n-1)}=\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n},$$
$$x_2^{(n-1)}=\cdots=x_n^{(n-1)}=\frac{1}{n}.$$

并且

$$x_i^{(n-1)}\geqslant\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(n-1)})^2=1,$$
$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant x_1^{(n-1)}x_2^{(n-1)}\cdots x_n^{(n-1)}\geqslant\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}.$$

这就是说，对任意满足题中条件的数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 都有

$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$$

而且当

$$x_1=\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n},\ x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$$

时等式成立，于是最小值等于 $\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$。

(2) 求乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值。由平均值定理得到

$$x_1^2\cdots x_n^2\leqslant\left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}\right)^n=\frac{1}{n^n}.$$

即 $x_1x_2\cdots x_n\leqslant n^{-\frac{n}{2}}$，当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

时等式成立。于是，最大值等于 $n^{-\frac{n}{2}}$。

18.5 设 $\max(x_1,\cdots,x_n)=x_k$，则

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=\sum_{i=1}^{k-1}x_ix_{i+1}+\sum_{i=k}^{n-1}x_ix_{i+1}\leqslant x_k\sum_{i=1}^{k-1}x_i+x_k\sum_{i=k+1}^{n}x_i$$

$$=x_k(a-x_k)\leqslant\left(\frac{x_k+a-x_k}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}.$$

当 $x_1=x=\dfrac{a}{2}$，$x_3=\cdots=x_n=0$ 时等式成立。因此最大值等于 $\dfrac{a^2}{4}$。

18.6 记 $A=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$。因为当 $i=1,2,\cdots,n$ 时

$$(a_ib_i+1)^2=a_i^2b_i^2+2a_ib_i+1\leqslant a_i^2b_i^2+a_i^2+b_i^2+1=(a_i^2+1)(b_i^2+1),$$

所以，

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i+1}{b_i}=\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)$$

$$\leqslant\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{b_i^2+1}=\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)$$

因为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$，所以上述不等式中取等号的必要且充分条件是，对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有 $(a_ib_i+1)^2=(a_i^2+1)(b_i^2+1)$，即有 $a_i^2+b_i^2=2a_ib_i$，也即有 $a_i=b_i$。因此，题中所说的乘积当且仅当 $(b_1,\cdots,b_n)=(a_1,\cdots,a_n)$ 时取到最大值。

18.7 不妨设 $x\geqslant y$。记 $p=x-k$，则 $x=k+p$，$y=2k-x=k-p$，$p\geqslant0$，且乘积

$$xy=(k+p)(k-p)=k^2-p^2$$

当 p 取到最小值时取到最大值。设 $p=0$，则 $x=y=k$，且 x，y 仅当 $k=1$ 时互素。设 $p=1$，则 $x=k+1$，$y=k-1$，为使 x，y 互素，k 应为偶数(否则 x 与 y 都被 2 整除)。而且，这个条件也是充分的，因为 x 与 y 的公因数也是 $x-y=(k+1)-(k-1)=2$ 的因数（即 1 或 2），而当 k 为偶数时，2 显然不会是奇数 $k+1$ 与 $k-1$ 的因数。设 $p=2$，则 $x=k+2$，$y=k-2$。当 k 是偶数时，x 与 y 不互素，而当 k 是奇数时，x 与 y 都是奇数，而 x 与 y 的公因数也是它们的差 $x-y=(k+2)-(k-2)=4$ 的因数，因而只能有 $(x,y)=1$，即 x 与 y 互素。于是所求的 x，y 为：

如果 $k=1$，则 $x=1$，$y=1$。

如果 $k=2m$，$m\in N$，则 $x=k\pm1$，$y=k\mp1$。

如果 $k=2m+1$，$m\in N$，则 $x=k\pm2$，$y=k\mp2$。

18.8 首先有

$$a=\sum_{i=1}^{n}\sin^2x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1-\cos2x_i),$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\cos2x_i=n-2a.$$

其次，考虑平面上单位向量 $(\cos2x_i,\sin2x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。它们的和的长度不超过 n，即有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sin2x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\cos2x_i\right)^2\leqslant n,$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin2x_i\right|\leqslant\sqrt{n^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\cos2x_i\right)^2}=\sqrt{n^2-(n-2a)^2}\leqslant2\sqrt{a(n-a)},$$

其中当

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\arccos\sqrt{\frac{a}{n}}$$

时等式成立。于是，所求的最大值等于 $2\sqrt{a(n-a)}$。

18.9 注意，只能用有限多种方法把给定的 $n\in N$ 表为自然数的和，因此存在 n 的(可以不唯一)分解式 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$，其中 $m_1\leqslant m_2\leqslant\cdots\leqslant m_k$，使得乘积 $m_1m_2\cdots m_k$ 取到最大值 $f(n)$。因为 $4=2+2=2\cdot2$，所以可以约定，在分解式 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$ 中，每个 m_i 都不等于 4，$i=1,2,\cdots,k$。如果 $m_k>4$，则因为 $(m_k-2)\cdot2>m_k$，所以和为 n 的数 $m_1,m_2,\cdots,m_k-2$，2 的乘积将更大。因此 $m_i\leqslant3$，$i=1,2,\cdots,k$。其次，当 $n=1$ 时，n 的分解式是唯一的，所以 $f(1)=1$。当 $n>1$ 时，如果 $m_1=1$，则因为 $m_1+m_2>m_1m_2$，所以和为 n 的数 $m_1+m_2,m_3,\cdots,m_k$ 的乘积将更大。因此每个 m_i 都不等于 1，最后，在 m_i 中不能有三个(或三个以上)为 2，否则设 $m_1=m_2=m_3=2$，则和为 n 的数 3，3，$m_4,\cdots,m_k$ 的乘积将更大。于是，如果 $n>1$，则 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 中至多有两个 2，其他都是 3。又因为 2 与 2+2 不能表为若干个 3 的和，所以当 $n>1$ 时，$m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是唯一确定的。于是得到

$$f(1)=1,\ f(3l)=3^l,\ f(3l-1)=2\cdot3^{l-1}\quad与\quad f(3l+1)=4\cdot3^{l-1},$$

其中 $l\in N$。

18.10 我们证明：当 $m,n\in N$ 时，函数

$$f(m,n)=12^m-5^n$$

的绝对值的最小值等于 7。首先有 $f(1,1)=7$。其次，设对某些数 $m,n\in N$，有

$$f(m,n)<7.$$

因为 $f(m,n)$ 不能被 2，3，5 整除，所以有 $|f(m,n)|=1$。因此，$f(m,n)$ 被 13 除的余数为 1 或 12，因为 $12^m\equiv(-1)^m(\mathrm{mod}\,13)$，所以 12^m 被 13 除的余数，当 m 为偶数时为 1 而当 m 为奇数时为 12。设 $n=4k+r$，其中 $k\in Z^+$，$r\in\{0,1,2,3\}$。则

$$5^n=625^k\cdot5^r\equiv1^k\cdot5^r(\mathrm{mod}\,13).$$

由此得到，当 $r=0,1,2,3$ 时，5^n 被 13 除的余数依次为 1，5，12，8。于是，12^m-5^n 被 13 除的余数不能是 1 或 12，这表明，对任意 $m,n\in N$，都不满足 $|f(m,n)|<7$。

18.11 因为 S 是正数，所以 S 与 S^2 在同一点处取到最小值。又因为 $x^2+y^2+z^2=1$，所以

$$\begin{aligned}S^2&=\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2\\&=\frac{x^2}{2}\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)+\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}\right)+2\\&\geqslant x^2+y^2+z^2+2=3.\end{aligned}$$

其中推导后一不等式时用到平均值定理，而且当且仅当 $x=y=z$ 时等式成立，于是 S 的最小值为 $\sqrt{3}$。

18.12 不妨设 $a+b\geqslant c+d$，则

$$b+c\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c+d),$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中，当 $a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=2$，$d=0$ 时等式成立。于是，所求的最小值为 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$。

18.13 将函数 $F(x)$ 改写为

$$F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|.$$

当 $A=B=0$ 时，$F(x)$ 化为

$$f(x)=\sqrt{2}\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

在$\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]$上，函数$f(x)$在$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{5\pi}{8}$，$x_3=\frac{7\pi}{8}$处取到最大值$M_f=\sqrt{2}$。实际上，$\sqrt{2}$就是$M$的最小值。这只需证明，对不同时为0的任意$A$，$B$，有

$$\max_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}}F(x)\geqslant\max_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}}f(x)=M_f=\sqrt{2}.$$

下面分几种情形讨论。

(1) 当$A=0$，$B\neq0$时，显然有

$$\max_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}}F(x)=\max_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}}\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+B\right|=\sqrt{2}+|B|>\sqrt{2}.$$

(2) 当$A>0$，$B\geqslant0$时，有

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}.$$

(3) 当$A>0$，$B<0$时，再分两种情形，如果

$$|B|<\frac{9\pi}{8}A,$$

则

$$\frac{9\pi}{8}A+B>0,$$

于是

$$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2};$$

如果

$$|B|\geqslant\frac{9\pi}{8}A,$$

则

$$|B|>\frac{5\pi}{8}A,\quad\frac{5\pi}{8}A+B<0,$$

于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}.$$

(4) 当$A<0$，$B\leqslant0$时，

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}.$$

(5) 当$A<0$，$B>0$时，又分两种情形，如果

$$B<-\frac{5\pi}{8}A,$$

则

$$\frac{5\pi}{8}A+B<0,$$

于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2};$$

如果

$$B\geqslant-\frac{5\pi}{8}A,$$

则

$$B>-\frac{\pi}{8}A,$$

即

$$\frac{\pi}{8}A+B>0,$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}.$$

总之，上述不等式成立，证毕。

§19 函数的各种性质

19.1 由题中条件得到，

$$f(0)=c=1,\ f(x_1)=ax_1^4+bx_1^2+1,\ f'(x_2)=4ax_2^3+2bx_2=0,$$

解得，

$$b=-2ax_2^2 \quad 与 \quad ax_1^4-2ax_2^2x_1^2=ax_1^2(x_1^2-2x_2)=0.$$

由于数 x_1 与 a 都不为 0，所以 $x_1=x_2\sqrt{2}$，经检验，如果 $x_1=x_2\sqrt{2}$，则函数

$$f(x)=ax^4-2ax_2^2x^2+1$$

满足题中条件。于是，如果 $x_1\neq x_2\sqrt{2}$，则所说的函数不存在；而如果 $x_1=x_2\sqrt{2}$，则三数组 (a, b, c) 是 $(a, -2ax_2^2, 1)$，其中 a 是非零的任意数。

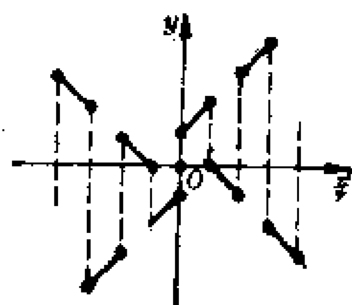


图 19.1

19.2 这样的函数不存在，否则，

$$f(0)-(f(0))^2\geqslant\frac{1}{4}$$

即

$$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0,$$

从而

$$f(0)=\frac{1}{2}.$$

同理可得

$$f(1)=\frac{1}{2},$$

从而 $f(0)=f(1)$，不可能。

19.3 首先，在不等式

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

中令 $x=y=0$，得到 $f(0)\leqslant 2f(0)$，即 $f(0)\geqslant 0$。于是由 $f(0)\leqslant 0$ 得到 $f(0)=0$。其次，对任意 $x\in R$，有

$$f(x)\geqslant f(x+(-x))-f(-x)=-f(-x)\geqslant x,$$

于是由题中条件 $f(x)\leqslant x$ 得到，$f(x)\equiv x$，$x\in R$。

19.4 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2<1$，并分两种情形：

(1) 如果 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(2) 如果 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，则由 $f(0)=f(1)$ 可知

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|$$
$$<(1-x_2)+(x_1-0)=1+(x_1-x_2)<\frac{1}{2}.$$

19.5 考虑函数 $g(x)=f(x)+f(ax)$。如果 $a=\frac{p}{q}$，其中 $p\in Z$，$q\in N$，则因为

$$g(x+q\pi)=f(x+q\pi)+f(ax+p\pi),$$

且 π 是函数 $f(x)$ 的周期，所以 $T=q\pi$ 是函数 $g(x)$ 的周期。下面证明，如果 a 是无理数，则 $g(x)$ 不是周期函数，注意，$g(0)=f(0)+f(0)=1$，如果对某个 $x_0\neq 0$，也有 $g(x_0)=1$，则 $\operatorname{tg}^2x_0=0$，而且 $\operatorname{tg}^2(ax_0)=0$，也即 $x_0=\pi k$ 且 $ax_0=\pi l$，其中 $k, l\in Z$。但是 $x_0\neq 0$，所以 $a=\frac{l}{k}$ 与 a 为无理数矛盾。于是，函数 $g(x)$ 仅在点 $x=0$ 处取值为 1。因此，它不是周期函数。

19.6 因为方程 $f(x)=g(x)$ 没有实数解，所以连续函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 对所有的 $x\in R$，要么只取正值，要么只取负值。因此，函数

$$f(f(x))-g(g(x))=f(f(x))-g(f(x))+f(g(x))-g(g(x))=h(f(x))+h(g(x)).$$

对于每个 $x\in R$ 都不等于 0。

19.7 (1) 设 $f(0)=y_0$，则函数 $y=f(x)$ 图象上的点 $(0, y_0)$ 经两次旋转（按同一方向，每次旋转 $\frac{\pi}{2}$）后，得到的点仍在 $y=f(x)$ 图象上，所以 $y=-y_0$，从而 $f(0)=0$。另一方面，设 $x=x_0$ 是方程 $f(x)=x$ 的解，即 $f(x_0)=x_0$，因此点 $(x_0, f(x_0))=(x_0, x_0)$ 在 $y=f(x)$ 图象上，依题中条件，点 (x_0, x_0) 经三次旋转后得到的点 $(x_0, -x_0)$ 仍然在 $y=f(x)$ 图象上，即有 $-x_0=f(x_0)=x_0$，所以 $x_0=0$。因此方程 $f(x)=x$ 有唯一解 $x=0$。

(2) 图 19.1 是具有题中所说性质的函数图象的一个例子。

19.8 (1) 设 $f=[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$是连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty。$$

倘若题中结论不成立，则存在 $N>0$，使得对任意 $n\in N$，都可找到 $x_n>n$，使得 $f(x_n)\in[0,N]$。因为函数 $f(x)$是连续的，即在闭区间$[0,N]$上是有界的。因此，存在 M，使得当 $f(x)\leqslant N$ 时，都有 $f(f(x))\leqslant M$。因此，对每个 $n\in N$，存在 $x_n>n$，使得 $f(f(x_n))\leqslant M$，与题中的条件

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$$

矛盾。所以

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty。$$

(2) 反例如下：取

$$f(x)\equiv\frac{1}{x},$$

则 $f=(0,+\infty)\to(0,+\infty)$。满足 $f(f(x))\equiv x$，从而

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty,$$

但是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0。$$

19.9 设题中所说的函数 $f(x)$存在，考虑连续函数

$$g(x)=f(x+1)-f(x)\quad 与\quad h(x)=f(x+1)+f(x)。$$

它们不可能同时为常量，否则

$$f(x)\equiv\frac{h(x)-g(x)}{2}$$

就成为常量了。不妨设 $h(x)$不是常量函数，即存在 x_1 与 x_2，使得 $h(x_1)<h(x_2)$。于是，存在有理数 $r\in[h(x_1),h(x_2)]$，由函数 $h(x)$的连续性，所以存在 $x_0\in[x_1,x_2]$使得 $h(x_0)=r$，于是$f(x_0+1)+f(x_0)=r$。因此，$f(x_0+1)$与 $f(x_0)$要么都是有理数，要么都是无理数，矛盾。

19.10 当 $x\neq y$ 时，由$(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3$ 得到

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant|x-y|^{\frac{1}{2}}。$$

从而由

$$\lim_{x\to y}|x-y|^{\frac{1}{2}}=0$$

得到

$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0。$$

因此，函数 $f(x)$在每个点 $x\in R$ 处都可微，而且 $f'(x)\equiv0$，因此，它只能是常量。

19.11 假设函数 $f(x)$ 满足题中条件。考虑定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $g(x)=f(x)+x-1$，因为 $f(x)$连续，所以 $g(x)$也连续，而且 $g(0)=-1$，$g(1)=1$。因此，存在 $c\in(0,1)$使得 $g(c)=0$，即 $f(c)=1-c$。根据拉格朗日中值定理(定理 33)，存在点 $a\in(0,c)$与 $b\in(c,1)$，使得

$$f'(a)=\frac{f(c)-f(0)}{c},$$

$$f'(b)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}。$$

因此，

$$f'(a)f'(b)=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{c}{1-c}=1。$$

19.12 首先证明，对任意 $k\in N$，$d=\frac{1}{k}$ 都满足题中条件。设 $f(x)$ 是满足题中条件的任意一个连续函数。因为 $f(0)=f(1)$，所以 $d=1$ 满足条件，考虑自然数 $k>1$，作函数

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{k}\right)-f(x),$$

它在区间 $\left[0,\ \frac{k-1}{k}\right]$ 上有定义。因为

$$g(0)=f\left(\frac{1}{k}\right)-f(0),$$

$$g\left(\frac{1}{k}\right)=f\left(\frac{2}{k}\right)-f\left(\frac{1}{k}\right),\ \cdots,$$

$$g\left(\frac{k-1}{k}\right)=f(1)-f\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

之和等于 0，所以其中既有非正的数，也有非负的数。因此，由函数 $g(x)$ 的连续性，存在 x_0，使得 $g(x_0)=0$，即

$$f\left(x_0+\frac{1}{k}\right)=f(x_0).$$

这表明，对每个 $k\in N$，$d=\frac{1}{k}$ 满足题中的条件。其次证明，任意一个不能表示成 $\frac{1}{k}(k\in N)$ 的 $d\in[0,1]$，都不满足题中条件，取 $k\in N$，使得 $kd<1<(k+1)d$。并考虑定义在区间 $[0,d]$ 上且满足等式

$$f(0)=0,\ f(1-kd)=-k,\ f(d)=1$$

的任一连续函数 $f(x)$，把这个函数延拓至区间 $[0,1]$ 上，使得对每个 $x\in[0,1]$ 都满足 $f(x)=f(x-d)+1$，这样得到的函数是连续的，并且

$$f(1)=f(1-d)+1=f(1-2d)+2=\cdots=f(1-kd)+k=0=f(0),$$

而对任意 $x\in[0,1-d]$，都有

$$f(x+d)=f(x)+1\neq f(x).$$

这表明，d 不满足题中的条件。

19.13 下面证明，如果 $k\in N$ 不是整数的平方，则 $f'(\sqrt{k})=0$，因为 $\sqrt{k}\notin Q$，故 $f(\sqrt{k})=0$。余下的是证明：极限

$$\lim_{x\to\sqrt{k}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}$$

存在且等于 0。取定任意的 $\varepsilon>0$，则只有有限个分数 $\frac{p}{q}$（从此恒设 $p\in Z$，$q\in N$，且 $(p,q)=1$）满足条件

$$0<q<\frac{1}{\varepsilon},\quad 与\quad \left|\frac{p}{q}-\sqrt{k}\right|<1.$$

因此，存在 $\delta\in(0,1)$，使得在区间 $I_\delta=(\sqrt{k}-\delta,\ \sqrt{k}+\delta)$ 中没有具有上述性质的分数。如果 $x=\frac{p}{q}\in I_\delta$ 是既约分数，则

$$q\geqslant\frac{1}{\varepsilon},\ 且\ \left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|<\sqrt{k}+(\sqrt{k}+\delta)<2\sqrt{k}+1.$$

因为 $kq^2-p^2\in Z\setminus\{0\}$，所以 $|kq^2-p^2|\geqslant1$，因此有

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{p}{q}-\sqrt{k}}\right|=\frac{1}{q^3}\frac{\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|}{\left|k^2-\frac{p^2}{q^2}\right|}=\frac{1}{q}\frac{\left|\sqrt{k}-\frac{p}{q}\right|}{|q^2k-p^2|}<\varepsilon(2\sqrt{k}+1).$$

又如果 $x\in I_\delta\setminus\{\sqrt{k}\}$ 是无理数，则 $f(x)=0$，且

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=0.$$

结论证毕。

19.14 设存在长为 d 的区间 $J\subset I$，使得对任意 $n\in N$，都有 $f^n(J)\cap J=\phi$，则对任意 $m,n\in N$，有

$$f^{n+m}(J)\cap f^m(J)=f^m(f^n(J)\cap J)=f^m(\phi)=\phi,$$

因此,集合 $f(J)$, $f^2(J)$, …, $f^n(J)$, …两两不交。另一方面,对任意 $n\in N$, 每个集合 $f^n(J)$是 I 中若干个的长度之和为 d 的区间之并,因此,它们不可能都是两两不交的,矛盾,结论证毕。

19.15 记 $h(x, y)=f(y)-f(x)$. 则函数 $h(x, y)$对变量 y 递增而对变量 x 递减,且对所有 $y>x$, 有 $h(x, y)>0$, 以及

$$g(x, y)\equiv\frac{h(x, x+y)}{h(x-y, x)}.$$

首先证明, 对每个 $x\in R$, $y>0$, 有 $g(x, y)<14$. 如果 $x-y\geqslant 0$ 或 $x+y\leqslant 0$, 则由条件, 有 $h(x, x+y)<2h(x-y, x)$, 此外, 对每个 $y>0$ 都有 $h(0, y)<2h(-y, 0)$. 因此剩下两种情形: (1) $x-y<0<x$; (2) $x<0<x+y$. 注意,对所有 $x\geqslant 0$, $y>0$, 有

$$h(x+y, x+3y)<6h(x, x+y). \qquad ①$$

事实上,有

$$h(x+y, x+2y)<2h(x, x+y),$$

$$h(x+2y, x+3y)<2h(x+y, x+2y)<4h(x, x+y),$$

由此得到,

$$h(x+y, x+3y)=h(x+y, x+2y)+h(x+2y, x+3y)<6h(x, x+y).$$

考虑情形(1):如果

$$x-y<0\leqslant x-\frac{y}{2},$$

则由式①可得

$$h(x, x+y)<6h\left(x-\frac{y}{2}, x\right)<6h(x-y, x)<14h(x-y, x);$$

如果
$$x-\frac{y}{2}<0<x,$$

则
$$x<y-x<x+y<3(y-x),$$

再由式①,便得到

$$h(y-x, x+y)<h(y-x, 3(y-x))<6h(0, y-x).$$

又因为 $h(x, y-x)<h(0, y-x)$, 所以得到

$$h(x, x+y)=h(x, y-x)+h(y-x, x+y)<7h(0, y-x)<14h(x-y, 0)<14h(x-y, x).$$

在情形(2), 有

$$h(x, 0)<2h(2x, x)<2h(x-y, x);$$

$$h(0, x+y)<2h(-x-y, 0)<2h(x-y, 0)=2h(x-y, x)+2h(x, 0)<6h(x-y, x).$$

因此, $h(x, x+y)<8h(x-y, x)$. 总之, 有 $h(x, x+y)<14h(x-y, x)$. 由此得到 $g(x, y)<14$. 其次证明:对所有 $x\in R$, $y>0$, 有

$$g(x, y)>\frac{1}{14}.$$

考虑递增函数 $f_1(x)=-f(-x)$, 并令

$$g_1(x, y)=\frac{f_1(x+y)-f_1(x)}{f_1(x)-f_1(x-y)},$$

因为

$$g(x, y)=\frac{1}{g_1(-x, y)},$$

所以当 $x=0$ 时对所有的 $y>0$ 而当 $x\neq 0$ 时对所有的 $y\in(0, |x|)$都有

$$\frac{1}{2}<g(x, y)<2.$$

于是，如上所证，对函数 $g_1(x, y)$，有 $g_1(x, y)<14$，其中 $x\in R$，$y>0$。由此得到

$$g(x, y)=\frac{1}{g_1(x, y)}>\frac{1}{14}.$$

结论证毕。

§20 函数方程

20.1 在函数 $f(x)$ 满足的恒等式中取 $y=1$，得到

$$f(x)\equiv\frac{f(x)+f(1)}{x+1}\ (x\neq-1).$$

即 $xf(x)\equiv f(1)$。当 $x=0$ 时便得到 $f(1)=0$。这表明，当 $x\notin\{-1, 0\}$ 时，$f(x)=0$。其次，在原恒等式中代入 $y=0$, $x=2$，得到

$$f(0)=\frac{f(2)+f(0)}{2},$$

由此得到，

$$f(0)=f(2)=0.$$

最后，再代入 $y=0$, $x=-1$，得到 $f(0)=-f(-1)-f(0)$，从而 $f(-1)=2f(0)=0$。这样便证明，函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(x)\equiv0$, $x\in R$。

20.2 在题中的恒等式中令 $x=y=1$，则得 $2f(1)=2(f(1))^2$，即 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$。分别考察这两种情形如下：

(1) 如果 $f(1)=0$，则在恒等式中令 $y=1$，便得到 $f(x)\equiv0$。

(2) 如果 $f(1)=1$，则仍令 $y=1$ 得到

$$f(x)+x\equiv(x+1)f(x),\quad 即\quad x(f(x)-1)\equiv0$$

因此对任意 $x\neq0$，都有 $f(x)=1$，于是，关于函数 $f(x)$ 有两种可能：要么 $f(x)\equiv0$，要么

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq0\ 时,\\ a, & 当\ x=0\ 时,\end{cases}\quad 其中\ a\in R.$$

经验证，它们满足题中条件。

20.3 在恒等式中令 $x=y$ 得到

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}.$$

于是

$$\sin x+\cos y\equiv\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{\sin y+\cos y}{2}+g(x)-g(y).$$

即

$$g(x)-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\equiv g(y)-\frac{1}{2}\sin y+\frac{1}{2}\cos y.$$

记

$$h(x)=g(x)-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x,$$

则对任意 $x, y\in R$ 都有 $h(x)\equiv h(y)$。这表明，$h(x)\equiv c$。因此，满足题中条件的函数对是

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2},\quad g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+c.$$

其中 c 为常数。

20.4 设 $f(1)=t$，如果 $f(m)=n$，则

$$f(2n)=f(f(m)+f(m))=2m \qquad ①$$

特别地，当 $m=1$ 时，$n=t$ 并且

$$f(2t)=2. \qquad ②$$

我们证明 $t=1$，不然的话，设

$$t=b+1,\ b\in N, \quad ③$$

又设 $f(b)=c,\ c\in N$，则 $f(2c)=2b$，并且

$$2c+2t=f(f(2c)+f(2t))=f(2b+2)=f(2t)=2,$$

即 $t+c=1$，矛盾，于是 $f(1)=1$。如果

$$f(n)=n, \quad ④$$

则 $f(n+1)=f(f(n)+f(1))=n+1$；所以④对一切自然数 n 成立，特别地

$$f(1988)=1988.$$

20.5 在题中关于函数 $f(n)\in M$ 的恒等式中，取 $n=m=0$，得到 $(f(0))^2=2f(0)$。但 $f(0)\neq 0$，因此 $f(0)=2$。其次，在恒等式中取 $n=1$，得到

$$f(n)f(1)\equiv f(n+1)+f(n-1),\ n\in Z.$$

如果给出函数 $f(n)$ 在点 $n=0$ 与 $n=1$ 上的值，则由上面的恒等式可以唯一确定 $f(2)$ 与 $f(-1)$ 的值，然后又可确定 $f(3)$ 与 $f(-2)$ 的值，等等，即可对每个 $n\in Z$ 确定 $f(n)$ 的值，于是，因为 $f(0)=2$，且 $f(1)=\frac{5}{2}$（在(1)中）或 $f(1)=\sqrt{3}$（在(2)中），所以函数 $f(n)$ 由题中条件唯一确定，下面证明，函数

$$f(n)=2^n+2^{-n} \quad 与 \quad f(n)=2\cos\frac{\pi n}{6}$$

分别满足(1)与(2)的全部条件，事实上，有

(1) $f(0)=2^0+2^0\neq 0,\quad f(1)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$，

$$f(n)f(m)=(2^n+2^{-n})(2^m+2^{-m})=(2^{n+m}+2^{-n-m})(2^{n-m}+2^{m-n})=f(n+m)+f(n-m),$$

其中，$n,\ m\in Z$，

(2) $f(0)=2\cos 0\neq 0,\ f(1)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$。

$$f(n)f(m)=2\cos\frac{\pi n}{6}\cos\frac{\pi m}{6}=2\cos\frac{\pi(n+m)}{6}$$
$$+2\cos\frac{\pi(n-m)}{6}=f(n+m)+f(n-m),$$

其中，$n,\ m\in Z$。

20.6 在关于 $f(x)$ 的恒等式中令 $m=0$，得到 $2f(n)\equiv f(3n),\ n\in Z^+$。当 $n=m=0$ 时，有 $f(0)=0$。其次，在恒等式中令 $n=m$，得到 $f(2n)+f(0)\equiv f(3n)$，即 $f(2n)\equiv f(3n)$。于是，一方面对任意 $m\in Z^+$ 有

$$f(4m)=f(6m)=f(9m),$$

而另一方面，在原恒等式中取 $n=3m$，得到

$$f(4m)+f(2m)=f(9m).$$

因此，对任意 $m\in Z^+$，都有 $f(2m)=0$。于是，对任意 $n\in Z^+$，都有

$$f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0.$$

也就是说，只有当 $f(n)\equiv 0$ 时才能（且实际上也）满足原恒等式。

20.7 在题中两个恒等式中都令 $x=y=0$，得到

$$f(0)=2f(0)g(0) \quad 与 \quad g(0)=(g(0))^2-(f(0))^2.$$

因为

$$g(0)\neq\frac{1}{2}$$

否则由第二个等式得

$$(f(0))^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0.$$

所以由第一个等式得到，$f(0)=0$，从而由第二个等式得到 $g(0)=1$ 或 $g(0)=0$。但是后一情形是不可能的，否则在第一个恒等式中取 $y=0$ 便有

$$f(x)\equiv f(x)g(0)+g(x)f(0)\equiv 0,$$

与 $f(x)$ 不是常数的假设矛盾。于是唯一可能的是 $f(0)=0$，$g(0)=1$。函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 即是一例。

20.8 在原恒等式中令 $y=1$，便得到恒等式

$$f(x)\equiv f(x)f(1)-f(x+1)+1 \qquad x\in Q$$

即

$$f(x+1)\equiv f(x)+1.$$

从而，对所有 $x\in Q$，$n\in Z$，有 $f(x+n)=f(x)+n$。因此，

$$f(n)=f(1)+n-1=n+1.$$

其次，在原恒等式中取 $x=\frac{1}{n}$，$y=n$，$n\in Z$，得到

$$f\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1,$$

从而

$$2=f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{1}{n}\right)-n+1$$

即

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}.$$

最后，取 $x=p$，$y=\frac{1}{q}$，$p\in Z$，$q\in N$，得到

$$f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+1.$$

由此得到，

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=(p+1)\left(\frac{1}{q}+1\right)-\frac{1}{q}-p=\frac{p}{q}+1.$$

于是，只有函数 $f(x)=x+1$，满足题中所有条件。

20.9 首先，设 $n\leqslant 100$ 与 $n+11>100$，即 $90\leqslant n\leqslant 100$。于是，

$$f(n)=f(f(n+11))=f(n+11-10)=f(n+1).$$

因此，

$$f(90)=f(91)=\cdots=f(100)=f(101)=91.$$

现在设 $n<90$。取 $m\in N$，使得 $90\leqslant n+11m\leqslant 100$。则有

$$f(n)=f^2(n+11)=\cdots=f^{m+1}(n+11m)=f^m(f(n+11m))=f^m(91)=91.$$

这就证明，对任意 $n\leqslant 100$，都有 $f(n)=91$。

20.10 (1) 设 $f(1)=a$，则由题目条件③，当 $x=1$ 时，有 $af(a+1)=1$，即

$$f(a+1)=\frac{1}{a}.$$

再令 $x=a+1$，则由条件③得到，

$$f(a+1)f\left(f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right)=1,$$

即

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a,$$

因此

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=f(1).$$

由条件①得到，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1.$$

解得 $$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

如果 $$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

则 $$1<a=f(1)<f(1+a)=\frac{1}{a}<1,$$

矛盾。因此，

$$f(1)=a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(2) 记 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，并且设 $f(x)=\frac{a}{x}$。则当 $0<x_1<x_2$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1x_2}>0,$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$。因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增，即 $f(x)$ 满足条件①；由于

$$f(x)+\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2x}>0,$$

所以 $f(x)$ 满足条件②；最后，由于

$$f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{\frac{a}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{a^2}{a+1}=1,$$

即 $f(x)$ 满足条件③，所以函数

$$f(x)=\frac{a}{x}$$

合乎题中三个条件。

20.11 首先证明，$g(n)\equiv h(n)$，$n\in N$。由此及条件(3)即可得到：

$$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1,\ n\in N,$$

设有某个 $n\in N$，使 $g(n)\neq h(n)$。因为 $f(n)\geqslant 1$，所以对任意 $n\in N$，有

$$h(n)=g(n)+1-f(n)\leqslant g(n),$$

于是 $h(n)<g(n)=k$。根据条件 (2)，存在 $n_1,\cdots,n_{k-1}\in N$，使得当 $i=1,\cdots,k-1$ 时，$g(n_i)=i$，从而 $h(n_i)<k$。于是 $h(n_1),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 这 k 个数都属于集合 $\{1,\cdots,k-1\}$，由狄利克雷原理（定理1），$h(n_1),h(n_2),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 中必有两个相等，与条件(1)矛盾，结论证毕。

20.12 设数列 $n_1=2,n_2=3,n_3=5,\cdots$ 依次递增且取遍所有不是整数平方的自然数，令

$$n_{k,m}=(n_k)^{2^m},\ \text{其中}\ k\in N,\ m\in Z^+,$$

则 $n_{k,m+1}=(n_{k,m})^2$，且每个 $n>1$ 都对应唯一一个数对 k,m，使得 $n=n_{k,m}$。定义函数 $f(n)$ 如下：

$$f(1)=1,\ f(n_{k,m})=\begin{cases}n_{k+1,m}, & \text{当}\ k\ \text{为奇数时},\\ n_{k-1,m+1}, & \text{当}\ k\ \text{为偶数时},\end{cases}$$

其中 $k\in N$，$m\in Z^+$，则 $f(f(n))\equiv n^2$，$n\in N$。

20.13 (1) 例如，函数 $f(n,m)=n$，$n,m\in Z$ 即满足题中所有的条件。

(2) 设结论不正确，即对某个 $k\in Z$，存在满足题中条件的某个函数 $f(n,m)$，它的每个值都不超过 k（不小于 k 的情形与此相仿），则在 $f(n,m)(n,m\in Z)$ 的值中总有最大的，设其最大值为 $l=f(n_0,m_0)$，于是所有 $f(n_0\pm1,m_0)$，$f(n_0,m_0\pm1)$ 都等于 l，否则，有

$$f(n_0,m_0)=\frac{1}{4}(f(n_0-1,m_0)+f(n_0+1,m_0)+f(n_0,m_0-1)+f(n_0,m_0+1))<l.$$

反复应用这一结果，得到：对任意 $n,m\in N$，有

$$\begin{aligned}l&=f(n_0,m_0)=f(n_0\pm1,m_0)=f(n_0\pm2,m_0)=\cdots=f(n_0\pm n,m_0)\\&=f(n_0\pm n,m_0\pm1)=f(n_0\pm n,m_0\pm2)=\cdots=f(n_0\pm n,m_0\pm m).\end{aligned}$$

因此，$f(n,m)\equiv l$，与题中条件矛盾。

20.14 点$(n, m)\in S$依其和数$n+m$为偶数或奇数而分别称为偶点或奇点。设万有函数$g(n, m)$存在，则其反函数$g^{-1}(n, m)$也是万有的，定义函数$f(n, m)$如下：当$(n, m)\in S$时，

$$f(n, m)=\begin{cases} g(n, m), & \text{如果}(n, m)\text{为偶点}, \\ g^{-1}(n, m), & \text{如果}(n, m)\text{为奇点}. \end{cases}$$

注意，点$g(n, m)$，$g^{-1}(n, m)$都与点(n, m)有不同的奇偶性，因此，对任意点$(n, m)\in S$，有

$$f(f(n, m))=\begin{cases} g^{-1}(g(n, m))=(n, m), & \text{如果}(n, m)\text{是偶点}, \\ g(g^{-1}(n, m))=(n, m), & \text{如果}(n, m)\text{是奇点}. \end{cases}$$

这就证明了恒等式

$$f(f(n, m))\equiv(n, m), \qquad (n, m)\in S.$$

由此即知，函数$f(n, m)$是可逆的。为了证明函数是万有的，只需注意，函数$g(n, m)$与$g^{-1}(n, m)$都是万有的。

20.15 设数对(n, m)满足$m\leqslant n$，$nm(m+n)\neq0$，且

$$f_m(x, y)f_n(x, y)\equiv f_{m+n}(x, y), \; x, y\in R, \; xy(x+y)\neq0.$$

其中

$$f_k(x, y)=\frac{x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k}{k}, \; k\in Z, \; k\neq0. \qquad ①$$

首先，当$k=1$时，有

$$f_1(x, y)\equiv0, \quad x, y\in R.$$

其次，对k的其他不同取值范围，给出三个极限公式。如果$k<0$，则对固定的$y=y_0\neq0$，有

$$\lim_{x\to\infty}x^k=\lim_{x\to\infty}(x+y_0)^k=0.$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}f_k(x, y_0)=\frac{1}{k}y_0^k. \qquad ②$$

如果$k\in N$是偶数，则

$$f_k(x, y)\equiv\frac{1}{k}\left(2x^k+2y^k+\sum_{i=1}^{k-1}c_k^ix^iy^{k-i}\right),$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x, y_0)}{x^k}=\frac{2}{k}. \qquad ③$$

最后，如果$k\in N$是奇数，且$k\neq1$，则

$$f_k(x, y)=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}c_k^ix^iy^{k-i},$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x, y_0)}{x^{k-1}}=-y_0, \qquad ④$$

下面证明，除提示中的数对$(2, 3)$与$(2, 5)$外，只有$(-1, 3)$满足题中条件，分几种情形讨论。

(1) $m, n\in N$都是偶数，则由式③及f所满足的恒等式，可得

$$\frac{2}{m+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x, y_0)}{x^m}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x, y_0)}{x^n}=\frac{4}{mn},$$

由此得到，

$$\frac{m+n}{2}=\frac{mn}{4},$$

即

$$\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)=1.$$

从而

$$\frac{m}{2}=\frac{n}{2}=2,$$

所以$m=n=4$，但这是不可能的，因为

$$f_4(1,1)f_4(1,1)=\frac{(2+2^4)^2}{4^2}=\frac{81}{4}\neq\frac{129}{4}=\frac{2+2^8}{8}=f_8(1,1)=f_{4+4}(1,1).$$

(2) $m,\ n\in N$ 都是奇数，则由式④及 f 所满足的恒等式，当 $m,\ n\neq 1$ 时，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^{m+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,\ y_0)f_n(x,\ y_0)}{x^{m+n}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{f_m(x,\ y_0)}{x^{m-1}}\cdot\frac{f_n(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=0.$$

因为 $f_1(x,\ y)\equiv 0$，所以上式对 $m=n=1$ 也成立，但 $m+n\in N$ 是偶数，所以由式③，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^{m+n}}=\frac{2}{m+n}\neq 0,$$

矛盾。

(3) $m,\ n\in N$ 有一个是偶数(记为 p)而另一个是奇数(记为 q)。如果 $q=1$，则 $f_q(1,\ 1)=0$，且由题中的恒等式，

$$f_{p+q}(1,1)=\frac{2-2^{p+q}}{p+q}=0.$$

从而 $2-2^{p+q}=0$，但 $p+q>1$，所以不可能。于是 $q>1$。因此由式③与④得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,\ y_0)f_q(x,\ y_0)}{x^{p+q-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,\ y_0)}{x^p}\lim_{x\to\infty}\frac{f_q(x,\ y_0)}{x^{q-1}}=-\frac{2y_0}{p},$$

因为 $p+q$ 是奇数，所以由式④，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{p+q}(x,\ y_0)}{x^{p+q-1}}=-y_0,$$

从而 $p=2$。由恒等式得到，

$$\frac{3(2-2^q)}{q}=f_2(1,1)f_q(1,1)=f_{2+q}(1,1)=\frac{2-2^{2+q}}{2+q},$$

从而

$$\frac{3(2+q)}{1-2^{q-1}}=q(1-2^{q+1}),\quad 即\quad 3+q=(6-q)2^{q-2},$$

因此，$q<6$。因为 q 是奇数，且 $q>1$，所以 $q\in\{3,\ 5\}$，这就是提示中所说的情形。容易验证，数对 $(2,\ 3)$ 与 $(2,\ 5)$ 确实满足题中的要求。

(4) $m<0$，且 $n\in N$ 是偶数。因为 $n>m+n$，所以不论 $m+n$ 的符号和奇偶性如何，都有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^n}=0,$$

另一方面，由式②与③，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,\ y_0)f_n(x,\ y_0)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}f_m(x,\ y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,\ y_0)}{x^n}=\frac{2y_0^m}{mn}\neq 0.$$

(5) $m<0$，且 $n\in N$ 是奇数。如果 $n=1$，则 $f_n(1,\ 1)=0$，由恒等式与式②得到，

$$f_{m+n}(1,\ 1)=\frac{2+(-1)^{m+n}2^{m+n}}{m+n}=0.$$

但这是不可能的，因为 $m+n<0$，因此 $n\neq 1$，从而 $n>1$。于是，一方面，由式②与④得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,\ y_0)f_n(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}f_m(x,\ y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\frac{-y_0^{m+1}}{m}\neq 0.$$

另一方面，因为 $m+n<n$，且 $n-1\in N$ 是偶数，所以由(4)及式③得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\begin{cases}0, & 当\ m+n<n-1\ 时,\\ \dfrac{2}{n-1}, & 当\ m+n=n-1\ 时.\end{cases}$$

由此可见，$m+n=n-1$ 且

$$\frac{-y^{m+1}}{m}=\frac{2}{n-1},$$

即 $m=-1$ 且 $1=\frac{2}{n-1}$，即 $m=-1$ 且 $n=3$。由于

$$f_{-1}(x,y)f_3(x,y)\equiv\frac{x^{-1}+y^{-1}-(x+y)^{-1}}{-1}\cdot\frac{x^3+y^3-(x+y)^3}{3}$$
$$\equiv\frac{y(x+y)+x(x+y)-xy}{-xy(x+y)}\cdot\frac{-3x^2y-3xy^2}{3}\equiv x^2+y^2+xy$$
$$\equiv\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}\equiv f_2(x,y)\equiv f_{-1+3}(x,y).$$

所以$(-1,3)$满足题中条件。

(6) $m,n<0$，则由式②，有

$$\lim_{x\to\infty}f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)=\frac{y_0^{m+n}}{mn}$$

与

$$\lim_{x\to\infty}f_{m+n}(x,y_0)=\frac{y_0^{m+n}}{m+n}.$$

因为 $mn>0$，$m+n<0$，所以

$$\frac{y_0^{m+n}}{mn}\neq\frac{y_0^{m+n}}{m+n},$$

从而 $f_m(x,y)f_n(x,y)\neq f_{m+n}(x,y)$，矛盾。

于是，所有满足条件的数对(m,n)是$(2,3)$，$(2,5)$与$(-1,3)$。

20.16 在第一个恒等式中取 $x=y=0$ 与 $x=y=1$，则得到 $f(0,z)=1$ 与 $f(1,z)=1$。其次，取 $x=y=-1$，又得到

$$1=f(1,z)=f(-1,z)f(-1,z)=(f(-1,z))^2,$$

因此，$f(-1,z)=1$。同理，由第二个恒等式可得 $f(z,0)=f(z,1)=f(z,-1)=1$，由此得到

$$f(0,0)=1,\ f(0,z)f(z,0)=1.$$

下面证明，恒等式对非零的 x 与 y 成立。当 $x\neq0$ 时有

$$1=f(1,z)=f(x,z)f\left(\frac{1}{x},z\right),$$

因此，

$$f(x,z)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{x},z\right)},$$

其次，我们得到

$$1=\frac{1}{f(x,1-x)}=f\left(\frac{1}{x},1-x\right)=f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}x\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}\right)f\left(\frac{1}{x},x\right).$$

但由于

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{1-x}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{1-x}\right)\cdot1$$
$$=f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{1-x}\right)f\left(\frac{1}{x},-1\right)=f\left(\frac{1}{x},1-\frac{1}{x}\right)=1.$$

所以

$$f\left(\frac{1}{x},x\right)=1,$$

于是，有

$$1=f(x,1)=f\left(x,\frac{1}{x}\right)=f(x,x)=f(x,x)f(x,-1)=f(x,-x).$$

即 $f(x,x)=f(x,-x)=1$，最后，当 $x\neq0$，$y\neq0$ 时，有

$$f(x,y)=f(x,y)f\left(\frac{1}{y},y\right)=f\left(\frac{x}{y},y\right)=f\left(\frac{x}{y},y\right)f\left(\frac{x}{y},\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{x}{y},x\right)$$

$$=f\left(\frac{x}{y}, x\right)f\left(\frac{1}{x}, x\right)=f\left(\frac{1}{y}, x\right)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{y}, x\right)}.$$

因此，
$$f(x, y)f(y, x)=1.$$

20.17 如果函数 $f(x)$满足第一个恒等式，则

$$f(xy+x+y)\equiv f(xy)+f(x+y)\equiv f(xy)+f(x)+f(y), \ x, y\in R,$$

即 $f(x)$也满足第二个恒等式。现在设函数 $f(x)$满足第二个恒等式，在其中令 $y=u+v+uv$，得到

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)\equiv f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv)$$

对 $f(u+v+uv)$应用恒等式，上式化为

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv). \quad ①$$

在恒等式①中交换变量 x, u 的位置得到

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv), \quad ②$$

由恒等式①与②，得到

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv)\equiv f(xv)+f(xu+uv+xuv). \quad ③$$

在恒等式③中令 $x=1$，便有

$$f(uv)+f(u+v+uv)\equiv f(v)+f(u+2uv),$$

即
$$f(uv)+f(u)+f(v)+f(uv)\equiv f(v)+f(u+2uv).$$

从而
$$f(u)+2f(uv)\equiv f(u+2uv). \quad ④$$

在恒等式④中令 $u=0$，得到 $f(0)=3f(0)$，因此

$$f(0)=0, \quad ⑤$$

在恒等式④中令 $v=-1$，得到 $f(-u)\equiv f(u)+2f(-u)$，因此，

$$f(-u)\equiv -f(u), \quad ⑥$$

在恒等式④中令 $v=-\frac{1}{2}$，得到

$$f(0)\equiv f(u)+2f\left(-\frac{u}{2}\right).$$

由式⑤与⑥，得到

$$f(u)\equiv 2f\left(\frac{u}{2}\right), \quad 即 \quad f(2u)\equiv 2f(u), \quad ⑦$$

由恒等式⑦，④，有

$$f(u+2uv)\equiv f(u)+f(2uv),$$

在此方程中令 $2v=t$，得到

$$f(u+ut)\equiv f(u)+f(ut). \quad ⑧$$

于是，当 $x\neq 0$ 时，由恒等式⑧，有

$$f(x+y)\equiv f\left(x+x\cdot\frac{y}{x}\right)\equiv f(x)+f\left(x\cdot\frac{y}{x}\right)\equiv f(x)+f(y).$$

而当 $x=0$ 时，由式⑤，上一恒等式成立，这就证明，函数 $f(x, y)$满足第一个恒等式。

20.18 首先证明，对任意 $k>0$，都有

$$f(x^k)\equiv kx^{k-1}f(x), \quad 其中 x>1.$$

证明分三步进行。

(1) 设 $k\in N$，如果 $k=1$，则有 $f(x^1)=1\cdot x^0\cdot f(x)$。设恒等式对某个 $k\in N$ 成立。因为

$$f(x^{k+1})\equiv f(x^k\cdot x)\equiv x^k f(x)+xf(x^k)\equiv x^k f(x)+xkx^{k-1}f(x)\equiv(k+1)x^k f(x).$$

所以恒等式对 $k+1$ 也成立。于是，恒等式对任意 $k\in N$ 成立。

(2) 设 $k\in Q$, $k>0$，即 $k=\frac{p}{q}$，其中 $p, q\in N$。由(1)有

$$f(x^p)\equiv px^{p-1}f(x);$$

$$f((x^{\frac{p}{q}})^q)\equiv q(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}f(x^{\frac{p}{q}});$$

这两个恒等式的左端相等，所以有

$$f(x^{\frac{p}{q}})\equiv\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}f(x).$$

(3) 设 $k\in R$, $k>0$, 则取正有理数列 $k_1, k_2, \cdots$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}k_n=k.$$

因为函数 $f(x)$连续，所以对任意 $x>1$, 有

$$f(x^k)=\lim_{n\to\infty}f(x^{k_n})=\lim_{n\to\infty}k_nx^{k_n-1}f(x)=kx^{k-1}f(x).$$

其次，由已证的恒等式容易求出函数 $f(x)$的表达式。事实上，记 $t=\ln x$, 即 $x=e^t$, 则得到

$$f(x)=f(e^t)=te^{t-1}f(e)=\ln x\cdot\frac{x}{e}f(e).$$

另一方面，对任意 $c\in R$, 函数 $f(x)=c\ln x$ 满足题中条件。

20.19 (1) 首先证明，函数 $f(x)$是$R\to R$的单射，即对任意的 $x, y\in R$, $x\neq y$, 都有 $f(x)\neq f(y)$。事实上，设对 $x, y\in R$, $u=f(x)=f(y)$, 则

$$x=f^3(x)=f^2(u)=f^3(y)=y.$$

其次证明，$f(x)$是严格单调的。否则存在 $x_1<x_2<x_3$, 使得要么

$$f(x_1)<f(x_2),\ f(x_2)>f(x_3),$$

要么

$$f(x_1)>f(x_2),\ f(x_2)<f(x_3).$$

无论在那种情形，都有 $u\in R$, 它既介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$之间，也介于 $f(x_2)$与 $f(x_3)$ 之间。这样，由于 $f(x)$是连续函数，对区间$[x_1, x_2]$与$[x_2, x_3]$分别应用连续函数的介值定理(定理 27)便知：存在 $x_4\in(x_1, x_2)$与 $x_5\in(x_2, x_3)$, 使得 $f(x_4)=u$ 与 $f(x_5)=u$, 不可能。最后证明，$f(x)=x$, $x\in R$。否则，有 $x_0\in R$ 使 $f(x_0)\neq x_0$。不妨设 $f(x_0)>x_0$, 由于 $f(x)$要么是严格递增的，要么是严格递减的。在前一情形下，有

$$x_0<f(x_0)<f(f(x_0))=f^2(x_0)<f(f^2(x_0))=f^3(x_0)=x_0,$$

而在后一情形下，有

$$f(x_0)>f^2(x_0)$$

从而

$$x_0=f(f^2(x_0))>f^2(f^2(x_0))=f(x_0)>x_0,$$

总之都不可能。

(2) 函数

$$g(x)=\begin{cases}x, & 如果 x\notin\{1, 2, 3\},\\ 2, & 如果 x=1,\\ 3, & 如果 x=2,\\ 1, & 如果 x=3,\end{cases}\qquad x\in R.$$

满足题中所有条件。

20.20 设 $f(x)$满足题中条件。考虑函数 $g(x)=f(x)-x$。首先证明，对任意 $k\in Z^+$, 有

$$f(x+kg(x))\equiv x+(k+1)g(x).\quad x\in R.$$

当 $k=0$ 时，恒等式 $f(x)\equiv x+g(x)$成立。设恒等式对某个 $k\in N$ 成立，即有

$$f(x+kg(x))\equiv x+(k+1)g(x),$$

由此知

$$f^{-1}(x+(k+1)g(x))\equiv x+kg(x),$$

由题中条件可知，对所有 $x\in R$, 有

$$\begin{aligned}f(x+(k+1)g(x))&\equiv 2(x+(k+1)g(x))-f^{-1}(x+(k+1)g(x))\\&\equiv 2(x+(k+1)g(x))-(x+kg(x))\equiv x+(k+2)g(x).\end{aligned}$$

即恒等式对 $k+1$ 也成立，由此还推知，对所有 $k\in N$ 有恒等式

$$f^{-1}(x+kg(x))\equiv x+(k-1)g(x),\ x\in R. \quad ①$$

同理可证,对所有 $k\in Z^+$ 有

$$f^{-1}(x-(k-1)g(x))\equiv x-kg(x),\ x\in R.$$

由此得到,对所有 $k\in N$,有

$$f(x-kg(x))\equiv x-(k-1)g(x),\ x\in R. \quad ②$$

其次,注意,函数 $f(x)+f^{-1}(x)\equiv 2x$ 是严格递增的,而由 $f(x)$ 单调可逆可知,$f(x)$ 是严格单调的。由于 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 同增减,所以 $f(x)$ 是严格递增的,从而,当 k 是非零整数时,$f^k(x)$ 也是严格递增的。最后证明,$g(x)$ 是常量函数。否则,存在 $x_1,x_2\in R$,$x_1\neq x_2$ 使得 $g(x_1)<g(x_2)$。由此,存在 $k\in N$ 使得

$$k(g(x_2)-g(x_1))>|x_2-x_1|>0,$$

即

$$x_1-kg(x_1)>x_2-kg(x_2)$$

或

$$x_2+kg(x_2)>x_1+kg(x_1).$$

在前一情形下,由函数 $f^{-k}(x)$ 的严格递增性得到

$$f^{-k}(x_1-kg(x_1))>f^{-k}(x_2-kg(x_2)).$$

由式②,当 $i=1,2$ 时,有

$$f^{-k}(x_i-kg(x_i))\equiv f^{-k+1}(x_i+(-k+1)g(x_i))\equiv f^{-k+2}(x_i+(-k+2)g(x_i))$$
$$\equiv\cdots\equiv f^{-1}(x_i-g(x_i))\equiv x_i$$

因此推得 $x_1>x_2$,与 $x_2-x_1>0$ 矛盾。同理可证,后一情形也不可能。这就证明,$g(x)\equiv c$。从而

$$f(x)\equiv x+c,\ x\in R.$$

注意,对任意 $c\in R$,函数 $f(x)\equiv x+c$ 满足题中条件。

20.21 由题中条件得到,对任意 $y\neq 0$,有

$$f'(x)\equiv\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y},\ x\in R.$$

上式右端对 x 可导,所以

$$f''(x)\equiv\frac{f'(x+y)-f'(x-y)}{2y}\equiv\frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y)-f(x)}{2y}-\frac{f(x-2y)-f(x)}{-2y}\right]$$
$$\equiv\frac{f(x+2y)+f(x-2y)-2f(x)}{4y^2}.$$

上式仍然对 x 可导,因此

$$f'''(x)\equiv\frac{f'(x+2y)+f'(x-2y)-2f'(x)}{4y^2}$$
$$\equiv\frac{1}{4y^2}\left[\frac{f(x+4y)-f(x)}{4y}+\frac{f(x-4y)-f(x)}{-4y}-\frac{f(x+4y)-f(x-4y)}{4y}\right]\equiv 0.$$

于是,所求的函数必定满足 $f'''(x)\equiv 0$,因此

$$f''(x)\equiv f''(0),\ f'(x)\equiv f''(0)x+f'(0),$$
$$f(x)\equiv\frac{f''(0)}{2}x^2+f'(0)x+f(0).$$

注意,所有函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,其中 $a,b,c\in R$,都具有题中所说的性质。

20.22 在题中的恒等式中令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=2f(0)$,即 $f(0)=0$。对任意 $x\in R$,由恒等式

$$f(x+y)-f(x)\equiv f(y)+2xy \quad y\in R$$

得到

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\equiv\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+2xy}{y}$$
$$=2x+\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=2x+f'(0).$$

因此,所求的函数满足

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=x^2+f'(0)x.$$

注意，对每个 $a\in R$，函数 $f(x)=x^2+ax$ 满足题中的恒等式。

20.23 在关于函数 $f(x)$ 的恒等式中令 $x=y=0$ 得到 $f(0)(f(0)-1)=0$，即 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$，但如果 $f(0)=0$，则由恒等式 $f(0)f(x)\equiv f(x)$，$x\in R$ 得到，$f(x)\equiv 0$，与题中条件矛盾。因此，$f(0)=1$。可以证明，函数 $f(x)$ 在整个数轴上处处可微，事实上，对任意 $x\in R$，有

$$f(x+y)\equiv f(x)f(y)\qquad y\in R.$$

由此得到

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\equiv f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}.$$

注意，上式左端的极限存在，而且等于

$$f'(x)=f(x)f'(0).$$

设 $f'(0)=a$，则 $f'(x)=af(x)$。这个函数可以任意多次求导。事实上，有

$$f''(x)=af'(x)=a^2f(x),\ f'''(x)=a^2f'(x)=a^3f(x),$$

等等。于是，对每个 $n\in N$，都有 $f^{(n)}(x)=a^nf(x)$。

第六章　多项式

§21　多项式的根

21.1　根据韦达定理(定理55),

$$x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=\frac{-1}{2p^2},$$

以及两个数的算术平均值与几何平均值之间的不等式(定理6),得到

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2(2(x_1+x_2)^2-x_1x_2)=p^4+\frac{1}{p^2}\left(2p^2+\frac{1}{2p^2}\right)$$

$$=p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geqslant 2+2\sqrt{p^4\cdot\frac{1}{2p^4}}=2+\sqrt{2},$$

这就是所要证明的。

21.2　当且仅当多项式 y^2+py+q(其中 $y=x^2$)有两个非负实根,即 p 与 q 满足 $p^2\geqslant 4q$, $q\geqslant 0$, $p\leqslant 0$ 时,多项式 x^4+px^2+q 有 4 个实根。如果原多项式有 4 个实根(记作 $-x_1$, $-x_2$, x_1, x_2, 不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant 0$),则当且仅当方程组

$$-2x_2=-x_1+x_2,\quad x_1^2+x_2^2=-p,\quad x_1^2x_2^2=q$$

相容(见韦达定理及其逆定理),即 $q=0.09\,p^2$ 时,它们组成算术级数。因此,所求数对 p, q 应当满足 $p\leqslant 0$, $q=0.09\,p^2$(由后一等式可以得到 $p^2\geqslant 4q$ 和 $q\geqslant 0$)。

21.3　根据韦达定理,有

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=1,\quad \gamma+\delta=-q,\quad \gamma\delta=1,$$

由此得到

$$\begin{aligned}(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)&=(\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2)(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2)\\&=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)\\&=(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta\\&=(\gamma+\delta)^2+p(\gamma-\delta)(1-\delta\gamma)-p^2\\&=q^2-p^2.\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

21.4　根据韦达定理,对多项式 $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$ 的根 x_1, x_2, x_3, 有

$$x_1+x_2+x_3=1,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{\beta}{\alpha},\quad x_1x_2x_3=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

因此,

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}\right)=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}=-1.$$

21.5　作变量代换 $y=x-3$, 则 $y_1=x_1-3$, $y_2=x_2-3$ 和 $y_3=x_3-3$ 是多项式

$$(y+3)^3-6(y+3)^2+a(y+3)+a=y^3+3y^2+(a-9)y+4a-27$$

的根．由韦达定理，有

$$y_1+y_2+y_3=-3,\quad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=a-9,\quad y_1y_2y_3=27-4a.$$

此外，由假设还有

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=0.$$

不难验证下列恒等式成立：

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3\equiv(y_1+y_2+y_3)^3-3(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)(y_1+y_2+y_3)+3y_1y_2y_3.$$

由此得到，a 合乎题目要求的必要且充分条件为

$$0=(-3)^3-3(a-9)(-3)+3(27-4a)=-27-3a,$$

即

$$a=-9.$$

21.6 根据韦达定理，多项式 $P(x)$ 的根 u，v 和 uv 满足

$$u+v+uv=-a,\quad uv(1+u+v)=b,\quad u^2v^2=-c.$$

由此得到，当 $a\neq1$ 时，

$$b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a),$$

即 uv 是有理数。因为 $u^2v^2=-c$，是整数，所以 uv 也是整数(见定理 61)，因此，由

$$\begin{aligned}P(1)+P(-1)-2(1+P(0))&=(1+a+b+c)+(-1+a-b+c)-2(1+c)\\&=2(a-1)=-2(u+v+uv+1)\\&=-2(1+u)(1+v)\neq0,\end{aligned}$$

$$2P(-1)=2(-1-u)(-1-v)(-1-uv)=-2(1+uv)(1+u)(1+v)$$

得到，

$$\frac{2P(-1)}{P(1)+P(-1)-2(1+P(0))}=1+uv$$

是整数。当 $a=1$ 时，有

$$0=u+v+uv+1=(u+1)(v+1),$$

因此有一个根为 -1，即 $2P(-1)=0$ 能被任何整数整除。

21.7 根据韦达定理，a, b, c 应满足

(1) $a+b+c=-a$,　　(2) $ab+bc+ca=b$,　　(3) $abc=-c$.

如果 $a=0$(或 $b=0$)，由(3)得 $c=0$，由(1)得 $b=0$，因此可以假设 $a\neq0,b\neq0$．如果 $c=0$，由(2)得 $a=1$，再由(1)得 $b=-2$．显然，$1,-2,0$ 是方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的根．如果 $c\neq0$，则由(3)，$b=-\frac{1}{a}$，由(1)和(2)消去 c 后得 $b^4+b^3-b^2+2=0$．这个方程仅有的有理根是 $b=-1$，并且 $a=1$，$c=-1$．事实上，方程

$$x^3+x^2-x-1=0$$

有 1 或 -1 作它的根．

21.8 设 a、b、c、d 是多项式

$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

的根．现在证明

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=0$$

(由此即得所需的不等式

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1=(ab)^3\left((ab)^3-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+ab-\frac{1}{ab}+1\right)=0,$$

因为由韦达定理，有 $abcd=-1$)．事实上，由 $P(a)=P(b)=0$ 可得

$$a^3=\frac{1}{a+1},\quad b^3=\frac{1}{b+1},$$

因此得到

$$(ab)^3=\frac{1}{(1+a)(1+b)}=\frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}=-(1+c)(1+d).$$

同理可得 $(cd)^3=-(1+a)(1+b)$，因而有

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=-(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1$$
$$=-1-a-b-c-d=0,$$
因为由韦达定理，有 $a+b+c+d=-1$。

21.9 因为多项式 $P(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 有两个不同的根 $0<x_1<x_2<1$，所以 $b^2>4ac$。又由韦达定理，$0<\frac{c}{a}<1$，$\frac{b}{a}<0$，即 $a>c>0$，$b<0$。其次 $P(1)=a+b+c>0$，因此 $a+c>-b$。将后一不等式两端（都是正的）平方，得到 $a^2+2ac+c^2>b^2$，因此有 $(a-c)^2>b^2+4ac>0$。由此可得 $a-c\geqslant 2$。如果 $a\leqslant 4$，则整系数 a、c 只可能有三组：
$$a_1=4,\ c_1=2;\quad a_2=3,\ c_2=1;\quad a_3=4,\ c_3=1。$$
而系数 b 应当满足相应的三个条件：
$$4>b_1^2-32>0;\quad 4>b_2^2-12>0;\quad 9>b_3^2-16>0。$$
但是没有一个整数能满足这三个条件中的任何一个。因此 $a\geqslant 5$。最后，方程 $5x^2-5x+1=0$ 有两个根 $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ 和 $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$，它们都落在区间 $(0,1)$ 上。

21.10 设 $c=0$，则 c 是方程 $x^4-ax^3-bx=0$ 的根。因此，余下的是要求出所有形如 x^3-ax^2-b 的多项式，使得 a 和 b 是它的根。如果记这个多项式的第 3 个根为 d，则由韦达定理，有 $a+b+d=a$ 即 $d=-b$。其次，
$$ab+ad+bd=ab-b(a+b)=-b^2=0,$$
即 $b=0$。最后，注意，所有形如 $(a,0,0)$ 的三个数满足题中的条件。现在设 $c\neq 0$，则多项式 x^4-ax^3-bx+c 的 4 个根 a、b、c、d 没有一个为 0。由韦达定理，有 $a+b+c+d=a$，即 $d=-(b+c)$，其次，
$$ab+ac+bc+ad+bd+cd=ab+ac+bc-(a+b+c)(b+c)$$
$$=-b^2-bc-c^2=0,$$
$$abc+abd+acd+bcd=abc-(ab+ac+bc)(b+c)=-a(b^2+bc+c^2)-b^2c-bc^2$$
$$=-bc(b+c)=b,$$
即
$$b^2=-c(b+c)=1,\quad c^2+bc+1=0。$$
最后，
$$abcd=-abc(b+c)=ab=c,$$
即 $a=\frac{c}{b}$。因此，a，b，c 只可能有四组：
$$b_{1,2}=1,\ c_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad a_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$
$$b_{3,4}=-1,\ c_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad a_{3,4}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}.$$
每一组都满足题中条件，因此，三数组 (a,b,c) 要么有形式 $(a,0,0)$，其中 a 是任意复数；要么是下面的三数组之一：
$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

21.11 设 x_1，x_2 是多项式 x^2+ax+b 的根，则点 x_1，x_2，0 组成题中所说三角形的三个顶点的必要且充分条件是 $x_1\neq 0$，并且 $\frac{x_2}{x_1}$ 等于 i 或 $-i$（因为 x_1 和 x_2 的模相等，而它们的幅角相差 $\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$）。这说明，要么 $x_2=ix_1$，要么 $x_1=ix_2$，即原方程的根为 x_0，ix_0，并且 $x_0\neq 0$。根据韦达定理，有
$$\begin{cases}(1+i)x_0=-a,\\ ix_0^2=b,\\ x_0\neq 0.\end{cases}$$

该方程组当且仅当 $a^4=2b\neq0$ 时是相容的(因为 $2(ix_0^2)=((1+i)x_0)^2$)。

21.12 设 z_0 是多项式 $P(x)$ 的复根，且其模 $|z_0|=1$。则 $z_0^{n+1}-z_0^n-1=0$，从而 $z_0^n(z_0-1)=1$。由此得到，$|z_0-1|=1$。于是，

$$z_0=e^{(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)i},$$

其中 $k\in Z$。因此，$z_0^3=-1$，即 $(z_0+1)(z_0^2-z_0+1)=0$。由于 $z_0+1\neq0$，所以 $z_0^2-z_0+1=0$，即

$$z_0^2=z_0-1。$$

于是由 $z_0^n(z_0-1)=1$ 得到，$z_0^{n+2}=1$。所以，

$$e^{(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)i\cdot(n+2)}=e^{\pm(\frac{n+2}{6})\cdot2\pi i}$$

欲使上式成立，只需 $\frac{n+2}{6}\in N$，即 $n+2$ 被 6 整除。反之，容易验证，$z_0=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 为多项式 $P(x)$ 的根。

21.13 因为多项式 $P(x)$ 的所有系数都是非负的，所以它的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都不是正数。于是，

$$P(x)=(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n),$$

其中 $\beta_i=-\alpha_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$。根据平均值定理(定理 6)。有

$$2+\beta_i=1+1+\beta_i\geqslant3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot\beta_i}=3\sqrt[3]{\beta_i},\ i=1,2,\cdots,n。$$

注意，由韦达定理，$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n=1$。于是得到

$$P(2)=(2+\beta_1)(2+\beta_2)\cdots(2+\beta_n)\geqslant3^n\cdot\sqrt[3]{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}=3^n。$$

这就是所要证明的。

21.14 因为 $P(l)=(a_nl^{n-1}+\cdots+a_1)l+a_0$ 是奇数，而 l 是偶数，因此 a_0 是奇数。于是，对任意偶数 x_0，$P(x_0)=(a_nx_0^{n-1}+\cdots+a_1)x_0+a_0$ 是奇数，所以偶数不是 $P(x)$ 的根。记 $k=2m+1$，$m\in Z$，则由题中条件，有

$$P(2m+1)=a_n(2m+1)^n+\cdots+a_1(2m+1)+a_0\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv1\pmod2。$$

因此，对任意奇数 $x_0=2u+1$，$u\in Z$，也有

$$P(2u+1)=a_n(2u+1)^n+\cdots+a_1(2u+1)+a_0\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv1\pmod2。$$

这表明，$P(x_0)=P(2u+1)$ 也是奇数，所以奇数也不是 $P(x)$ 的根。

21.15 因为原多项式有 n 个正根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。所以它的次数不小于 n。因此 $a\neq0$，并且由韦达定理，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

$$(-1)^n\sum_{i=1}^{n}x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n=n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^nx_1x_2\cdots x_n=\frac{b}{a}。$$

由此得到 $b\neq0$。由平均值定理得到

$$n^2=1\cdot\frac{(-1)^nn^2\cdot\frac{b}{a}}{(-1)^n\frac{b}{a}}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geqslant(n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}}\right)=n^2,$$

这表明，只能有

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}。$$

21.16 设 α 是两个给定的多项式的公共根，即

$$\alpha^5=\alpha+1,\quad \alpha^2=-c\alpha-b。$$

则

$$\begin{aligned}\alpha+1=\alpha^5&=\alpha(\alpha^2)^2=\alpha(-a\alpha-b)^2=\alpha(a^2(-c\alpha-b)+2ab\alpha+b^2)\\&=(2ab-a^3)(-a\alpha-b)+(b^2-ab)\alpha\\&=(a^4-3a^2b+b^2)\alpha+(a^3b-2ab^2)\end{aligned}$$

因此得到

$$(a^4-3a^2b+b^2-1)\alpha=-a^3b+2ab^2+1,$$

从而 $$a^4-3a^2b+b^2-1=0,\quad -a^3b+2ab^2+1=0.$$

(否则 α 将是多项式 x^5-x-1 的有理根，但由定理59，它没有有理根)。由上述两个等式求得

$$b=\frac{2a^5-2a-1}{5a^3}.$$

之后，便得到等式 $a^{10}+3a^6-11a^5-4a^2-4a-1=0$，与 a 为有理数矛盾（因为根据定理59，多项式 $x^{10}+3x^6-11x^5-4x^2-4x-1$ 没有有理根）。因此当 $a、b\in Q$ 时，多项式 x^5-x-1 和 x^2+ax+b 不可能有公共根。

21.17 考虑多项式

$$Q(x)=P(a-x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

则由定理63，有

$$a_0=Q(0)=P(a)<0,\quad a_1=Q'(0)=-P'(a)\leqslant 0,$$

$$a_2=\frac{Q''(0)}{2}=\frac{(-1)^2P''(a)}{2}\leqslant 0,\ \cdots,\quad a_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^nP^{(n)}(a)}{n!}\leqslant 0.$$

因此，对所有 $x\geqslant 0$，有 $Q(x)<0$，即多项式 $P(x)$ 在 $x\in(-\infty,a]$ 上没有根。同理，对多项式

$$R(x)=P(b+x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$$

应用定理63，有

$$b_0=R(0)=P(b)>0,\quad b_1=R'(0)=P'(b)\geqslant 0,\quad b_2=\frac{R''(0)}{2}=\frac{P''(b)}{2}\geqslant 0,$$

$$\cdots\quad b_n=\frac{R^{(n)}(0)}{n!}=\frac{P^{(n)}(b)}{n!}\geqslant 0.$$

因此，当 $x\geqslant 0$ 时有 $R(x)>0$，从而多项式 $P(x)$ 在 $x\in[b,+\infty)$ 上没有根。这就证明，多项式 $P(x)$ 所有的实根都在 (a,b) 上。

21.18 我们用归纳法证明，当 n 为偶数时，多项式 $P_n(x)$ 对所有 $x\in R$ 都取正值（因此它不能有实根），而当 n 为奇数时，多项式 $P_n(x)$ 恰有一个实根。当 $n=0$ 时，显然对所有 x，$P_0(x)=1>0$。设结论对小于 n 的数都成立，现在证明它对 n 成立。

(1) 设 n 为奇数，则由归纳假设，对所有 $x\in R$，$P_n'(x)=P_{n-1}(x)>0$。因此由定理31，函数 $P_n(x)$ 是递增的，从而至多有一个零点。因为 $P_n(0)=1>0$，并且 $\lim\limits_{x\to-\infty}P_n(x)=-\infty$（即是说，函数 $P_n(x)$ 至少在一个点取负值），所以连续函数 $P_n(x)$ 至少有一次取值为0（见定理28）。

(2) 设 n 为偶数，则多项式 $P_n'(x)=P_{n-1}(x)$ 恰有一个实根 $x_0\neq 0$。因为对所有

$$x\in R,\quad P_n''(x)=P_{n-2}(x)>0,$$

所以当 $x>x_0$ 时，$P_n'(x)>0$，而当 $x<x_0$ 时，$P'(x)<0$，因此对所有 $x\in R$，有

$$P_n(x)\geqslant P_n(x_0)=P_{n-1}(x_0)+\frac{x_0^n}{n!}=\frac{x_0^n}{n!}>0.$$

结论证毕。

21.19 首先，因为 $P^{(n+1)}(x)=0$，所以

$$Q'(x)=P'(x)+\alpha P''(x)+\cdots+\alpha^{n-1}P^{(n)}(x).$$

因此，
$$Q(x)-\alpha Q'(x)=P(x).$$

不妨设多项式最高次项的系数是正的。因为 $P(x)$ 没有实根，所以它的次数是偶数，并且对所有 $x\in R$，有 $P(x)>0$。设多项式 $Q(x)$ 有实根 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$。设 $\alpha\geqslant 0$，则因为多项式 $Q(x)$ 的最高次项系数等于多项式 $P(x)$ 的最高次项的系数，且是正数。所以

$$\lim_{x\to+\infty}Q(x)=+\infty.$$

由此得到，当 $x>x_k$ 时，$Q(x)>0$。因此 $Q'(x_k)\geqslant 0$ 并且

$$P(x_k)=Q(x_k)-\alpha Q'(x_k)\leqslant 0.$$

如果 $a<0$，则当 $x<x_1$ 时，$Q(x)>0$（因为 $\deg Q(x)=n$ 是偶数）。从而 $Q'(x_1)\leqslant 0$，并且

$$P(x_1)=Q(x_1)-aQ'(x_1)\leqslant 0.$$

总之，都与 $P(x)>0$ 相矛盾。因此，多项式 $Q(x)$ 没有实根。

21.20 将原多项式分解为因式的乘积：

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

则

$$P'(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_n(x),$$

其中 $P_k(x)$ 是 $n-1\geqslant 1$ 次多项式，并满足

$$(x-x_k)P_k(x)\equiv P(x),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

注意，当 $k\neq i$ 时，$P_k(x_i)=0$。因此 $P'(x_i)=P_i(x_i)\neq 0$。考虑多项式

$$F(x)=-1+\frac{P_1(x)}{P'(x_1)}+\frac{P_2(x)}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{P_n(x)}{P'(x_n)}.$$

如果 $F(x)\neq 0$，则它的次数不大于 $n-1$，且对每个 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$F(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)}-1=\frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)}-1=0,$$

即多项式 $F(x)$ 有 n 个不同的根。因此 $F(x)\equiv 0$。因为多项式 $P_k(x)$ 的最高次项系数都是 a，$k=1,2,\cdots,n$，所以多项式 $F(x)$ 中项 x^{n-1} 的系数为

$$\frac{a}{P'(x_1)}+\frac{a}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{a}{P'(x_n)},$$

而这个系数恰好是 0，由此便得到题中的结论。

21.21 根据定理 57，实系数多项式只能有偶数个纯虚根，而且它们两两共轭成对出现。于是由定理 53，多项式 $P(x)$ 可以表为：

$$P(x)=a(x-ia_1)\cdots(x-ia_{2n})=a(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_n^2),$$

其中 $a,a_1,\cdots,a_{2n}$ 是非零实数，并且 $a_{n+k}=-a_k$，$k=1,2,\cdots,n$。因此多项式 $P(x)$ 中 x^2 的系数不为 0，而 x^1 的系数为 0。这就是说，多项式 $P'(x)$ 恰好有一个根 $x=0$。现在证明，其他 $2n-2$ 个根都是纯虚数。设 $P'(b+ic)=0$，其中 $b^2+c^2\neq 0$。如果 $P(b+ic)=0$，则 $b+ic$ 是原多项式的根，即是纯虚数。如果 $P(b+ic)\neq 0$，则由

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-ia_k}$$

得到

$$0=\frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b+i(c-a_k)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{b-i(c-a_k)}{b^2+(c-a_k)^2}.$$

因此，$\dfrac{P'(b+ic)}{P(b+ic)}$ 的实部为

$$b\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b^2+(c-a_k)^2}=0,$$

即 $b=0$。这就是所要证明的。

21.22 设多项式 P 和 Q 的根（连同它们的重数）是相同的，则有

$$P(z)=a(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdots(z-z_k)^{n_k},$$

$$Q(z)=b(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdots(z-z_k)^{n_k},$$

其中 a,b 是非零复数，$n_1,n_2,\cdots,n_k\in N$，因此，函数

$$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|=(|a|-|b|)|(z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_k)^{n_k}|$$

不能取符号不同的值。现在证明充分性。为确定起见，设 $f(z)$ 不取负值，则 $\deg P\geqslant\deg Q$，否则对模充分大的 z 有 $|P(z)|<|Q(z)|$，即 $f(z)<0$。其次，设

$$P(z)=(z-z_0)^{n_0}P_0(z),$$

其中 $z_0\in C$，$n_0\in N$，$P_0(z)$ 为多项式，并且 $P_0(z_0)\neq 0$。又设

$$Q(z)=(z-z_0)^{m_0}Q_0(z),$$

其中 $m_0\in Z^+$，$Q_0(z)$ 为多项式，并且 $Q_0(z_0)\neq 0$。下面证明，$m_0\geqslant n_0$，否则 $0\leqslant m_0<n_0$，则对距点 z_0 足够

近的 z,

$$f(z)=|z-z_0|^{m_k}(|(z-z_0)^{n_k-m_k}P_0(z_0)|-|Q_0(z_0)|)$$

将是负数。因此，如果多项式P有根 $z_1, z_2, \cdots, z_k$，其重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，则多项式Q也有这些根，而且其重数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 依次不小于 $n_1, n_2, \cdots, n_k$。最后，由

$$n_1\leqslant m_1,\ n_2\leqslant m_2,\ \cdots,\ n_k\leqslant m_k,\ n_1+n_2+\cdots+n_k\geqslant m_1+m_2+\cdots+m_k$$

得到 $n_1=m_1, \cdots, n_k=m_k$，即 $\deg P=\deg Q$，而且除 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外，多项式没有其他的根。因此多项式P和Q的根相同。

21.23 如果 $P(x)$能分解为两个整系数多项式的乘积，则因为 $P(x)$是三次多项式，所以其中必有一个是一次的，而另一个是二次的，因此可设

$$P(x)=(a_1x+b_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\text{。}$$

其中 $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2\in Z$。于是

$$a_1a_2x^3+(a_1b_2+a_2b_1)x^2+(a_1c_2+b_1b_2)x+b_1c_2\equiv x^3+bx^2+cx+d\text{。}$$

由定理45，有 $a_1a_2=1$，因此，$a_1=a_2=1$ 或者 $a_1=a_2=-1$。因为 $|a_1|=1$，所以 $P(x)$ 有整数根。另一方面，因为$(b+c)d$ 是奇数，所以 $b+c$ 与 d 都是奇数。从而 $f(0)=d$ 与 $f(1)=1+b+c+d$ 都是奇数，于是由 21.14 题知 $P(x)$没有整数根，矛盾。因此，$P(x)$不能分解。

§22 多项式的整除性和相等

22.1 对$n\in Z^+$ 用归纳法来证明。当 $n=0$ 时，因为

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}\equiv x^2+x+1,$$

所以结论成立。设对某个 $n-1$ 结论成立，即多项式 $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ 被多项式 x^2+x+1 整除。则多项式

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}&\equiv(x+1)^2(x+1)^{2n-1}+xx^{n+1}\equiv(x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+xx^{n+1}\\&\equiv(x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x((x+1)^{2n-1}+x^{n+1})\end{aligned}$$

同样被 x^2+x+1 整除。于是结论对 n 成立。

22.2 记 $x_\varepsilon=\cos\alpha+i\varepsilon\sin\alpha$，其中 $\varepsilon\in\{-1, 1\}$，则多项式 $Q(x)$可以写为

$$Q(x)=(x-\cos\alpha-i\sin\alpha)(x-\cos\alpha+i\sin\alpha)=(x-x_1)(x-x_{-1})\text{。}$$

由棣莫佛公式(定理43)，有

$$x_\varepsilon^n=(\cos\varepsilon\alpha+i\sin\varepsilon\alpha)^n=\cos\varepsilon n\alpha+i\sin\varepsilon n\alpha=\cos n\alpha+i\varepsilon\sin n\alpha\text{，}$$

因此

$$\begin{aligned}P(x_\varepsilon)&=(\cos n\alpha+i\varepsilon\sin n\alpha)^n\sin\alpha-(\cos\alpha+i\varepsilon\sin n\alpha)\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha\\&=\cos n\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha\\&=\sin(1-n)\alpha+\sin(n-1)\alpha=0\text{。}\end{aligned}$$

因此由裴蜀定理(定理49)，多项式 $P(x)$被多项式$(x-x_1)$，$(x-x_{-1})$整除（因为 $\sin\alpha\neq0$，所以 $x-x_1$ 与 $x-x_{-1}$ 不相同)，从而被它们的乘积 $Q(x)$整除。

22.3 注意到 $\cos^2 t=1-\sin^2 t$，并作代换 $\sin t=x$。我们得到，题中要求的次数小于4的多项式是多项式

$$S(x)=7x^{31}+8x^{13}-5x^9-2$$

除以多项式

$$Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

的余式。因为恒等式

$$S(x)\equiv P(x)Q(x)+R(x)$$

对所有 $x\in[-1, 1]$应当成立，从而对所有 $x\in C$ 也成立(见定理52)。因为 $(x-1)Q(x)=x^5-1$，所以变量x有4个不同的值，使得 $Q(x)=0$。对每个这样的x值都有 $x^5=1$，并且

$$\begin{aligned}R(x)=S(x)&=7x^{31}+8x^{13}-5x^9-2=7x+8x^3-5x^4-2+5Q(x)\\&=13x^3+5x^2+12x+3\text{。}\end{aligned}$$

于是 $R(x)$和 $13x^3+5x^2+12x+3$ 在 4 个不同的点取值相同，但它们的次数都不大于 3，所以它们相等。

22.4 由于多项式 $x^{m+1}-1=(x-1)P(x)$ 和 $x^{n(m+1)}-1=(x^n-1)Q(x)$ 没有重根，所以多项式

$$P(x)=1+x+\cdots+x^m \text{ 和 } Q(x)=1+x^n+\cdots+x^{mn}$$

也没有重根。于是根据定理 54，多项式 $Q(x)$被 $P(x)$ 整除的必要且充分条件为多项式 $P(x)$ 的每个根都是 $Q(x)$的根，或者说方程 $x^{m+1}=1$ 的每个不等于 1 的根(它自然也满足方程 $x^{n(m+1)}=1$)都不是方程 $x^n=1$ 的根。于是，全部所求的数对 m, n(也只有这种数对)应当使方程组

$$\begin{cases} x^{m+1}=1 \\ x^n=1 \end{cases}$$

有唯一解 $x=1$。如果$(m+1, n)=d>1$，则该方程组将有解

$$x=\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}\neq 1.$$

如果 $(m+1, n)=1$，则由定理 24，存在整数 k 和 l，使得 $k(m+1)+ln=1$。这表明，对该方程组的任意解 x，有

$$x^{k(m+1)+ln}=(x^{m+1})^k(x^n)^l=1.$$

因此，自然数对 m, n 当且仅当 $m+1$ 与 n 互素时才满足题中条件。

22.5 设 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ 是多项式 $S(x)$的系数，即设 $S(x)=s_0+s_1x+\cdots+s_nx^n$。在所给的恒等式两端同乘以 $x-1$，得到

$$(x-1)(P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5))\equiv(x^5-1)S(x),$$

即 $$P(x^5)+(x^5-1)S_1(x)\equiv-(x^5-1)S_2(x)+xP(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5),$$

其中记 $$S_1(x)=s_0+s_5x^5+s_{10}x^{10}+\cdots+s_{5m}x^{5m},$$

$$S_2(x)=S(x)-S_1(x),\quad m=\left[\frac{n}{5}\right].$$

由于在上一恒等式左端变量 x 的指数是 5 的倍数，右端的却不是，所以恒等式两端都应等于零。由此得到

$$P(x^5)\equiv-(x^5-1)S_1(x).$$

在上式中取 $x=1$，得到 $P(1)=0$，因此，由裴蜀定理，多项式 $P(x)$被 $x-1$ 整除。

22.6 设所求二次三项式为 $P(x)=ax^2+bx+c$。因为 $P(x)$有极值，所以 $a\neq 0$。而

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c,$$

因此 $P(x)$在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取极值。由题中条件，有

$$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2},$$

即 $b=-a$。于是 $P(x)=ax^2-ax+c$。由于 $P(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值 $-\frac{49}{4}$，所以 $a>0$，而且

$$-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{49}{4},$$

即 $$-\frac{a}{4}+c=-\frac{49}{4}.$$

从而 $-a+4c=-49$。设 $P(x)=ax^2-ax+c$ 的两个根为 x_1 和 x_2，则由韦达定理(定理 55)，

$$x_1+x_2=1,\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

由此得到，

$$x_1^4+x_2^4=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2=\left(1-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}=1-\frac{4c}{a}+\frac{2c^2}{a^2}.$$

由题中条件，有

$$1-\frac{4c}{a}+\frac{2c^2}{a^2}=337.$$

即
$$-\frac{2c}{a}+\frac{c^2}{a^2}=168.$$
把 $c=\frac{a-49}{4}$ 代入，解之得 $a=1$，或 $a=-\frac{49}{55}$。因为 $a>0$，所以舍去 $a=-\frac{49}{55}$。于是，
$$a=1,\quad c=\frac{a-49}{4}=-12.$$
所求的二次三项式 $P(x)=x^2-x-12$。

22.7 多项式 $P(x)=ax$ 满足题中条件，其中 a 是常数。下面对 $n\in Z^+$ 用归纳法证明，所欲求的多项式 $P(x)$ 满足条件 $P(n)=nP(1)$。当 $n=0$ 和 $n=1$ 时，等式显然成立。设等式对 $n-1$ 和 n 成立，其中 $n\in N$，则
$$P(n+1)=2P(n)-P(n-1)=(n+1)P(1),$$
即等式对 $n+1$ 也成立。因此多项式 $P(x)-P(1)x$ 有无限多个根 $x=0,1,2,\cdots$。由定理 54，它应当恒等于零。于是所求的多项式具有 $P(x)=ax$ 的形式。

22.8 将 $x=0,2$ 代入题中的恒等式，可知多项式 $P(x)$ 有根 0 和 1，即它被多项式 x^2-x 整除。其次，将 $P(x)=(x^2-x)Q(x)$ 代入恒等式，可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x)\equiv Q(x-1)$。由此得到，
$$Q(0)=Q(1)=Q(2)=\cdots,$$
因此 $Q(x)\equiv a$，其中 a 是常数，于是所求的多项式为 $P(x)=a(x^2-x)$。反之，容易验证，所有这样的多项式也都满足题中的恒等式。

22.9 将 $x=1,-2,0$ 代入题中的恒等式，可知多项式有根 0，±1。即它被 x^3-x 整除。其次，将 $P(x)=(x^3-x)Q(x)$ 代入恒等式，可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x)\equiv Q(x-1)$，由此得到
$$Q(0)=Q(-1)=Q(-2)=\cdots$$
因而 $Q(x)\equiv a$，a 为常数，于是，所求的多项式 $P(x)=a(x^3-x)$。反之，容易验证所有这种形式的多项式也都满足题中的恒等式。

22.10 设所求的多项式为
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
其中 $a_n\neq0$。设系数 a_{n-1}，…，a_1，a_0 至少有一个不为 0，又设 $k(<n)$ 是使 $a_k\neq0$ 的最大整数，于是
$$\begin{aligned}P(x^2)&\equiv a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots+a_1x^2+a_0\\&\equiv(a_nx^n+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^2\equiv(P(x))^2,\end{aligned}$$
比较 x^{n+k} 的系数，得到 $0=2a_na_k$，与 $a_n\neq0$，$a_k\neq0$ 矛盾。因此
$$a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0,$$
并且 $P(x)=a_nx^n$。最后由条件
$$a_nx^{2n}\equiv P(x^2)\equiv(P(x))^2\equiv a_n^2x^{2n}$$
得到，$a_n=1$，即 $P(x)=x^n$，$n\in Z^+$。

22.11 记 $y=x-1$，$Q(y)=P(y-1)$，则有
$$(P(x-2))^2=(P(y-1))^2=(Q(y))^2.$$
$$P(x^2-2x)=P(y^2-1)=Q(y^2).$$
于是原恒等式化为
$$Q(y^2)\equiv(Q(y))^2,\quad y\in R.$$
它恰好与 22.10 题中的恒等式一样。因此，$Q(y)=y^n$，从而
$$P(y)=(y+1)^n,\quad n\in Z^+.$$

22.12 设非零多项式 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 满足题中条件，其中 $a_n\neq0$，则比较原恒等式中 x^{3n} 和 x^0 的系数，得到 $a_n^2=a_n$，$a_0^2=a_0$，从而 $a_n=1$。如果 $a_0=0$，则 $P(x)=x^lP_1(x)$，其中
$$P_1(0)\neq0,\quad l\in N,$$
并且由
$$x^lP_1(x)(2x^2)^lP_1(2x^2)\equiv(2x^3+x)^lP_1(2x^3+x)$$

得到 $$2^k x^{2k} P_1(x) P_1(2x^2) \equiv (2x^2+1)^k P_1(2x^3+x),$$
于是 $P_1(0)=0$，矛盾。因此 $a_0=1$。设 $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 是多项式 $P(x)$ 的根。因为
$$P(2\alpha^3+\alpha)=P(\alpha)P(2\alpha^2),$$
所以 $2\alpha^3+\alpha$ 也是根。其次，
$$|2\alpha^3+\alpha|=|\alpha|\cdot|2\alpha^2+1|\geqslant|\alpha|\cdot(2|\alpha|^2-1),$$
所以，如果 $|\alpha|=\rho>1$，则 $|2\alpha^3+\alpha|>|\alpha|$，从而非零多项式 $P(x)$ 有无限多个不同的根
$$\beta_1=\alpha,\ \beta_{j+1}=2\beta_j^3+\beta_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,$$
不可能，因此多项式 $P(x)$ 的根的模不大于 1，但由韦达定理，诸根的乘积为 1，所以没有模小于 1 的根。于是 $\rho=1$，并由
$$1=|2\alpha^3+\alpha|^2=|2\alpha^2+1|^2=4\cos 2\varphi+5$$
得到，
$$\varphi=\frac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in Z,$$
即 $\alpha=\pm i$。因为 $P(x)$ 是实系数的，所以
$$P(x)=(x^2+1)^k,\quad k\in Z^+.$$
最后，可以验证，所有这种形式的多项式都满足题中条件。

22.13 对 $n\in N$ 用归纳法。因为多项式 $Q_1(x)$ 被自身整除，所以当 $n=1$ 时结论成立，现在设已经证明恒等式 $Q_n(x)\equiv R_n(x)Q_1(x)$ 对某个 n 成立，其中 $R_n(x)$ 是多项式，则有
$$Q_{n+1}(x)\equiv P(Q_n(x)+x)-x\equiv P(R_n(x)Q_1(x)+x)-x$$
$$\equiv(P(R_n(x)Q_1(x)+x)-P(x))+(P(x)-x),$$
设
$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k x^k,$$
则
$$Q_{n+1}(x)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k((R_n(x)Q_1(x)+x)^k-x^k)+Q_1(x)$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k R_n(x)Q_1(x)S_k(x)+Q_1(x)$$
$$\equiv Q_1(x)\left(1+\sum_{k=0}^{m}a_k R_n(x)S_k(x)\right),$$
其中
$$S_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(R_n(x)Q_1(x)+x)^j x^{k-j-1},$$
这里应用了等式(定理 4)
$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{j=0}^{k-1}a^j b^{k-j-1}$$
并取
$$a=R_n(x)Q_1(x)+x,\quad b=x.$$
这就证明，结论对 $n+1$ 成立。

22.14 注意，如果次数不大于 3 的多项式 $S(x)$ 满足：对所有 $x\in R$，$S(x)\geqslant0$，且 $S(x_0)=0$，则
$$S(x)=a(x-x_0)^2,$$
其中 $a\geqslant0$。因此，
$$R(x)\equiv P(x)+a(x-x_0)^2,$$
$$Q(x)\equiv P(x)+b(x-x_0)^2\equiv\frac{a-b}{a}P(x)+\frac{b}{a}(P(x)+a(x-x_0)^2)$$
$$\equiv kP(x)+(1-k)R(x),$$
其中
$$a\geqslant b\geqslant0,\quad k=1-\frac{b}{a}\in[0,\ 1],$$
而当 $a=0$ 时，$R(x)\equiv Q(x)\equiv P(x)$，因此，如取 $k=1$，题中的恒等式也成立。对 4 次多项式，相应的结论并不成立。例如多项式
$$P(x)=x^4,\quad Q(x)=x^4+x^2,\quad R(x)=2x^4+x^2$$
满足，对
$$x\in R,\quad P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x),$$

并且 $P(0)=R(0)$。但恒等式

$$x^4+x^2\equiv kx^4+(1-k)(2x^4+x^2)$$

对所有 $k\in[0,1]$都不成立，因为对固定的 k，得到两个矛盾的等式 $1=k+2(1-k)$和 $1=1-k$。

22.15 设多项式 $Q(x)=q_nx^n+\cdots+q_1x+q_0$ 满足条件：$q_n\neq0$，并且 $Q(P(x))\equiv P(Q(x))$。则比较多项式 $Q(P(x))$与 $P(Q(x))$的 $2n$ 次项系数，得到 $q_na^n=aq_n^2$，即 $q_n=a^{n-1}$。因此，如果题中结论不成立，即对某个 n 与多项式 $P(x)$，存在两个不同的 n 次多项式 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 满足题中恒等式，则因为 $Q_1(x)$和 $Q_2(x)$的首项系数都是 a^{n-1}，所以多项式 $R(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$的次数 $k<n$，且满足

$$\begin{aligned}R(P(x))&\equiv Q_1(P(x))-Q_2(P(x))\equiv P(Q_1(x))-P(Q_2(x))\\&\equiv a(Q_1^2(x)-Q_2^2(x))+b(Q_1(x)-Q_2(x))\\&\equiv(Q_1(x)-Q_2(x))(a(Q_1(x)+Q_2(x))+b)\\&\equiv R(x)T(x),\end{aligned}$$

其中 $$T(x)=aQ_1(x)+aQ_2(x)+b,$$

因此 $$2k=\deg R(P(x))=\deg(R(x)T(x))=k+n,$$

与 $k<n$ 矛盾，结论证毕。

22.16 如果 $$P(z)\equiv Q(z)Q(-z),$$

则 $$P(-z)\equiv Q(-z)Q(z)\equiv P(z),$$

即 $P(z)$是偶函数。反之，如果 $P(z)\equiv0$，则取 $Q(z)\equiv0$，于是 $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$。现在设非零多项式 $P(z)$为偶函数，对多项式 $P(z)$的非零根的个数 m 用归纳法证明，存在多项式 $Q(z)$，使得

$$P(z)\equiv Q(z)Q(-z).$$

当 $m=0$ 时，多项式 $P(z)$有形式 $P(z)=az^n$，$a\neq0$。由于 $P(z)$是偶函数，所以 $n=2k$，$k\in Z^+$。取多项式 $Q(z)=bz^k$，其中 $b^2=(-1)^ka$。因为 $az^n=bz^k\cdot b(-z)^k$，所以多项式 $Q(z)$ 满足所说的恒等式。设结论对所有小于 m 的正整数成立。下面证明结论对 m 成立。事实上，如果 α 是多项式的非零根，则

$$P(-\alpha)=P(\alpha)=0,$$

因此 $$P(z)=(z-\alpha)(z+\alpha)R(z).$$

其中 $R(z)$是偶函数，这是因为

$$R(-z)((-z)^2-\alpha^2)\equiv P(-z)\equiv P(z)\equiv R(z)(z^2-\alpha^2),$$

由归纳假设，存在多项式 $S(z)$，使得 $R(z)\equiv S(z)S(-z)$，取 $Q(z)=i(z-\alpha)S(z)$，则

$$P(z)\equiv i(z-\alpha)S(z)\cdot i(-z-\alpha)S(-z)\equiv Q(z)Q(-z).$$

结论证毕。

22.17 设存在多项式 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

和 $$g(y)=b_0y^m+b_1y^{m-1}+\cdots+b_m,$$

使得 $$f(x)g(y)=x^{200}y^{200}+1.$$

令 $x=0$，则得：对任意的 y，$g(y)=\dfrac{1}{a_n}$；令 $y=0$，则得：对任意的 x，$f(x)=\dfrac{1}{b_m}$。再令 $x=y=0$，则有 $f(0)=g(0)=1$，于是 $a_nb_m=1$。这表明，对任意的 x，y，都有

$$f(x)g(y)=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_m}=\frac{1}{a_nb_m}=1.$$

它显然不恒等于 $x^{200}y^{200}+1$。

22.18 对非零多项式 $P(x)$ 的非实根的个数 m 用归纳法证明题中的结论成立。(如果 $P(x)\equiv0$，则取 $n=1$ 与 $Q_1(x)\equiv0$。)设 $m=0$，并且多项式 $P(x)$满足题中条件，则它的根都是实的，而且重数都是偶数(如果 $P(x)=(x-\alpha)^lR(x)$，$\alpha\in R$，并且 l 是奇数，则当 $x>\alpha$ 时 $R(x)\geqslant0$，当 $x<\alpha$ 时 $R(x)\leqslant0$。因此 α 是多项式 $R(x)$的根)，所以

$$P(x)\equiv a(x-\alpha_1)^{2l_1}(x-\alpha_2)^{2l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{2l_k}.$$

其中 $a>0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k\in R,\ l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_k\in Z^+$,

取 $n=1$，且令

$$Q_1(x)=\sqrt{a}\,(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k},$$

则 $P(x)\equiv(Q_1(x))^2$，现在设结论对所有小于m的正整数成立。下面证明它对m也成立。事实上，如果满足题中条件的多项式 $P(x)$有m个非实数根，则它可表为

$$P(x)=(x^2+2px+q)R(x),$$

其中 $p^2<q$，也即对所有 $x\in R$，

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+(q-p^2)>0.$$

但由归纳假设，多项式 $R(x)$可以写成

$$R(x)\equiv(Q_1(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2,$$

其中 $Q_1(x),\ \cdots,\ Q_n(x)$ 是实系数多项式，于是

$$P(x)\equiv((x+p)^2+c^2)((Q_1(x))^2+\cdots+(Q_n(x))^2).$$

其中 $c=\sqrt{q-p^2}$，从而多项式 $P(x)$可表为若干个实系数多项式的平方和。

22.19 将多项式 $P(x)$表为(见定理 58)：

$$P(x)=aF_1(x)\cdots F_m(x)G_1(x)\cdots G_k(x),$$

其中 $F_i(x)$和 $G_j(x)$为

$$F_i(x)=x-\alpha_i,\quad \alpha_i\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$G_j(x)=(x-\beta_j)(x-\bar{\beta}_j),\ \ \beta_j\in C\backslash R,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

并且 $a>0$。注意，系数非负的多项式的乘积仍是系数非负的多项式。因此只需证明，每个多项式 $F_i(x)$和 $G_j(x)$都可表为系数非负的多项式的商 $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ 即可。对多项式 $F(x)=x-\alpha,\ \alpha\leqslant 0$，取

$$Q(x)=F(x)=x+|\alpha|,\quad R(x)=1.$$

其次，如果 $\mathrm{Re}\beta\leqslant 0$，则对多项式

$$G(x)=(x-\beta)(x-\bar{\beta}),$$

令 $$Q(x)=G(x)=x^2+2|\mathrm{Re}\beta|x+|\beta|^2,\quad R(x)=1;$$

如果 $\mathrm{Re}\beta>0$，则不妨设 $\arg\beta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，取 $n\in N$，使得

$$2^n\arg\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right),$$

并且当 $s=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 时，

$$2^s\arg\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

因为 $$\arg(\beta^{2^r})=2^r\arg\beta\quad(0\leqslant r\leqslant n),$$

所以 $\mathrm{Re}(\beta^{2^n})\leqslant 0$；并且当 $s=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 时，$\mathrm{Re}(\beta^{2^s})>0$。于是有

$$\begin{aligned}G(x)&\equiv(x-\beta)(x-\bar{\beta})\equiv\frac{(x^2-\beta^2)(x^2-\bar{\beta}^2)}{(x+\beta)(x+\bar{\beta})}\equiv\frac{(x^4-\beta^4)(x^4-\bar{\beta}^4)}{(x+\beta)(x+\bar{\beta})(x^2+\beta^2)(x^2+\bar{\beta}^2)}\equiv\cdots\\&\equiv\frac{(x^{2^n}-\beta^{2^n})(x^{2^n}-\bar{\beta}^{2^n})}{(x+\beta)(x+\bar{\beta})\cdots(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+\bar{\beta}^{2^{n-1}})}\\&\equiv\frac{Q(x)}{R(x)},\end{aligned}$$

其中，
$$Q(x)=(x^{2^n}-\beta^{2^n})(x^{2^n}-\bar{\beta}^{2^n}),$$

$$R(x)=(x+\beta)(x+\bar{\beta})\cdots(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+\bar{\beta}^{2^{n-1}}).$$

是系数非负的多项式，这是因为所有多项式

$$(x^l+\gamma)(x^l+\bar{\gamma})\equiv x^{2l}+(2\mathrm{Re}\gamma)x^l+|\gamma|^2,\quad l\in N,\ \mathrm{Re}\gamma>0$$

的系数都是非负的。

22.20 记 $R_{n,i}(x)=x^i+x^{i+1}+\cdots+x^{n-i}$，其中

$$i=0,\ 1,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{2}\right],$$

则任意多项式 $P(x)\in A(n)$ 都可表为

$$P(x)=a_0R_{n,0}(x)+(a_1-a_0)R_{n,1}(x)+\cdots+(a_{[\frac{n}{2}]}-a_{[\frac{n}{2}]-1})R_{n,[\frac{n}{2}]}(x)=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}b_iR_{n,i}(x),$$

其中 $b_0=a_0$, $b_i=a_i-a_{i-1}$ 是非负实数,

$$i=0,\ 1,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{2}\right].$$

同样，如果 $Q(x)\in A(m)$，则

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]}c_jR_{m,j}(x),$$

其中
$$c_j\geqslant 0,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ \left[\frac{m}{2}\right].$$

最后，如果 $P(x)\in A(n)$, $Q(x)\in A(m)$，则多项式

$$P(x)Q(x)=\sum_{i,j}b_ic_jR_{n,i}(x)R_{m,j}(x),$$

属于集合 $A(n+m)$。为证明这一结论，只需证明：对所有

$$i\leqslant\frac{n}{2},\ j\leqslant\frac{m}{2},\ R_{n,i}(x)R_{m,j}(x)\in A(n+m).$$

事实上，记 $p=n-2i$, $q=m-2j$，并且为确定起见，设 $p\leqslant q$，则多项式

$$\begin{aligned}R_{n,i}(x)R_{m,j}(x)&\equiv x^i(1+x+\cdots+x^p)x^j(1+x+\cdots+x^q)\\&\equiv x^{i+j}(R_{p+q,0}(x)+R_{p+q,1}(x)+\cdots+R_{p+q,p}(x))\\&\equiv R_{m+n,j+i}(x)+R_{m+n,j+i+1}(x)+\cdots+R_{m+n,j+n-i}(x)\end{aligned}$$

属于集合 $A(m+n)$。结论证毕。

22.21 对 m 用数学归纳法。当 $m=0$ 时结论显然成立。设 $m=n-1$ 时，$P_m(x,y,z)$ 是对称的，并且

$$(x+y)P_m(x,\ z,\ y+1)-(x+z)P_m(x,\ y,\ z+1)=(y-z)P_m(x,\ y,\ z) \quad ①$$

成立，现在证明 $m=n$ 时也成立。从 $P_{m-1}(x,y,z)$ 的对称性容易看出

$$P_m(x,\ y,\ z)=P_m(y,\ x,\ z),$$

我们只需证明

$$P_n(x,\ y,\ z)=P_n(x,\ z,\ y)$$

就够了。由①,

$$\begin{aligned}P_n(x,\ z,\ y)-P_n(x,\ y,\ z)&=(y+z)\{(x+y)P_{n-1}(x,\ z,\ y+1)-(x+z)P_{n-1}(x,\ y,\ z+1)\}\\&\quad-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,\ y,\ z)\\&=(y+z)(y-z)P_{n-1}(x,\ y,\ z)-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,\ y,\ z)\\&=0.\end{aligned}$$

为了证明①式对 $m=n$ 时成立，要利用已建立的 P_n 的对称性

$$\begin{aligned}(x+y)P_n(x,\ z,\ y+1)-(x+z)P_n(x,\ y,\ z+1)&=(x+y)P_n(y+1,\ z,\ x)-(x+z)P_n(z+1,\ y,\ x)\\&=(x+y)\{(y+x+1)(z+x)P_{n-1}(y+1,\ z,\ x+1)\\&\quad-x^2P_{n-1}(y+1,\ z,\ x)\}-(x+z)\{(z+x+1)\\&\quad(y+x)P_{n-1}(z+1,\ y,\ x+1)-x^2P_{n-1}(z+1,\ y,\ x)\}\\&=(x+y)(x+z)(y-z)P_{n-1}(x+1,\ y,\ z)\\&\quad-x^2(y-z)P_{n-1}(x,y,z)\\&=(y-z)P_n(z,y,x)=(y-z)P_n(x,y,z).\end{aligned}$$

即①成立。

22.22 记所有可能的 2^n 个数组 $e=(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)$ 的集合为 A_n，其中每个 e_i 取值为 1 或 -1。另

外，记 $x_\varepsilon=\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n$，并证明，对每个 $n\in N$，乘积 $\prod\limits_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon$ 可以表为 $Q_n(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2)$，其中 Q_n 是某个整系数多项式。当 $n=1$ 时，因为

$$\prod_{\varepsilon\in A_1}x_\varepsilon=x_1(-x_1)=Q_1(x_1^2),$$

所以结论成立。现在设 $n>1$，并且 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$。记 $\varepsilon'=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n)$，则

$$\prod_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}((x_{\varepsilon'}+x_k)(x_{\varepsilon'}-x_k))=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}(x_{\varepsilon'}^2-x_k^2).$$

将上述乘积中的括号展开，并合并同类项，便得到某个依赖变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式，而且变量 x_k 在其中出现的指数都是偶数。由于下标 k 是随意的，所以类似的结论对每个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立。这样便证明了

$$\prod_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon=Q_n(x_1^2,\cdots,x_n^2).$$

注意，因为 $|Q_n(1,0,\cdots,0)|=1$，所以多项式 Q_n 是非零的。在乘积 $\prod\limits_{\varepsilon\in A_n}(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)$ 中分出因式 $x_1+x_2+\cdots+x_n$，它相应于 $\varepsilon(1,1,\cdots,1)$，把乘积中其他因式相乘得到的多项式（$n$ 元整系数的）记作 P_n，便得到所要的对每个 $n\in N$ 的恒等式

$$(x_1+\cdots+x_n)P_n(x_1,\cdots,x_n)\equiv Q(x_1^2,\cdots,x_n^2).$$

22.23 如果多项式 $P(x)$ 的根是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，其重数分别为 $k_1,\cdots,k_s$，则由于 $P_0=Q_0$，所以多项式 $Q(x)$ 也有相同的根（但重数可能不同）。同理，如果多项式 $P(x)-1$ 的根是 $\beta_1,\cdots,\beta_r$，其重数分别为 $l_1,\cdots,l_r$，则由于 $P_1=Q_1$，所以多项式 $Q(x)-1$ 也有相同的根。因此，在不同的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 中，每个数都是多项式 $P(x)-Q(x)$ 的根。设 $P(x)-Q(x)\not\equiv0$，则

$$\deg(P(x)-Q(x))\geqslant s+r.$$

不妨设 $\deg P(x)\geqslant\deg Q(x)\geqslant1$，因而

$$\deg P(x)=\deg(P(x)-1)\geqslant\deg(P(x)-Q(x)).$$

其次，如果多项式 $P(x)-c$ 的根 γ 的重数为 $m>1$，则多项式 $P'(x)$ 有 $m-1$ 重根 γ。因此有

$$\begin{aligned}\deg P'(x)&\geqslant(k_1-1)+\cdots+(k_s-1)+(l_1-1)+\cdots+(l_r-1)\\&=(k_1+\cdots+k_s)+(l_1+\cdots+l_r)-(s+r).\\&\geqslant\deg P(x)+\deg(P(x)-1)-\deg(P(x)-Q(x))\\&\geqslant\deg P(x),\end{aligned}$$

与 $\deg P'(x)<\deg P(x)$ 矛盾。因此 $P(x)\equiv Q(x)$。

22.24 设多项式 P,Q,R 满足题中条件，但其中至少有一个不恒为 0，则存在 x_0 与 $y_0\neq0$，使得 $P(x_0,y_0)$，$Q(x_0,y_0)$，$R(x_0,y_0)$ 中至少有一个不为 0。考虑一元多项式.

$$P_1(x)=P(x,y_0),\quad Q_1(x)=y_0^{2m}Q(x,y_0),\quad R_1(x)=R(x,y_0),$$

由题中条件，有

$$x^{2m}P_1(x)+Q_1(x)\equiv(x+y_0)^{2m}R_1(x).$$

并且多项式 $P_1(x)$，$Q_1(x)$，与 $R_1(x)$ 的次数都小于 m，记

$$U(x)=x^{2m}P_1(x),\ T(x)=U(x)+Q_1(x)\equiv(x+y_0)^{2m}R_1(x),\ S(x)=T^{(m)}(x).$$

因为多项式 $U(x)$ 被 x^{2m} 整除，所以 0 是它的根，其重数至少是 $2m$，因此

$$U^{(m)}(0)=U^{(m+1)}(0)=\cdots=U^{(2m-1)}(0)=0.$$

因为 $\deg Q_1(x)<m$，所以

$$Q_1^{(m)}(0)=Q_1^{(m+1)}(0)=\cdots=0,$$

因此，
$$T^{(m)}(0)=T^{(m+1)}(0)=\cdots=T^{(2m-1)}(0)=0.$$

即
$$S(0)=S'(0)=\cdots=S^{(m-1)}(0)=0.$$

由于 $-y_0$ 是多项式 $T(x)=(x+y_0)^{2m}R_1(x)$ 的根，其重数至少是 $2m$，所以

$$T^{(m)}(-y_0)=T^{(m+1)}(-y_0)=\cdots=T^{(2m-1)}(-y_0)=0,$$

也就是说

$$S(-y_0)=S'(-y_0)=\cdots=S^{(m-1)}(-y_0)=0,$$

于是，0 和 $-y_0\neq0$ 是多项式 $S(x)$ 的根，它们的重数都至少为 m。因此多项式 $S(x)$ 被 $2m$ 次多项式 $x^m(x+y_0)^m$ 整除，但 $\deg T(x)<3m$，即 $\deg S(x)<2m$，因此 $S(x)\equiv0$。由此得到，多项式 $T(x)$ 的次数小于 m。但它又被多项式 $(x+y_0)^{2m}$ 整除，因而 $T(x)\equiv0$，从而 $R_1(x)\equiv0$。由

$$x^mP_1(x)+Q_1(x)\equiv T(x)\equiv0,$$

以及 $\deg Q_1(x)<m$ 得到，$P_1(x)\equiv Q_1(x)\equiv0$，因此

$$P_1(x_0)-Q_1(x_0)=R_1(x_0)=0,$$

与 x_0 和 y_0 的选取相矛盾。于是，题中结论证毕。

§23 多项式的各种性质

23.1 (1) 对所有 $x\in Z$，多项式 $P(x)$ 的值有相同的奇偶性的必要且充分条件是，每个数

$$P(x+1)-P(x)=((x+1)^2+p(x+1)+q)-(x^2+px+q)=2x+1+p$$

都被 2 整除，即 p 为奇数。此时多项式 $P(x)$ 的所有值的奇偶性完全依赖于 $q=P(0)$ 的奇偶性。因此，当 p 为奇数，q 为偶数(或奇数)时，多项式 $P(x)$ 的所有值都是偶数(或奇数)。

(2) 因为 $Q(x)=x(x^2+p)+q$，所以对所有 $x\in Z$，值 $Q(3x)=3x\cdot(9x^2+p)+q$ 被 3 整除的必要且充分条件是 q 被 3 整除。这时，每个值

$$Q(3x\pm1)=(3x\pm1)(9x^2\pm 6x+1+p)+q\equiv\pm(1+p)\pmod 3$$

被 3 整除的必要且充分条件是 $1+p$ 被 3 整除。于是，当 $q\equiv0\pmod 3$ 与 $p\equiv2\pmod 3$ 时，$Q(x)$ 的每个值都被 3 整除。

23.2 取 $x=0$，此时多项式 ax^3+bx^2+cx+d 的值是 d，因此，由题中条件，5 整除 d，并设 $d=5d_1$，$d_1\in Z$。再取 $x=1$ 和 $x=-1$，并由题中条件，有 $m,n\in Z$，使得

$$a+b+c+5d_1=5m,\quad -a+b-c+5d_1=5n.$$

两式相加即知，$2b$ 被 5 整除，因而 b 被 5 整除。并且 $a+c$ 被 5 整除。设

$$b=5b_1,\quad a+c=5l,\quad b_1\in Z,\quad l\in Z.$$

再取 $x=2$，此时多项式的值是

$$8a+4b+2c+d=5p,\quad p\in Z,$$

代入 $d=5d_1$，$b=5b_1$ 有

$$8a+2c=3a-3c+5(a+c)=5(p-d_1-4b_1),$$

即 $a-c$ 也被 5 整除。设 $a-c=5k$，$k\in Z$，于是有

$$2a=5(k+l),\quad 2c=5(l-k),$$

因为 $(2,5)=1$，所以 a、c 皆被 5 整除。

23.3 注意，原多项式可表为

$$P(x)=\frac{1}{2\cdot5\cdot7\cdot9}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

因为 9 个连续整数中总能找到被 2, 5, 7, 9 整除的自然数，因此对任意 $x\in Z$，乘积 $\prod\limits_{i=-4}^{4}(x+i)$ 被 $2\cdot5\cdot7\cdot9$ ($2\cdot5\cdot7\cdot9$ 是互素的数的乘积)整除，即 $P(x)$ 的值都是整数。

23.4 设 $2x^2-x-36=p^2$，p 是素数。则

$$p^2=(x+4)(2x-9)=ab,$$

其中 $\quad a=x+4,\quad b=2x-9,\quad a,b\in Z,\quad 2a-b=17.$

因为 a 是整数，而且整除 p^2，所以只有如下 6 种情形：

(1) $a=p^2$，$b=1$，则 $2p^2-1=17$，即 $p=3$。因此，

$$x=a-4=p^2-4=5.$$

(2) $a=p$, $b=p$, 则 $2p-p=17$, 即 $p=17$. 因此,

$$x=a-4=p-4=13,$$

(3) $a=1$, $b=p^2$, 则 $2-p^2=17$, 即 $p^2=-15$. 不可能.

(4) $a=-p^2$, $b=-1$, 则 $-2p^2+1=17$, 即 $p^2=-8$. 不可能.

(5) $a=-p$, $b=-p$, 则 $-2p+p=17$, 即 $p=-17$. 不可能.

(6) $a=-1$, $b=-p^2$, 则 $-2+p^2=17$, 即 $p^2=19$. 不可能.

于是,所求的值是 $x=5$ 和 $x=13$.

23.5 函数 $P(x)$在 x 轴上有一个最小值点 $x_0=-\frac{p}{2}$. 当 $x<x_0$ 时,函数 $P(x)$递减,当 $x>x_0$ 时,函数 $P(x)$递增. 因此函数 $P(x)$在区间$[-1,1]$上所有的值的集合 A为:如果 $p<-2$, 则 $x_0>1$. 且

$$A=[P(1),\ P(-1)]=[1+p+q,\ 1-p+q].$$

如果 $-2\leqslant p\leqslant 2$, 则 $-1\leqslant x_0\leqslant 1$, 且

$$A=[P(x_0),\ \max\{P(-1),\ P(1)\}],$$

即当 $-2\leqslant p\leqslant 0$ 时

$$A=\left[q-\frac{p^2}{4},\ 1-p+q\right],$$

而当 $0\leqslant p\leqslant 2$ 时

$$A=\left[q-\frac{p^2}{4},\ 1+p+q\right].$$

如果 $p>2$, 则 $x_0<-1$, 且

$$A=[P(-1),\ P(1)]=[1-p+q,\ 1+p+q].$$

23.6 设开始的二次方程为 $x^2+px+q=0$, 而以后的方程为

$$f_j(x)=x^2+p_jx+q_j=0,\quad p_j<q_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots.$$

现分别讨论如下:

(1) 若 $j\geqslant 2$, $p_j\leqslant 0$, $q_j\geqslant 0$, 且方程 $f_j(x)=0$ 不是最后一个,则有

$$p_j^2-4q_j>0.$$

由韦达定理:

$$\begin{cases}p_j+q_j=-p_{j-1}\\ p_jq_j=q_{j-1}.\end{cases}$$

因此,由②和不等式 $p_{j-1}<q_{j-1}$ 得

$$p_j+q_j+p_jq_j>0.$$

上式可变为下面不等式

$$0\leqslant -p_j(1+q_j)<q_j.$$

利用第一个不等式,上式可得

$$q_j^2>p_j^2(1+q_j)^2>4q_j(1+q_j)^2,$$

或

$$q_j(4q_j^2+7q_j+4)<0.$$

因为 $q_j\geqslant 0$, 所以上式不可能,从而情况(1)不可能.

(2) 如果 $j\geqslant 3$, $0<p_j<q_j$. 则可知,此时 $p_{j-1}<0$, $q_{j-1}>0$. 于是 $f_{j-1}(x)=0$ 满足情况(1)的规定,所以情况(2)也不可能.

(3) 如果 $j\geqslant 4$, $p_j<0$, $q_j<0$. 则可知,此时 $p_{j-1}>0$, $q_{j-1}>0$. 于是方程 $f_{j-1}(x)=0$ 满足情况(2),所以情况(3)也不可能.

考察方程 $f_4(x)=0$, 如果它存在,由于情况(3)不可能,因此只有 $q_4\geqslant 0$. 由情况(2)不可能,可知 $p_4\leqslant 0$, 但由情况(1)不可能,因此方程,$f_4(x)=0$ 只可能是最后一个. 这就是说按题意作出的方程最多只

有5个。满足题意的五个方程是存在的，例如

$$f_4(x)=x^2-\frac{1}{2}x+4,\qquad f_3(x)=x^2-\frac{7}{2}x-2,$$

$$f_2(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7,\qquad f_1(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2},$$

$$f(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}.$$

写出这组方程应该先写 $f_4(x)$，而其余的均按韦达定理依次写出。

23.7 考虑多项式 $Q(x)=P(x)-2$，并证明如下结论：如果整系数多项式 $Q(x)$ 有四个不同的整数根，则对每个 $x\in Z$，整数 $|Q(x)|$ 要么等于 0，要么是合数。（当然，它不能等于 1）设 a、b、c、d 是多项式 $Q(x)$ 的四个不同的整数根，则由裴蜀定理，

$$Q(x)=S(x)R(x),$$

其中

$$S(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

且 $R(x)$ 是某个多项式。因为多项式 $S(x)$ 的首项系数为 1，所以根据定理 48，多项式 $R(x)$ 是整系数的。设 x_0 是整数，它不等于 a, b, c 或 d，则 $R(x_0)$ 是整数，且 $Q(x_0)$ 被四个不同整数的乘积 $(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)(x_0-d)$ 整除（其中至少有两个不是 1 和 -1）。因此，要么 $Q(x_0)=0$，要么 $|Q(x_0)|$ 是合数，特别地，对每个 $x\in Z$，$Q(x)$ 不可能是 -1, 1, 3, 5 或 7，这就是说，$P(x)=Q(x)+2$ 不可能是 1, 3, 5, 7 或 9。

23.8 集合

$$M=\{25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$$

和多项式

$$P(x)=x+(x-25)(x-27)(x-28)(x-29)(x-31)$$

满足题中全部条件。（$k=25, 27, 28, 29, 31$ 满足条件(2)，$k=30$ 满足条件(3)。）

23.9 (1) 满足题中条件的多项式 P, Q, R 不存在，我们给出三数组 $(x, y, z)=(1, 2, 1)$，它满足方程

$$x-y+1=0,\quad y-z-1=0,\quad z-2x+1=0.$$

如果所需的多项式 P, Q, R 存在，则用上述的三数组的值替代给定的恒等式中的变元，我们便得到：$0=1$，矛盾。因此，满足条件(1)的多项式 P, Q, R 是不存在的。

(2) 满足题中条件的多项式 P, Q, R 是存在的。记

$$f=x-y+1,\quad g=y-z-1,\quad h=z-x+1,$$

显然有恒等式 $f+g+h=1$。将此式两端同时 7 次乘方，于是等式右端仍为 1，而左端是加项为形如 $f^k g^l h^m$（其中 $k\geqslant0$, $l\geqslant0$, $m\geqslant0$, $k+l+m=7$）的和式的形式，由 $k+l+m=7$ 知，k, l, m 中至少有一个不小于 3。因此，每个加项或者被 f^3，或者被 g^3，或者被 h^3 整除。将加项中所有被 f^3 整除的项划为一类，便可得到 f^3P；余下的项中，再将被 g^3 整除的划为另一类，便可得到 g^3Q；剩下的项之和便可成为 h^3R 的形式。于是便得到题设所要求的恒等式。因此，满足条件(2)的多项式 P, Q, R 是存在的。

23.10 (1) 如果 $P(x)$ 是常数，则 $P'(x)\equiv P''(x)\equiv0$，且式 1) 不成立。设 $\deg P(x)=n\geqslant1$，则当 n 为奇数时，$\deg(P(x)-P''(x))=n$ 为奇数，从而至少有一个点 $x\in R$，使得 $P(x)-P''(x)\leqslant0$。当 n 为偶数时，$\deg(P'(x)-P''(x))=n-1$，因而至少有一个点 $x\in R$ 使得 $P'(x)-P''(x)\leqslant0$。于是对任意多项式 $P(x)$，式 1) 与 2) 不能同时成立。结论(1)证毕。

(2) 设 $P(x)=x^2+3$，则对所有 $x\in R$，有

$$P(x)-P'(x)\equiv x^2-2x+3>0,\quad P(x)-P''(x)\equiv x^2+1>0.$$

即问题(2)的答案是否定的。

23.11 不妨设所有的多项式 $P_1(x)$, …, $P_n(x)$ 都是非零的，取这样的数 x^+，它大于上述多项式的所有实根。则当 $x\geqslant x^+$ 时，函数 $f(x)$ 与多项式

$$P^+(x)=P_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_k(\operatorname{sign}P_k(x^+))P_k(x)$$

是一致的，因为每个多项式 $P_1(x)$，…，$P_n(x)$在区间$[x^+, +\infty)$上都有固定的符号。同理可取这样的数x^-，使得当$x\leqslant x^-$时函数$f(x)$与某个多项式$P^-(x)$一致。因为函数$f(x)$的每个值都不取两次，所以多项式$P^+(x)$与$P^-(x)$都不是常数。因此

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim_{x\to-\infty}|f(x)|=\infty.$$

由函数$f(x)$的性质可知，只有如下两种可能：

要么 $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;$$

要么 $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

在这两种情形下，函数$f(x)$都可取绝对值任意大的正值和负值。我们证明，函数$f(x)$可取任意的$c\in R$。事实上，由上面的几个极限式知，存在这样的点x_1，使得$f(x_1)>c$，也存在这样的x_2，使得$f(x_2)<c$。因为$f(x)$是连续函数，所以根据介值定理(定理27)，在点x_1与x_2之间存在点x，使得$f(x)=c$。证毕。

23.12 对$n\in N$用归纳法证明更一般的结论：如果n次多项式$P(x)$满足，当

$$k=n+2,\ n+3,\ \cdots,\ 2n+2$$

时，$P(k)=a_k$，则$P(2n+3)=a_{2n+3}-1$，当$n=1$时，有$P(3)=2$，$P(4)=3$，从而$P(x)\equiv x-1$，且

$$P(5)=4=a_5-1.$$

现在设结论对$n-1$成立。下面证明它对n也成立。设多项式$P(x)$的次数为n，且当$k=n+2, n+3, \cdots, 2n+2$时，有$P(k)=a_k$。考虑多项式$Q(x)=P(x+2)-P(x+1)$，它的次数不大于$n-1$。因为当$k=n+1, n+2, \cdots, 2n$时，

$$Q(k)=P(k+2)-P(k+1)=a_{k+2}-a_{k+1}=a_k,$$

所以$Q(x)$满足，当$k=n+1, n+2, \cdots, 2n$时，$Q(k)=a_k$。由归纳法假设，有$Q(2n+1)=a_{2n+1}-1$，但是$Q(2n+1)=P(2n+3)-P(2n+2)$，因此

$$P(2n+3)=P(2n+2)+Q(2n+1)=a_{2n+2}+a_{2n+1}-1=a_{2n+3}-1.$$

结论证毕。

23.13 (1) 记$x\equiv2\cos t$，$t\in R$，则

$$2\cos(0\cdot t)\equiv2\equiv P_0(x),\quad 2\cos(1\cdot t)\equiv2\cos t\equiv P_1(x).$$

在公式 $$2\cos nt\equiv-2\cos(n-2)t+(2\cos t)(2\cos(n-1)t)\equiv-P_{n-2}(x)+xP_{n-1}(x)$$

中，设n依次为2，3，等等，则依次得到多项式$P_2(x)$，$P_3(x)$，等等。注意，当$n\in N$时，多项式$P_n(x)$的首项系数都是1。

(2) 设$\alpha=\dfrac{m}{n}$，$m\in Z$，$n\in N$，且分数$\dfrac{m}{n}$是既约的。则

$$2\cos n\alpha\pi=2\cos m\pi,$$

要么等于2，要么等于-2。由上面证明的结论，$2\cos nt$可表为$x=2\cos t$的整系数多项式$P_n(x)$。于是$x_0=2\cos\alpha\pi$是多项式$Q(x)=P_n(x)-2\cos m\pi$的根。其中$Q(x)$的所有系数都是整数，且首项系数为1。因此，由定理60，$2\cos\alpha\pi$要么是整数，要么是无理数。设$2\cos\alpha\pi$是整数。由于$|2\cos\alpha\pi|\leqslant2$，所以它只能取0，$\pm1$或$\pm2$。于是，当$\cos\alpha\pi$是有理数时($\alpha\in Q$)，它一定是0，$\pm\dfrac{1}{2}$或$\pm1$。

23.14 设水平线$y=y_0$交曲线L于四个点A, B, C, D，它们的横坐标依次为$x_1<x_2<x_3<x_4$。则当且仅当$|AB|+|AC|>|AD|$(即$(x_2-x_1)+(x_3-x_1)>(x_4-x_1)$)时，也即当且仅当$x_2-x_1>x_4-x_3$(即$|AB|>|CD|$)时，直线$y=y_0$是三角形水平线。设题中结论不成立，即存在两条水平线，它们分别交曲线于A_1, B_1, C_1, D_1和A_2, B_2, C_2, D_2，使得$|A_1B_1|>|C_1D_1|$，且$|A_2B_2|\leqslant|C_2D_2|$。由四次多项式的性质可知，任意一条平行于这两条水平线并且介于它们之间的直线也和该曲线相交于四个点。于是这些直线中至少有一条，它与曲线的四个交点A, B, C, D满足$|AB|=|CD|$。设线段BC的中点E(也即线段AD的中点)的坐标为(x_0, y_0)，则在坐标系$u=x-x_0$，$v=y-y_0$中，以给定曲线为图象的多项式$Q(u)$有四个根u_1，u_2，u_3，u_4，它们依次是点A, B, C, D在新坐标系中的横坐标，并且$u_1=-u_4$，$u_2=-u_3$。这样，给定的曲线在

新坐标系中的方程为

$$v=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)=(u^2-u_1^2)(u^2-u_2^2).$$

于是 $Q(u)=Q(-u)$，即曲线关于纵轴是对称的。所以每一条水平线与曲线的四个交点 A、B、C、D 都应满足 $|AB|=|CD|$，矛盾。结论证毕。

23.15 对 $n\in Z^+$ 用归纳法。当 $n=0$ 时，因为 $Q(x)\neq 0$ 所以多项式 $P(x)=Q(x)$ 至少有一个系数非零。设结论对某个 $n\geqslant 1$ 成立，下面证明结论对 $n+1$ 成立。用反证法。设有某个非零多项式

$$Q(x)=x^rQ_0(x),$$

其中 $r\in Z^+$，$Q_0(0)\neq 0$，使得对多项式

$$P(x)=(x-1)^{n+1}Q(x)=x^r(x-1)^{n+1}Q_0(x)$$

结论不成立。则 $P(x)$ 至多有 $n+1$ 个非零系数，于是，多项式 $P_0(x)=(x-1)^{n+1}Q_0(x)$ 也至多有 $n+1$ 个非零系数，因此它的导数 $P_0'(x)$ 至多有 n 个非零系数。但是

$$P_0(x)\equiv(x-1)^{n+1}Q_0'(x)+(n+1)(x-1)^nQ_0(x)\equiv(x-1)^nR(x),$$

其中因为 $P_0(x)$ 不是常数，所以 $R(x)\neq 0$。但由归纳假设，$P_0'(x)$ 至少有 $n+1$ 个非零系数。矛盾。证毕。

23.16 因为多项式 $P_0(x)=4x^3-3x$ 满足 $P_0(-1)=-1$，$P_0(1)=1$，并且在它的极值点上有

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\quad P\left(\frac{1}{2}\right)=-1,$$

所以 $P_0(x)\in M$。现在证明，对任意 $P(x)\in M$，有 $|a|\leqslant 4$。否则，设存在多项式

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in M,$$

且 $|a|>4$，则非零多项式

$$Q(x)=P_0(x)-\frac{4}{a}P(x)$$

的次数不超过 2。由于当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\left|\frac{4}{a}P(x)\right|<1$，所以

$$Q(-1)<0,\quad Q\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\quad Q\left(\frac{1}{2}\right)<0,\quad Q(1)>0.$$

由定理 28 知，多项式 $Q(x)$ 至少有 3 个根，矛盾。于是所求的 k 等于 4。

23.17 如果 $q=1$，则令 $P(x)\equiv p$。如果 $q>1$，则考虑长为 $\frac{1}{q}$ 的区间 $I=\left(\frac{1}{2q},\ \frac{3}{2q}\right)$。由于

$$\frac{3}{2q}<1,$$

所以存在 $m\in N$，使得 $\left(\frac{3}{2q}\right)^m<\frac{1}{q}$。记 $a=1-\left(\frac{3}{2q}\right)^m$，则对每个 $x\in I$，有

$$0<1-qx^m<a<1.$$

取充分大的 $n\in N$，使得 $a^n<\frac{1}{pq}$。记

$$P(x)=\frac{p}{q}(1-(1-qx^m)^n).$$

因为

$$P(x)\equiv\frac{p}{q}(1-(1-qx^m))Q(x)\equiv px^mQ(x),$$

且多项式 $Q(x)$ 的系数是整数，所以多项式 $P(x)$ 也是整系数的，而且当 $x\in I$ 时，

$$\left|P(x)-\frac{p}{q}\right|=\frac{p}{q}|(1-qx^m)^n|<\frac{p}{q}a^n<\frac{1}{q^2}.$$

这正是所要证明的。

23.18 设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 满足题中条件。记

$$\alpha_k=P(k),\quad \beta_k=Q(k),$$

其中 $k=1,2,3,4$。因为多项式 $P(x)$，$Q(x)$ 是 3 次的，所以“四元数组” $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ 与 $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ 不能是 0000，0110，1001 或 1111。另一方面，“四元数组” $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ 也不能是 $\overline{0\alpha_2 1\alpha_4}$，$\overline{0\alpha_2\alpha_3 1}$，$\overline{\alpha_1 1 1\alpha_4}$ 或

$\overline{\alpha_1 1 \alpha_3 1}$。否则，由条件(2)与(4)得到，$\beta_1=1$ 且 $\beta_1=0$，矛盾。因此，由条件(3)，由两种"四元数组"作成的对子$(\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4};\ \overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4})$是且只能是下述七种之一：(0100; 1010)，(1000; 0010)，(1000; 1000)，(1000; 1010)，(1010; 0010)，(1011; 0010)和(1100; 1010)。注意，其中只用到了六个不同的"四元数组"，即0010，0100，1000，1010，1011和1100。由拉格朗日插值公式（定理62），每个"四元数组" $\overline{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$ 可以作出一个多项式 $R(x)$，使得 $R(k)=\gamma_k$，$k=1, 2, 3, 4$。于是得到六个相应的多项式

$$R_1(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,\qquad R_2(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{19}{2}x-6,$$

$$R_3(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,\quad R_4(x)=-\frac{2}{3}x^3+5x^2-\frac{34}{3}x+8,$$

$$R_5(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x^2-\frac{19}{2}x+7,\quad R_6(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{31}{6}x-2.$$

因此，多项式对$(P(x), Q(x))$是下列各对之一：

$(R_2(x), R_4(x))$，$(R_3(x), R_1(x))$，$(R_3(x), R_3(x))$，$(R_3(x), R_4(x))$，$(R_4(x), R_1(x))$，$(R_5(x), R_1(x))$，$(R_6(x), R_4(x))$。

23.19 注意，只存在一个满足题中条件的多项式 $P(x)$。否则，设另有多项式 $Q(x)\not\equiv P(x)$ 也满足题中条件，则多项式 $P(x)-Q(x)$ 的次数至多为 n，但至少有 $n+1$ 个根。不可能。因为多项式

$$R(x)=x+\frac{1}{(n+1)!}(0-x)(1-x)\cdots(n-x)$$

满足条件 $R(-1)=0$，所以由裴蜀定理，它被 $x+1$ 整除，即 $R(x)\equiv S(x)(x+1)$，其中 $S(x)$ 是 n 次多项式。因为

$$R(k)=k,\quad S(k)=\frac{k}{k+1},$$

其中 $k=0, 1, \cdots, n$，所以 $S(x)$ 满足题中条件，即 $P(x)\equiv S(x)$，且

$$P(n+1)\equiv\frac{R(n+1)}{n+2}=\frac{(n+1)+(-1)^{n+1}}{n+2}=\begin{cases}\dfrac{n}{n+2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,}\\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

23.20 根据拉格朗日插值公式，得到

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k}}\prod_{\substack{i\neq k\\1\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!\,k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\1\leqslant i\leqslant n}}(x-i),$$

$$P(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\1\leqslant i\leqslant n}}(n+1-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.$$

因此，当 n 为奇数时，$P(n+1)=0$，当 n 为偶数时，$P(n+1)=1$。

23.21 根据拉格朗日插值公式，多项式

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

可表为

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\Big)P(x_j).$$

设题中结论不成立，即当 $j=0, 1, \cdots, n$ 时，

$$|P(x_j)|<\frac{n!}{2^n}.$$

则多项式 $P(x)$ 的首项系数 1 应等于乘积 $\prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}$ 的首项系数之和，且其模不超过

$$\Big|\sum_{j=0}^{n}P(x_j)\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{x_j-x_i}\Big|<\frac{n!}{2^n}\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{|x_j-x_i|}\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(j-i)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i>j}(i-j)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} C_n^j = 1.$$

矛盾。结论证毕。

23.22 根据拉格朗日插值公式，有

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} P(k) \prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{x-i}{k-i}.$$

因为当 $k=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ n$ 时，$|P(k)| \leqslant 1$，所以

$$|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |P(k)| \prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{|x-i|}{|k-i|} \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{|x-i|}{|k-i|}.$$

对每个实数 $x \in [-n, n]$，有

$$\prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} |x-i| \leqslant (2n)!.$$

事实上，当 $x \geqslant k$ 时，有

$$\prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} |x-i| = (|x-(k+1)| \cdots |x-n|)(|x-(k-1)| \cdots |x+n|)$$

$$\leqslant (n-k)!((n-k+1)\cdots(2n)) = (2n)!.$$

同理可证 $x<k$ 的情形。于是得到

$$\prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{|x-i|}{|k-i|} \leqslant (2n)! \prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{1}{|k-i|} \leqslant (2n)! \frac{1}{(k+n)!(n-k)!},$$

$$|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}.$$

这正是所要证明的。

23.23 设 $P(x)$，$Q(x)$ 是整系数多项式，如果 $P(x)-Q(x)$ 的所有系数都是偶数，则记为 $P \sim Q$。如果 $P \sim Q$，则 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的奇系数的个数相同。下面分几种情形讨论。以 $\beta(P)$ 表示 $P(x)$ 的奇系数个数。

(1) $n=2^q$，$q \in Z^+$，此时用归纳法易证

$$P_{2^q}(x) = (x^2+x+1)^{2^q} \sim x^{2^{q+1}} + x^{2^q} + 1,$$

所以

$$\beta(P_{2^q}(x)) = 3.$$

(2) $n=2^m-1$，$m \in N$，先设 $m=2k+1$，$k \in N$，则 $n=2^m-1 \equiv 1 \pmod 3$，考虑多项式

$$R(x) = (x+1)(x^{2n-1}+x^{2n-4}+\cdots+x^{n+6}+x^{n+3}) + x^{n+1}+x^n+x^{n-1}+(x-1)$$
$$\times(x^{n-4}+x^{n-7}+\cdots+x^3+1).$$

显然有 $\beta(R(x)) = \frac{1}{3}(2^{m+2}+1)$，而且

$$R(x)(x^2+x+1) \sim (x+1)(x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^{n-4}+x^{n+3})$$
$$+x^{n-1}(x^4+x^2+1)+(x+1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$$
$$\sim (x^{2n+2}+x^{n+3})+(x^{n-3}+x^{n+1}+x^{n-1})+(x^{n-1}+1)$$
$$\sim x^{2n+2}+x^{n+1}+1,$$

由(1)的证明，又有

$$P_n(x)(x^2+x-1) \sim x^{2n+2}+x^{n+1}+1,$$

因此，

$$\beta(P_n(x)) = \beta(R(x)) = \frac{1}{3}(2^{m+2}+1).$$

再设 $m=2k$，则 $n \equiv 0 \pmod 3$，考虑多项式

$$Q(x) = (x+1)(x^{2n-1}+x^{2n-4}+\cdots+x^{n+5}+x^{n+2})+x^n+(x+1)(x^{n-3}+x^{n-6}+\cdots+x^3+1).$$

同理可得

$$\beta(P_n(x)) = \beta(Q(x)) = \frac{1}{3}(2^{m+2}-1).$$

总之，有

$$\beta(P_{2m-1}(x))=\frac{1}{3}(2^{m+2}-(-1)^m).$$

(3) 把 $n\in N$ 用二进制表示为

$$n=\underbrace{11\cdots1}_{a_k\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{b_k\text{个}}\underbrace{11\cdots1}_{a_{k-1}\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{b_{k-1}\text{个}}\cdots\underbrace{11\cdots1}_{a_1\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{b_1\text{个}}.$$

其中对每个 $i\geqslant1$，$a_i>0$，对每个 $i\geqslant2$，$b_i>0$，$b_1\geqslant0$。

令 $$s_1=b_1,\ s_2=b_1+a_1+b_2,\ \cdots,\ s_k=b_1+a_1+b_2+a_2+\cdots+a_{k-1}+b_k.$$

于是 $$n=\sum_{i=1}^{k}2^{s_i}(2^{a_i}-1),$$

从而 $$P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x^2+x+1)^{2^{s_i}(2^{a_i}-1)}$$

$$\sim\prod_{i=1}^{k}(x^{2^{a_i+1}}+x^{2^{a_i}}+1)^{2^{a_i}-1}.$$

并利用前面已经证明的结果，可以得到

$$\beta(P_n(x))=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3}(2^{a_i+2}-(-1)^{a_i}).$$

第 七 章　　组 合 数 学

§24　集合和子集

24.1　如果子集对是有序的，即在子集对中可以区分第一个子集与第二个子集，则 n 个元素中每个元素都有三种可能：它或在第一个子集，或在第二个子集，或不在其中任意一个子集，因此不同的不交有序子集对的总数为 3^n。如果子集对是无序的，即两个子集相同但次序不同的子集对不认为不同，则 3^n 对有序子集对中有一对是由两个空集组成，而对其他 3^n-1 对有序对，每一对中交换两个子集的次序，得到的是同一个无序子集对，因此有 $\frac{3^n-1}{2}$ 个无序子集对，其中至少有一个子集非空。于是无序子集对的总数为 $\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^n+1}{2}$。

24.2　因为集合 X 总共有 2^n 个不同子集，所以不同的有序子集对有 $(2^n)^2=4^n$ 个。将所有子集对分为 4^{n-1} 个 4 元组：(A_1, A_2)，$(\overline{A_1}, A_2)$，$(A_1, \overline{A_2})$，$(\overline{A_1}, \overline{A_2})$，其中 $\overline{A}$ 表示子集 $A\subset X$ 的补集 $X\setminus A$。交换子集对的 4 元组中子集对的次序，得到的是同一个 4 元组。事实上，由子集对 $(\overline{A_1}, A_2)$ 得到的 4 元组为 $(\overline{A_1}, A_2)$，$(\overline{\overline{A_1}}, A_2)$，$(\overline{A_1}, \overline{A_2})$，$(\overline{\overline{A_1}}, \overline{A_2})$，因为 $\overline{\overline{A}}=A$，所以和由子集对 (A_1, A_2) 得到的 4 元组相同。同理由子集对 $(A_1, \overline{A_2})$，$(\overline{A_1}, \overline{A_2})$ 产生同一个 4 元组。其次，由于集合 X 的每个元素要么属于子集 A，要么属于它的补集 $\overline{A}$，所以它属于 4 个集合 $A_1\cap A_2$，$\overline{A_1}\cap A_2$，$A_1\cap\overline{A_2}$，$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ 之一。因此任意 4 元组中元素个数之和为 n。因为共有 4^{n-1} 个 4 元组，所以所有形如 $A_1\cap A_2$ 的集合的元素个数之和为 $n4^{n-1}$。

24.3　对 $n>3$ 用归纳法。当 $n=4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时，可按下表将集合 X_n 分为子集 A_1，A_2，…，A_n，其中对每个 n，表中每种颜色栏目下所注明的编号 m，表示集合 A_m 由相应颜色的元素组成。例如，当 $n=6$ 时，集合 A_2 与 A_5 的元素都是红色的。现在设 $n\geqslant 10$，并且设对小于 n 的数，特别对 $n-6$ 结论成立。按下列方式分解集合 X_n：集合 A_1，A_2，…，A_{n-6} 的元素颜色组成一集合 X_{n-6} 合乎归纳假设要求的分解方式。集合 A_{n-5}，A_n 由蓝色元素组成，集合 A_{n-3}，A_{n-2} 由红色元素组成，而集合 A_{n-4}，A_{n-1} 由白色元素组成。因

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	k	蓝　色	红　色	白　　色
4	10	3	1, 2	3	4
5	15	5	1, 4	2, 3	5
6	21	7	1, 6	2, 5	3, 4
7	28	9	4, 5	3, 6	1, 2, 7
8	36	12	5, 7	4, 8	1, 2, 3, 6
9	45	15	6, 9	7, 8	1, 2, 3, 4, 5

为集合X_n中蓝色、红色与白色元素都比集合X_{n-6}中同色元素多$2n-5$个，所以上述分法满足题中条件。

24.4 在集合$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中取定一个元素$a_1$，并只考虑含$a_1$的子集。这类子集的个数为集合$\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的子集个数，即为$2^{n-1}$，因此$k\geqslant 2^{n-1}$。另一方面，设从集合$X$取出至少$2^{n-1}+1$个子集，将集合$X$的所有子集分为$2^{n-1}$对，每一对由一个子集及其补集组成。于是由狄利克雷原理(定理1)，所取的子集至少有两个组成一对，因此它们不交，于是$k=2^{n-1}$。

24.5 设集合X中元素个数为n。子集$A_1, A_2, \cdots, A_{50}$中每一个都含$\frac{n}{2}$以上的元素，即所有这些子集的元素个数之和大于$50\cdot\frac{n}{2}=25n$。由狄利克雷原理，必有集合X的元素，它至少属于26个子集。同理可证，对每个$k<50$，在子集$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$中至少有$\left[\frac{k}{2}\right]+1$个子集，它们具有公共元。在集合$X$中取出一个元素，它至少属于26个子集，并作为集合$B$中5个元素之一。去掉包含这个元素的26个子集，在余下的24个子集中取出一个元素，它至少属于13个子集。去掉这13个子集，在余下的11个子集中取一个元素，它至少属于其中6个子集。在余下的5个子集中必有一个元素，它至少属于其中3个子集。最后必有一个元素，它属于余下的两个子集。于是，求得集合X的至多5个元素(由于在上述过程中所取的元素可能重复，所以可能小于5)，它们构成集合B，而且子集$A_1, A_2, \cdots, A_{50}$中每一个都至少含有它的一个元素。

24.6 考虑给定的1978个集合中任意一个集合A。它和其他1977个集合都相交，因此存在$a\in A$，使得它至少属于其中50个集合，否则集合A中每个元素至多属于49个集合，而集合A恰有40个元素，所以除A外至多有1960个集合，不可能。因此设元素a属于集合$A, A_1, A_2, \cdots, A_{50}$。下面证明，它属于给定的1978个集合中其他任意一个集合B。事实上，因为任意两个集合恰有一个公共元，所以集合$A, A_1, A_2, \cdots, A_{50}$中任意两个集合除$a$外都没有公共元。设$a\notin B$，则集合$B$与集合$A, A_1, A_2, \cdots, A_{50}$中每个集合都有一个公共元，它们都与$a$不同，而且两两不同，因此集合$B$至少含有51个元素，不可能。因此元素$a$属于每个集合。

24.7 考虑含奇数个元素的子集(如果有这样的子集)。因为所有子集所含元素的个数总和是偶数，所以具有奇数个元素的子集的个数也是偶数。任意将所有含有奇数个元素的子集配成对，对每对子集按题中所说的规则挪动：从较大的子集挪出一些元素，添加到较小的子集，挪出的元素个数为较小子集的元素个数。于是得到的所有子集的元素个数都是偶数。现在考虑元素个数不被4整除的子集。如果$n=1$，则总共有两个元素，它们在同一个子集。因此设$n\geqslant 2$。因为子集的元素个数的总数被4整除，因此这样的子集的个数为偶数。任意将这样的子集配成对，对每一对子集施行满足题中条件所说的运算(即挪动元素)。于是得到的每个子集的元素个数都被4整除。同理可得，每个得到的集合的元素个数都能被8, 16, …整除。最后每个得到的集合的元素个数被2^n整除，则所有2^n个元素都包含在同一个集合。

24.8 用A与B分别表示集合M中所有自然数对的较小数与较大数构成的集合。则由题中条件，B中的元素都不在集合A中，即$A\cap B=\phi$。设集合A与B的元素个数分别为a与b。则$a+b\leqslant n$，并且集合M的任意一个自然数对中较小数至多可取a个数，而较大数至多可取b个数，因此M中元素个数至多为

$$ab\leqslant a(n-a)\leqslant\left(\frac{a+n-a}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}.$$

因为$ab\in Z$，所以$ab\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$。如果$n$为偶数，则集合$M$中元素个数当

$$M=\left\{(j, l)\,|\,j\leqslant\frac{n}{2},\ l>\frac{n}{2}\right\}$$

时达到最大值$\frac{n^2}{4}$。如果n为奇数，则当

$$M=\left\{(j, l)\,|\,j<\frac{n}{2},\ l>\frac{n}{2}\right\}$$

时集合M中元素个数达到最大值$\left[\frac{n^2}{4}\right]$。于是，不论$n$为奇数或偶数，集合$M$中最大的元素个数为

$$\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

24.9 用 k_n 表示所求的数。设从集合 X 中取出 k_n 个 3 元子集，其中任意两个都恰有一个公共元。分三种可能情形。

(1) 集合 X 的每个元素都至多出现在两个 3 元子集。设 $\{a, b, c\}$ 是其中一个 3 元子集，则其他任意一个 3 元子集都与子集 $\{a, b, c\}$ 相交，而且所有其他子集中至多有一个包含元素 a，至多有一个包含元素 b，至多有一个包含元素 c。因此所有子集至多有 $1+3\cdot1=4$ 个，即 $k_n\leqslant4$。

(2) 集合 X 有一个元素出现在 3 个 3 元子集，但集合 X 的每个元素至多出现在 3 个 3 元子集，则设 $\{a, b, c\}$ 是其中一个 3 元子集。于是其他任意一个子集都与它相交，而且所有其他子集中至多有两个包含元素 a，至多两个包含元素 b，至多有两个包含元素 c。因此所有子集至多有 $1+3\cdot2=7$ 个，即

$$k_n\leqslant7.$$

(3) 集合 X 中含有元素 a，它至少属于 4 个 3 元子集，则这 4 个含有元素 a 的 3 元子集中所有其他元素两两不同，而其他任意一个子集也应包含元素 a。否则，这样的子集与 4 个 3 元子集中每一个恰有一个公共元素，所以它将至少含有 4 个元素。于是在此情形下，有 $1+2\cdot k_n\leqslant n$，即

$$k_n\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

当 $n=1, 2, 3, 4, 5$ 时，显然有 $k_1=k_2=0$，$k_3=k_4=1$，$k_5=2$。设 $n=6$，则集合 X 的每个元素至多属于 2 个 3 元子集，否则 3 元子集的并将含有 7 个元素。因此情形(1) 成立，即 $k_6\leqslant4$。另一方面，设 $X=\{a, b, c, d, e, f\}$，则 3 元子集取为 $\{a, b, c\}$，$\{c, d, e\}$，$\{e, f, a\}$，$\{b, d, f\}$。于是 $k_6=4$。设 $n\in\{7, 8, \cdots, 16\}$。则当出现情形(3)时，3 元子集的个数至多为 $\left[\frac{16-1}{2}\right]=7$，当出现情形(1)或(2)时，3 元子集的个数也至多为 7。另一方面，如果集合 X 的元素中有 7 个为 a, b, c, d, e, f, g，则有 7 个 3 元子集：$\{a, b, c\}$，$\{c, d, e\}$，$\{e, f, a\}$，$\{b, d, f\}$，$\{a, g, d\}$，$\{b, g, e\}$，$\{c, g, f\}$。于是当 $n=7, 8, \cdots, 16$ 时，$k_n=7$。最后设 $n\geqslant17$，则不论那种情形总有 $k_n\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$，而且在如下选取的 3 元子集时达到上界：集合 X 中取一个元素为所有 3 元子集所共有，并将所有其他元素配成对（当 n 为偶数时需去掉一个元素），并与共有元素一起组成 3 元子集。于是当 $n\geqslant17$ 时，$k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$。

24.10 设结论不真。则所给的 3 元子集中任意两个要么不交，要么恰有两个公共元。如果子集 A 与 B 恰有两个公共元，则记 $A\sim B$。设 A, B, C 是三个子集。可以证明，如果 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。事实上，设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, b, d\}$。因为子集 C 与 B 应有两个公共元素，所以 C 应含 a 或 b，即 C 与 A 相交，从而 $C\sim A$。于是所有给定的 3 元子集可以分类，使得同一类中任意两个不同子集都恰有两个公共元，而不同类中的子集不相交。对于每个子集类，有三种可能情形：

(1) 恰含 3 个元素的类；

(2) 恰含 4 个元素的类；

(3) 至少含有 5 个元素的类。

在第一种情形下，3 元子集类恰由一个 3 元子集组成。在第二种情形下，子集类中至多有 4 个子集，因为 4 个元素的集合总共有 4 个不同的 3 元子集。考虑第三种情形，设 $A=\{a, b, c\}$ 与 $B=\{a, b, d\}$ 是子集类中的两个子集，则除 a, b, c, d 外还有一个元素 e，它属于子集类中某个子集 C。由于 $A\sim C$，$B\sim C$，所以 $C=\{a, b, e\}$。因此对子集类中任意子集 D，由 $A\sim D$，$B\sim D$，$C\sim D$ 可知，它包含元素 a 与 b，于是类中子集个数比类中元素个数少 2，因为除 a, b 外每个元素都恰好对应一个子集，即它所属的子集。于是，每个类中子集个数都不超过元素个数。但是题中所给的子集总数大于元素总数。矛盾。

24.11 不能。反证法。设存在合乎题中条件的一种分法。如果整数 m 和 k 同属于一个子集，则记为 $m\sim k$，否则记为 $m\triangle k$。首先证明，对任意整数 n，$n\triangle n+1937$，且 $n\triangle n-150$。如果 3 数组 (a, b, c) 中 3 个数 a，b，c 分别属于 3 个不同的子集，则这个 3 数组称为“好”的。于是由题中条件，对每个整数 n，

3 数组$(n-50, n, n+1987)$, $(n-100, n-50, n+1937)$以及 $(n+1937, n+1987, n+2\cdot1987)$ 都是"好"的。从第一个 3 数组可以看出，$n\sim n-50$，且 $n\sim n+1987$。从第二个 3 数组可以看出，$n+1937\sim n-50$。而从第三个 3 数组可以看出，$n+1937\sim n+1987$，所以只能 $n\sim n+1937$。现在，在第二个 3 数组中，用 n 代替 $n+1937$，则 3 数组$(n-100, n-50, n)$ 是"好"的。由于 n 是任意整数，所以 3 数组$(n-150, n-100, n-50)$ 也是"好"的。再对这两个 3 数组作比较可知，$n\sim n-150$。这就证明，对任意整数 n，均有 $n\sim n+1937$，且 $n\sim n-150$。由此可以得到，

$$0\sim1937\sim2\cdot1937\sim\cdots\sim50\cdot1937=646\cdot150-50\sim645\cdot150-50\sim\cdots\sim-50,$$

即有 $0\sim-50$。但由题中条件，$0\triangle-50$，矛盾。结论证毕。

24.12 设 k 是集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的元素个数的最小值。为确定起见，设集合 A_1 含有 k 个元素。集合 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不交，因此 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中使 $A_1\cap B_j\neq\phi$ 的集合至多有 k 个。不妨设集合 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 满足 $A_1\cap B_j\neq\phi$，其中 $m\leqslant k$。集合 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 都至少含有 k 个元素，因此它们的并至少含有 mk 个元素。因为当 $j=m+1, \cdots, n$ 时，$A_1\cap B_j=\phi$，所以集合 $B_{m+1}, \cdots, B_n$ 都至少含有 $n-k$ 个元素。因此整个集合 $X=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ 中至少有 $l=km+(n-k)(n-m)$ 个元素。如果 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中每一个都至少含有 $\frac{n}{2}$ 个元素，而所有元素个数至少为 $n\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n^2}{2}$。如果 $k<\frac{n}{2}$，则由 $m\leqslant k$ 得到，

$$l=n(n-k)-m(n-2k)\geqslant n(n-k)-k(n-2k)=2\left(\frac{n}{2}\right)^2+2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

现在给出集合 X 恰含有 $\frac{n^2}{2}$ 个元素的例子。设 n 为偶数，且 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 是把集合 X 划分为 n 个两两不交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，并且每个子集 A_i 恰含 $\frac{n}{2}$ 个元素。令 $B_1=A_1, B_2=A_2, \cdots, B_n=A_n$，则题中所有条件都满足。

24.13 用 X 表示 1983 个车站的集合。设一共开辟 k 条线路，用 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 分别表示第 1, 2, $\cdots$, k 条线路经过的车站的集合。则

(1) 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant k$，$A_i\cap A_j\neq\phi$。这是因为要求任意两条线路都至少有一个公用车站。

(2) 对任意 $1\leqslant i<j<l\leqslant k$，$A_i\cap A_j\cap A_l=\phi$。这是因为每个车站至多在两条不同的线路上。

由(1)可知，每个集合 A_i 都与其他 $k-1$ 个集合至少有一个公共元。由(2)可知，这些公共元两两不同。因此每个集合 A_i 都至少含有 $k-1$ 个元素。于是集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的元素个数之和至少为 $k(k-1)$。在这样的计算过程中，每个元素都算了两次(因为每个元素都属于两个不同集合)，所以集合 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$ 至少含有 $\frac{k(k-1)}{2}$ 个元素。由此得到，$\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant1983$。解之得 $k\leqslant63$。这表明，最多可开辟 63 条汽车线路，每条线路至少应经过 62 个车站。

§25 利用图的题目

25.1 设集合 S 中含有这样的三个元素 a, b, c，使得 $a\to b$，且 $a\to c$。如果 $b\to c$，则由 $a\to b$ 与 $b\to c$ 得到 $c\to a$，与条件 $a\to c$ 矛盾。如果 $c\to b$，则由 $a\to c$ 与 $c\to b$ 得到 $b\to a$，与条件 $a\to b$ 矛盾。同理可证，集合 S 中不存在这样的元素 a, d, e，使得 $d\to a$，且 $e\to a$。如果集合 S 至少含有 4 个元素，其中一个记作 a，则由题中条件(2)得到，集合 S 中要么含有这样的元素 b 与 c，使得 $a\to b$，且 $a\to c$，要么含有这样的元素 d 与 e，使得 $d\to a$，且 $e\to a$。这两种情形都导致矛盾。因此集合 S 中至多含有三个元素。设 $S=\{a, b, c\}$，其中 $a\to b, b\to c, c\to a$，则 S 便是满足题中两个条件且具有三个元素的集合。

25.2 如果大家都彼此认识，则认识其他所有的人的人数为 1982。设 A 与 B 彼此不认识，则所有其他人都彼此认识，否则设 C 与 D 不认识，则 A, B, C, D 这 4 人中没有一人认识其他 3 人。如果 A 与 B 都认识所有其他人，则有 1980 个人认识其他所有的人。如果 A 与 C 不认识，$C\neq B$，则 A, B, C 都认识所有其他 1979 个人(因为在任意一群人 A, B, C, D 中只有 D 认识其他 3 人)，从而有 1979 个人认识其他所有

的人. 于是认识其他所有的人的人数最少是 1979.

25.3 注意，每个参加者都恰好认识其他4人中的两个人. 否则，设参加者A认识3人：B, C与D. 则若B与C认识时，A, B, C 3人中没有不认识的. 因此B与C不认识. 同理B与D, C与D都彼此不认识. 于是B,C,D 3人中没有认识的. A与3人不认识的情形同样考虑. 现在设A和B、C认识，则B与C不认识. 又设B与D认识，$D\neq A$, $D\neq C$. 如果D认识C，则A, B, C, D 4人中每个人都认识这4人中两个人，因此第5个人E和其他人都不认识，于是D与C不认识. 因为D与A不认识，C与B不认识，所以C和D都认识E. 因此5个人可以按如下顺序入座：E, D, B, A, C.

25.4 设任意三位数学家都不能讲同一种语言. 考虑任意一位数学家A. 他至多能讲三种语言，所以他至多能与其他三位数学家讲同一种语言，即至少有5位数学家不能与A讲同一种语言. 设B是这5位数学家之一. 同理，数学家B至多能与三位数学家讲同一种语言. 因此在与A不能讲同一种语言的其他4位数学家中，至少有一位数学家C不能与B讲同一种语言. 于是A, B, C三位数学家中任意两人都不能讲同一种语言，与题中条件矛盾.

25.5 (1) 设任意4人中总有两人互不认识. 如果A与某4人不认识，则由假设，这4人中有两人互不认识，这两人连同A一起，彼此不认识，与题设相矛盾. 因此A至多和3人不认识，即至少和6人认识. 设A和B_1, B_2, …, B_6认识，则B_1, B_2, …, B_6中任意3人必有两人互不认识，否则B_1, B_2, …, B_6中有3人B_i, B_j, B_k彼此认识，则A, B_i, B_j, B_k 4人中没有两人互不认识，与假设矛盾. 如果B_1和B_2, B_3, …, B_6中三人B_i, B_j, B_k不认识，则B_i、B_j, B_k三人彼此认识，不可能. 因此B_1至多和B_2, B_3, …, B_6中两个人不认识，即B_1至少认识B_2, B_3, …, B_6中三个人. 由题设这三人中有两人彼此认识. 这两人连同B_1和A一起，4个人彼此认识，与假设矛盾.

(2) 我们证明，结论仍然成立. 如果有某个人至少认识6个人，则证明与(1)相仿. 如果每个人都恰好认识5个人，则共有$\frac{9\cdot5}{2}$对互相认识的人，但$\frac{9\cdot5}{2}$不是整数，所以不可能. 最后，如果有某个人至少和4个人不认识，则这4个人相互认识，因若不然，这4人有两人互不认识，这两人连同某人一起，于是有3个人彼此互不认识，与题设矛盾. 结论证毕.

25.6 设有5个城市按题中所说的方式进行联络，首先证明，没有一个城市用同一种交通工具和其他三个城市进行联络. 否则，不妨设城市A和城市B, C与D用飞机进行联络. 则由题中条件，城市B,C与D之间都不能用飞机联络. 不妨设B和C用火车联络，因而城市C和D不能用汽车联络. 否则城市C将拥有三种交通工具. 因此C和D用火车联络. 同理，城市B和D也用火车联络、因此B, C和D之间都用火车联络，矛盾. 于是，从每个城市出发，有两条交通线是同一种类型的，另两条交通线是另一种类型的. 因此每个城市都恰有两种交通工具. 如果每种交通工具都至少用在4个城市，则城市总数至少有$\frac{4\cdot3}{2}=6$个，因此必有某种交通工具至多用于3个城市. 如果这种交通工具恰好用于2个城市，则这两个城市都仅有一条这种类型交通线，不可能. 如果它恰好用于3个城市，则这3个城市之间使用这种交通工具进行联络，也不可能. 这就证明，对5个城市，题中条件不可能满足. 当然城市总数更大，题中条件更不可能满足. 考虑4个城市A, B, C和D，它们按如下方式联络：A和B用火车，C和D用汽车，所有其他交通线都用飞机，则题中所有条件都满足. 因此所求城市总数为4.

25.7 首先证明，任意两个认识的人，他们所认识的人数都相同. 事实上，设A和B认识，除B外，A所认识的人为A_1, A_2, …, A_n. 则由题中条件，B, A_1, A_2, …, A_n中任意两个人都不认识. 考虑A_1. 因为A_1和B不认识，所以它和B有共同的熟人，其中除A外另一个设为B_1. 因为B_1和A不认识，所以除B和A_1外没有共同的熟人，即B_1和A_2, A_3, …, A_n都不认识. 同理，存在A_2和B的共同熟人B_2，因为B_1和A_2不认识，所以B_2不是B_1. 如此继续. 于是，对于每一个A所认识的人(除B外)，都对应着这个人和B的一个共同的熟人(除A外)，即认识A的人数不超过认识B的人数. 同理，认识B的人数也不超过认识A的人数. 因此A和B所认识的人数相同. 其次，如果C和D不认识，则它们有共同的熟人E. 于是如上所证，C和E所认识的人数相同，D和E也如此. 因此C和D所认识的人数与E的相同.

25.8 在所有 $3n$ 名学生中选取这样一名学生，他认识另两所学校中某所学校的学生数为最大，其值记为 k。为确定起见，设他是第一所学校的学生 A，而且认识第二所学校 k 名学生。于是 A 认识第三所学校 $n+1-k$ 名学生。因为 $k\leqslant n$，所以 $n+1-k\geqslant 1$。考虑第三所学校里认识 A 的学生 B。如果 B 认识第二所学校里认识 A 的学生 C，则 A，B，C 就是所需要的三名学生。如果第二所学校里 k 名认识 A 的学生都不认识 B，则 B 至多认识这所学校里 $n-k$ 名学生，即 B 至少认识第一所学校里 $n+1-(n-k)=k+1$ 名学生，与 k 的选取矛盾。结论证毕。

25.9 对 $n\in N$ 用归纳法证明，如果在 $2n$ 个顶点的图中任意三条棱都不组成三角形，则图中棱数不超过 n^2。当 $n=1$ 时，棱数总不超过 $1=n^2$。设结论对 n 成立。下面证明它对 $n+1$ 成立。设有一个具有 $2(n+1)$ 个顶点的图，它的任意三条棱都不组成三角形。如果图中没有棱，则无需证明。任取用一条棱联结的两个顶点，于是其他 $2n$ 个顶点中每个顶点至多和这两个顶点中一个顶点有棱相联结，由归纳假设，这 $2n$ 个顶点间至多联有 n^2 条棱，于是棱的总数不超过 $n^2+2n+1=(n+1)^2$，结论得证。最后，如果 $2n$ 个顶点分为各有 n 个顶点的集合，并在不同集合的顶点之间联棱，而在同一个集合的顶点之间不联棱，得到的图含有 n^2 条棱，但不含三角形。

25.10 对小伙子的人数 n 用归纳法。当 $n=1$ 时，对 1 名小伙子，总可以找到他所认识的姑娘，于是结论成立。设结论对所有小于 n 的数成立。下面证明，结论对 n 成立。考虑两种情形。

(1) 有 k 个小伙子，其集合记作 A，他们所认识的姑娘总数恰为 k，$k<n$。由归纳假设，这群小伙子中每一个人都可以找到他所认识的一位姑娘一起跳舞，则对余下的小伙子和姑娘们，题中条件仍然满足。事实上，设 B 是不出现在 A 中 i 名小伙子的集合，则集合 B 与集合 A 的并集中的小伙子们至少认识 $i+k$ 位姑娘，出现在 A 中的小伙子们认识的姑娘总数恰为 k，所以集合 B 中 i 名小伙子至少认识 i 名余下的姑娘。于是，由归纳假设，不出现在 A 中的每位小伙子也可以和他所认识的一位姑娘一起跳舞。

(2) 对任意 $k<n$，以及任意 k 位小伙子，他们所认识的姑娘人数超过 k，则让一位小伙子先和他所认识的姑娘结伴，余下的小伙子和姑娘们的集合仍然满足题中条件。事实上，$n-1$ 位余下的小伙子中，任意 k 个小伙子至少认识 $k+1$ 个姑娘，其中有一个可能已有舞伴。于是由归纳假设，余下的小伙子中每一位都能和他所认识的姑娘结伴。

25.11 因为共有 $\dfrac{21\cdot 20}{2}=210$ 对城市，每两个城市之间都至少有一家航空公司的航线，而每家航空公司则只能在 $C_5^2=10$ 对城市之间开辟航线，因此，航空公司不得少于 $\dfrac{210}{10}=21$ 家。

下面给出一种具体的安排，以说明 21 家航空公司确实可以满足要求。在一个圆周上取 21 个 21 等分点，按顺时针方向依次标上号码 1, 2, …, 21。首先，在 1, 3, 8, 9, 12 号的位置上各放一枚活动棋子，表示第 1 家航空公司在 1, 3, 8, 9, 12 号这五座城市之间开设航线；然后，让这五枚活动棋子沿顺时针方向移到下一个等分点 2, 4, 9, 10, 13，表示第 2 家航空公司在 2, 4, 9, 10, 13 号这五座城市之间开设航线；……，五枚活动棋子从初始位置移动 k 次后所在的五个等分点的号码，就是第 k 家航空公司所服务的五座城市的号码，$k=2, 3, 4, \cdots, 21$。因为等分点 1, 3, 8, 9, 12 两两之间的联线，包括了正 21 边形的边长和所有不同的对角线长度，所以每一对城市都有某家航空公司为其开设航线。

25.12 对 $n\in N$ 用归纳法证明：如果有 n 家公司 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 N 个城市 $P_1, P_2, \cdots, P_N$，其中 $N>2^n$，而且任意两个城市都有航线，则必有一家公司，它能担负只用奇数次航线的环游飞行。所谓环游，是指从某城市出发，经若干个城市，最后回到原来的城市。由于 $1983>1024=2^{10}$，则题中结论便得到证明。当 $n=1$ 时，则 $N\geqslant 3$，而且 $P_1P_2P_3P_1$ 即是所需要的环游路线。设结论对 $n-1$ 成立。下面证明结论对 n 成立。设公司 A_n 担负的所有环游路线都是由偶数条航线组成的(否则结论已无需证明)，则按下述方式将城市分为两组 R 和 Q，设 P_1 是有公司 A_n 经营的航线的城市(如果 P_1 不存在，则实际上只有 $n-1$ 家公司，由归纳假设结论成立)，则把 P_1 归到集合 R。然后把所有由 P_1 出发，经公司 A_n 的航班直达(无需中转)的城市归到集合 Q。再把所有由 Q 中某个城市出发，经公司 A_n 的航班直达(无需中转)的城市归到集合 R。注意，分到同一个集合 R 或 Q 中两个城市之间没有公司 A_n 的航线，否则就有由公司 A_n 经营

的只用奇数次航线的环游。如果已经把所有由城市 P_1 出发，经公司 A_n 的航班(允许中转) 所能达到的城市分完组，则从余下的城市中取出一个有公司 A_n 的航线的城市，把它归到集合 R，并对它重复上述分组过程。如此继续，直到余下的城市没有公司 A_n 的航线为止，最后把余下的城市都归到集合 R，于是所有城市都已分为两组 R 和 Q。这两组中至少有一组至少含有 $2^{n-1}+1$ 个城市，而且每一组中只有公司 A_1，A_2，…，A_{n-1} 的航线(注意，公司 A_n 只有从 R 的城市到 Q 的城市的航线)。余下的便是用归纳假设了。

25.13 用 v_1，v_2，…，v_n 表示 n 名选手。设结论不成立，则去掉任意一个选手之后，总有两个选手，他们在余下的选手中已赛过的对手完全相同。则对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，去掉选手 v_k 之后，总有一对选手 v_i，v_j(可能有几对，但只取一对就够了)，他们在余下的 $n-1$ 个选手中已赛过的对手完全相同。把 v_1，v_2，…，v_n 看成顶点，并在 v_i 与 v_j 间联一条棱，并编号为 k。于是得到一个图，它含有 n 个顶点和 n 条棱。由定理 94，这个图中含有一个圈，设为 $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_m}v_{i_1}$，且棱 $v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_2}v_{i_3}, \cdots, v_{i_m}v_{i_1}$ 的编号依次为 k_1，k_2，…，k_m。选手 v_{i_1} 的对手集记作 A_1。因为 v_{i_1} 与 v_{i_2} 联有棱 k_1，所以选手 v_{i_2} 的对手集 A_2 是集合 A_1 中添加或删掉顶点 v_{k_1} 得到的。同样选手 v_{i_3} 的对手集 A_3 是在 A_2 中添加或删掉顶点 v_{k_2} 得到的；……；最后选手 v_{i_1} 的对手集 A_1' 是在选手 v_{i_m} 的对手集 A_m 中添加或删掉顶点 v_{k_m} 得到的。由于 v_{k_1}，v_{k_2}，…，v_{k_m} 两两不同，A_1' 和 A_1 不可能相同，但它们都是选手 v_{i_1} 的对手集，因此 $A_1'=A_1$，矛盾。

25.14 首先证明，优秀选手一定存在。事实上，设 a 是获胜最多的一名选手。如果 a 打败其他所有选手，则 a 当然是优秀选手。如果 a 胜选手 b_1，b_2，…，b_k，但负于选手 c_1，c_2，…，c_l，则选手 c_1 必定负于某个选手 b_j，否则选手 c_1 将打败所有选手 b_1，b_2，…，b_k，从而 c_1 所赢的选手数比 a 的多，与 a 的选取矛盾，于是 a 胜 b_j，b_j 胜 c_1。同理可证，对每个 c_i，$i=2, 3, \cdots, l$，必有某个 b_t，使得 b_t 胜 c_i，于是 a 胜 b_t，b_t 胜 c_i，这就证明，a 是优秀选手。其次证明，如果优秀选手只有一个，则他必胜其他所有选手。用反证法。设 a 是唯一的优秀选手，但 a 未打败所有其他选手。不妨设 a 胜选手 b_1，b_2，…，b_k，但负于选手 c_1，c_2，…，c_l，其中 $l\geqslant 1$。把这场体育比赛限制在选手 c_1，c_2，…，c_l，即只考虑选手 c_1，c_2，…，c_l 之间在这场比赛中的结果，则由上面证明的结论，在选手 c_1，c_2，…，c_l 中有一名优秀选手，不妨设为 c_1。于是对 c_i，$2\leqslant i\leqslant l$，要么 c_1 胜 c_i，要么存在选手 c_j，使 c_1 胜 c_j，c_j 胜 c_i。对 b_t，$1\leqslant t\leqslant k$，有 c_1 胜 a，a 胜 b_t，因此 c_1 是整个体育比赛的优秀选手，与唯一性相矛盾。所以 a 胜其他所有选手。

25.15 首先注意，如果把球队看成选手，则本题所说的冠军队即是上题中的优秀选手。于是如上题中所证明，冠军队一定存在，而且赢的场次最多的球队一定是冠军队。现在设恰有两个冠军队 A 和 B，而且不妨设球队 A 胜球队 B。由于 B 为冠军队，所以存在球队 C，使得 B 胜 C，而 C 胜 A。所有负于 B 但胜 A 的球队集合记作 S，则 $S\neq\phi$。所有既胜 A 又胜 B 的球队集合记作 T，所有负于 A 的球队集合记作 M。于是 $S\cup T\cup M\cup\{A, B\}$ 即是所有参加比赛的球队集合。如果 $T\neq\phi$，则在比赛时 T 中任意两个球队都赛一场，所以 T 中球队自然也决出冠军队，记作 C。球队 $C\in T$ 既胜 A 又胜 B，于是 C 是整个排球比赛的冠军，与假设矛盾。因此 $T=\phi$。同理，S 中球队自然也产生冠军队 C。由于 C 胜 A，A 胜 B，而且 A 胜任意球队 $D\in M$，所以 C 是整个比赛的冠军，矛盾。这就证明恰有两个冠军队。

25.16 设任意相邻的两个方格中二数之差至多为 $n-1$。对 $k\in\{1, 2, \cdots, n^2-n\}$，用 A_k 表示写上 1, 2, …, k 的方格集合，B_k 表示写上 $k+n$，$k+n+1$，…，n^2 的方格集合，C_k 表示其他所有方格的集合。由假设，集合 A_k 中的方格与 B_k 中的方格不相邻。集合 C_k 恰含 $n-1$ 个方格，因此棋盘上必有一行和一列，它们没有 C_k 的方格，也即必有一行和一列的方格要么全部属于 A_k，要么全部属于 B_k。当 $k=1$ 时，A_1 恰含一个方格，因此 B_1 含有一整列和一整行的方格。当 $k=n^2-n$ 时，B_{n^2-n} 恰含一个方格，因此 B_{n^2-n} 不可能含有一整列或一整行的方格。于是存在 $k\in\{1, 2, \cdots, n^2-n-1\}$，使得集合 B_1，B_2，…，B_k 都含有一整列和一整行的方格，但 B_{k+1} 却不具有这一性质。从而 A_{k+1} 含有一整列和一整行的方格。所以 B_k 和 A_{k+1} 相交。由于 $B_k\subset B_{k+1}$，因此 B_{k+1} 和 A_{k+1} 相交，矛盾。

§ 26 各种组合问题

26.1 设经过若干次题中所说的运算后得到的是由同一个数字 0 组成的数组。设这是在经过 k 次运

算后第一次出现的，则经第 $k-1$ 次运算后圆周上的数字应是相同的，并且不为 0，因此都是 1。于是经 $k-2$ 次运算后任意两个相邻数字都是不同的。因此数字 0 和数字 1 一样多，即数字的总数应是偶数，与题中条件矛盾。

26.2 把整个平面分成大小相同的正方形，每个正方形由 4 个方格组成。然后给每个正方形染色，左上角的方格染成黑色，右上角为白色，左下角为红色，而右下角为蓝色。于是，一方面，两个同色的方格总不相邻，另一方面，在标出的方格中至少有四分之一的方格同色，否则所有的方格应少于

$$4\cdot\binom{n}{4}=n \text{ 个。}$$

26.3 除中央那个小立方体外的 26 个小立方体按国际象棋棋盘方式用黑色两色染色，使得恰有 2 个侧面在大立方体表面的 12 个小立方体为白色，而余下 14 个小立方体为黑色。注意，在任意两个具有公共表面的小立方体中必有一个为白色，另一个为黑色。如果老鼠能吃完所说的 26 个小立方体，则这些小立方体可以分为 13 对，每一对有一个白色小立方体，一个黑色小立方体。于是白色与黑色小立方体一样多，不可能，因此老鼠不能吃完所给的小立方体。

26.4 不妨设 $A_1<A_2<\cdots<A_r$。选取最小的下标 i，使得在点 $A_1, A_2, \cdots, A_i$ 中所有 4 种颜色的点都出现。则点 A_i 的颜色和点 $A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$ 都不同。再选取最大的下标 j，使得在点 $A_j, A_{j+1}, \cdots, A_i$ 中所有 4 种颜色的点都出现。则点 A_j 的颜色和点 $A_{j+1}, A_{j+2}, \cdots, A_i$ 的颜色都不同，于是线段 $[A_i, A_j]$ 即是所求的。

26.5 设 k 是负三角形的个数。对每个三角形，把标在三边上的数连乘，然后把所有得到的乘积连乘。得到的乘积即为 $(-1)^k$。注意，因为每条线段属于 $n-2$ 个三角形，所以每条线段所标上的数在这个连乘积中出现 $n-2$ 次，因此得到的乘积为 $(-1)^{(n-2)m}$，所以数 k 与乘积 $(n-2)m\equiv nm \pmod 2$ 同奇偶。

26.6 设想汽车带有足够的汽油，使得它刚好能够跑完整条公路而无需加油，并让汽车从任意一个加油站出发，到每一站都带上该站所有存储的汽油，最后回到出发的那一站，这时汽油的数量仍和出发时一样多。用 A 表示汽车在行驶过程中所带的汽油数量最少的那一站，这时汽车里汽油的数量记作 x。如果带着汽油数量为 x 的汽车从加油站 A 开始行驶，则油罐里汽油数量总不小于 x。因此如果带着空罐的汽车在加油站 A 加油，然后从这一站开始行驶，则它能够完成整个环形公路的行程。

26.7 把棋盘分为四个部分，每部分由两个列组成。设白方在任意一部分进招，黑方就在同一部分应招。这时，如果黑方能够在任意的部分上剥夺白方进招的机会，则白方总是无法再走的。于是只要能够给出限制在两个列上的游戏中黑方取胜的策略就够了。如果白方让白子前进 k 格，则黑方让另一列上的黑子前进 k 格。如果白方让白子后退 k 格，则黑方让同一列上的黑子前进 k 格。于是，在每走一步后，黑方总是在同一部分的两个列上移动棋子，要么移动同一列上的棋子，要么是另一列上的棋子。因此白方每走一步后，黑方总是能对应着走，即黑方不会输。另一方面，黑方总是往前走，所以游戏必然有限步之后结束。因此黑方总能赢。

26.8 把从 2 开始的所有整数配成对：$(2k, 2k+1)$，$k\in N$，则 $n, n-1, n-2$ 三个数中必有两个组成一对。先走的人第一步应把编号不能配对的方格上的棋子走到编号为 1 的空格。这枚棋子就不能再动了。设第二个人让一枚棋子走到某个编号为 m 的空格，则先手应把余下的棋子走到编号为 $m-1$ 或 $m+1$ 的空格，使得编号和 m 能组成一对，于是只要第二个人能走，则先走的人就能走。因此只要重复这么走，先走就不会输。由于这种游戏经有限步总会结束，所以第二个人必定要输。

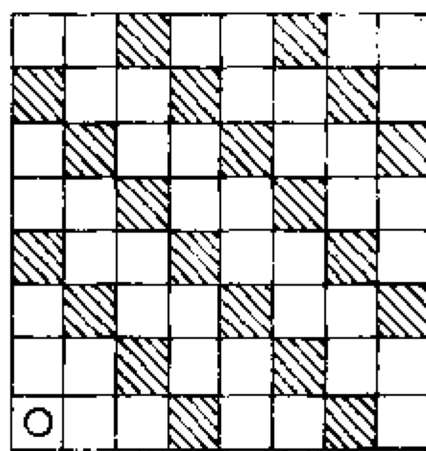


图 26.1

26.9 用 0, 1, 2, …, 7 从下到上给方格的行编号，并用相同的数从左到右给方格的列编号，对每个编号的方格求出它所在的行数与列数之和 x。"海豚星"初始位置的方格上的和数为 0。海豚星每走一步，它所在的编号方格上的 x 要么增加 1，要么减少 2。因此 x 被 3 除的余数构成下面的数列：0, 1, 2, 0, 1, 2, …。设海豚星能走遍所有方格，而且经过每个方格恰好一次，按海豚星所走的顺序，把除初始位置的方格外 63 个方

格分为 21 组，每组三个方格。则每一组恰有一个方格，它的和数为 3 的倍数。但是这样的方格(图 25.1 中带阴影的)只有 20 个，矛盾。因此海豚星不能走遍所有方格。

26.10 如图 26.2 所示把无限大棋盘的所有方格分为三个集合，其中不同数字表示不同集合的方格，则每走一步之后，有两个集合，它们的棋子各减少一个，而有一个集合却增加一个。这表明，每个集合里的棋子数的奇偶性都要改变。因为开始时棋子布满一个 $(3k)\times n$ 矩形，所以每个集合里的棋子数都相等。因此每走一步后，三个集合的棋子数的奇偶性应相同。如果在走若干步之后，棋盘上恰好剩下一枚棋子，则有两个集合的棋子数为偶数，另一个则是奇数。因此这种结局是不可能的。

		2	1	3		
	1	3	2	1	3	
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
	2	1	3	2	1	
		2	1	3	2	

图 26.2

26.11 方格表中各行依次自上而下编为第 1, 2, …, n 行，各列依次自左至右编为第 1, 2, …, n 列。把第 i 行加到第 j 列，并从第 k 列减去第 i 行的运算记作 $A^i_{j,k}$。对这个数表依次进行操作 $A^1_{n,1}$, $A^2_{n,2}$, …, $A^{n-1}_{n,n-1}$，数表中对角线上的元素除第 n 行、第 n 列处外都变为 0。再对得到的数表进行操作 $A^i_{j,i}$, $A^i_{i,j}$, $A^j_{i,j}$, $A^i_{n,i}$, 和 $A^j_{j,n}$，数表中第 i 行与第 j 列上的数都变为 0，而且除第 n 行、第 n 列处外，其他所有的数都保持不变。于是依次所有 $i=1, 2, \cdots, n-1$ 与 $j=1, 2, \cdots, n-1$ 进行上述操作后，数表中只剩下第 n 行和第 n 列的数可能不为 0 外，其他所有的数都变为 0。但是数表中每行、每列上所有的数之和都为 0，而且这个性质在进行题中所说的操作之后保持不变，因此数表中第 n 行和第 n 列上的数也都为 0。

26.12 首先证明，给定的凸多面体至少有一个界面不是三角形，否则设它的 n 个界面都是三角形。因为每个界面有 3 条棱，每条棱属于两个界面，因此多面体有 $\frac{3n}{2}$ 条棱。又因为每个界面有 3 个顶点，每个顶点同时在三个界面上，所以多面体有 n 个顶点。由欧拉公式(定理 93)，有 $n+n-\frac{3n}{2}=2$，即 $n=4$，与题中条件矛盾。其次给出先写者取胜的策略：第一步应在不是三角形的界面 A_1 上签名。与界面 A_1 相邻的界面至少有 4 个，第二个签名者至多在其中一个界面签字，所以与 A_1 相邻的界面中至少还有三个，记为 A_2, A_3, A_4，尚未签名。先写的第二步就在界面 A_2 上签名。最后，先写的第三步在界面 A_3 或 A_4 上签名，不管第二个签名者在哪儿签名。于是先写的在第三步就会赢。

26.13 对 $n\in Z^+$ 用归纳法证明。接连进行 2^n 次运算 S 之后得到的 m 数组是由 $m=2^n$ 个 1 组成的。当 $n=0$ 时，有 $S(A)=(a_1a_1)=1$。设结论对 $n-1$ 成立。下面证明结论对 n 成立。注意，在数组

$$T(A)=S(S(A))=S(a_1a_2,\ a_2a_3,\ \cdots,\ a_ma_1)$$
$$=(a_1a_3,\ a_2a_4,\ a_3a_5,\ a_4a_6,\ \cdots,\ a_{m-2}a_m,\ a_{m-1}a_1,\ a_ma_2)$$

中，位于偶数位置上的数构成的数组，与数组 $(a_2,\ a_4,\ \cdots,\ a_{m-2},\ a_m)$ 经运算 S 后得到的数组是相同的。同理，位于数组 $T(A)$ 的奇数位置上的数构成数组 $S(a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{m-1})$。由归纳假设，在 $\frac{m}{2}=2^{n-1}$ 次运算 T 之后，得到的数组不论在偶数或奇数位置上的数都是 1。因此在 m 次运算 S 之后整个数组都由数 1 组成。

26.14 当 $A=(1)$ 时，$S^n(A)=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2^n})$ 中满足 $a_i=a_{i+1}=0$ 的数对 $(a_i,\ a_{i+1})$ 的个数记为 f_n，满足 $a_i=0$, $a_{i+1}=1$ 的数对 $(a_i,\ a_{i+1})$ 的个数记为 g_n。由题意可知，$S^n(A)$ 中数对 (0, 0) 必由 $S^{n-1}(A)$ 中的数对 (0, 1) 经运算 S 而得到的，而 $S^{n-1}(A)$ 中的数对 (0, 1) 必由 $S^{n-2}(A)$ 中的 1 或数对 (0, 1) 经运算 S 而得到。由于 $S^{n-2}(A)$ 是 2^{n-2} 数组，其中有一半的项 a_i 为 1，所以

$$f_n=g_{n-1}=2^{n-3}+f_{n-2}.$$

由此得到，当 n 为奇数时，

$$f_n=2^{n-3}+2^{n-5}+2^{n-7}+\cdots+2^0+f_1=\frac{2^{n-1}-1}{4-1}+0.$$

当 n 为偶数时，

$$f_n=2^{n-3}+2^{n-5}+2^{n-7}+\cdots+2^1+f_2=2\cdot\frac{2^{n-2}-1}{4-1}+1.$$

即得

$$f_n=\frac{1}{3}(2^{n-1}-(-1)^{n-1}).$$

26.15 反证法，设棋盘上不能再放进一个多米诺骨牌而不移动棋盘上的多米诺骨牌。首先，棋盘上方第一行中至多有3个空格（即未被多米诺骨牌盖住的方格），因此棋盘下方的5×6区域里至少有11个空格。棋盘下方5×6区域里所有空格的集合记作A，棋盘上方5×6区域里所有多米诺骨牌的集合记作B。设$x\in A$，则空格x的上方与x相邻的方格y一定被某个多米诺骨牌α盖住，否则相邻的空格x和y上可以再摆上一个多米诺骨牌。建立集合A到B的映射φ如下：设$x\in A$，则令$\varphi(x)=\alpha$。如果对x，$y\in A$，$x\neq y$，有$\varphi(x)=\alpha=\varphi(y)$，则$\alpha$是集合$A$中方格$x$与$y$的上方的多米诺骨牌，因此空格$x$与$y$相邻，不可能。这表明，$\varphi$是集合$A$到集合$B$的一个单射。因此集合$B$所含的多米诺骨牌数不小于集合$A$所含的空格数，所以棋盘上方$5\times6$区域中至少有11个多米诺骨牌。另一方面，棋盘上至少有14个空格，除下方一行6个方格外，棋盘上方5×6区域中至少有8个空格，因此至多有$5\times6-8=22$个被多米诺骨牌盖住的方格，所以至多有11个多米诺骨牌。于是棋盘上方5×6区域里恰有11个多米诺骨牌，即恰有8个空格。从而棋盘下方最后一行恰有6个空格，所以可以再放上一个多米诺骨牌，与假设矛盾。



图 26.3

26.16 首先注意，3×2矩形可以用特利米诺覆盖（图26.3）。在靠近$2n\times2n$棋盘的两个相邻边，各取一个宽为六个方格的条形区域，它们的并记作G。如果剪掉的方格不在图形G上，则可以用3×2矩形覆盖这个图形G（图26.4），剩下一个含有剪掉一个方格的$2(n-3)\times2(n-3)$正方形。当$n\geqslant7$时，这样的程序总可以进行。因此不妨设$n\leqslant5$，考虑所有可能的情形。

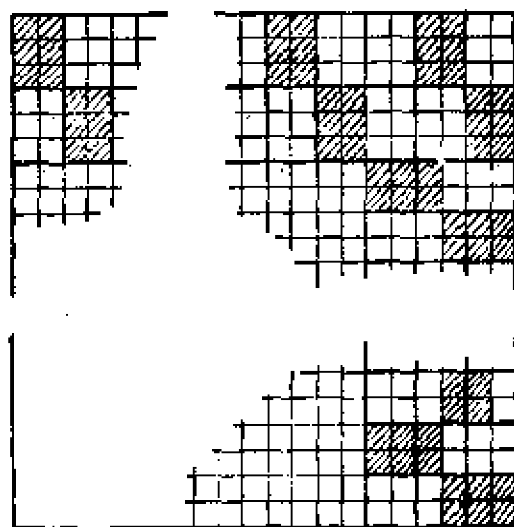


图 26.4

(1) $n=1$。缺一个方格的2×2正方形可以用一个特利米诺覆盖（见特利米诺的定义）。

(2) $n=2$。在4个2×2正方形中有一个含有剪掉的方格，其他三格可以用一个特利米诺覆盖，而3个不含剪掉的方格的2×2正方形可以用特利米诺覆盖（图26.5）。

(3) $n=4$。可以利用情形(2)中的覆盖，即剪掉任意一个方格的4×4正方形都可用特利米诺覆盖（图26.6）。

(4) $n=5$。含有剪掉的方格的10×10正方形总可以分为两个3×10矩形和一个4×10矩形，而且剪掉的方格在4×10矩形里。3×10矩形可以用特利米诺

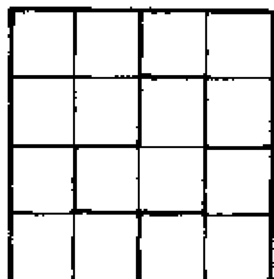


图 26.5

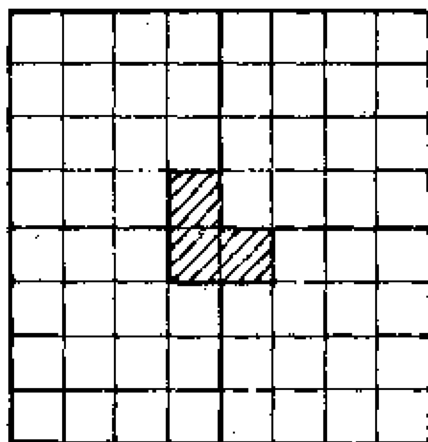


图 26.6

覆盖. 4×10 矩形可以分为两个 3×4 矩形和一个含有剪掉一个方格的 4×4 正方形, 而 3×4 矩形和含有剪掉一个方格的 4×4 正方形都可用特利米诺覆盖.

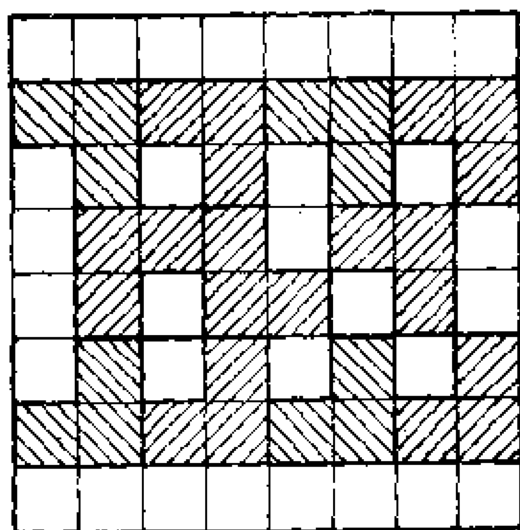


图 26.7

26.17 设在 8×8 棋盘上已经摆上 10 个特利米诺, 则未被特利米诺盖住的方格数为 $8\cdot8-10\cdot3=34$, 把整个棋盘按照 2×2 正方形分为 16 个区域. 由狄利克雷原理(定理 1), 至少有一个区域含有三个未被特利米诺盖住的方格. 于是棋盘上还可以再摆上一个特利米诺. 图 26.7 给出一个恰有 11 个特利米诺的摆法, 因此棋盘上至少可以摆上 11 个特利米诺.

26.18 (1) 考虑同一列上所有同色方格组成的方格对, 这里约定每一列的宽为 4, 每一行的长为 7. 每一列上至少有两个同色方格对, 从而整个棋盘上至少有 14 对同色方格对. 因此至少有 7 对同色方格对, 其中的方格同色. 因为每一列上所有的方格对共有 $C_4^2=6$ 对, 所以存在两个颜色相同且行位置相同的同色方格对. 这正是所要证明的.

(2) 见图 26.8.

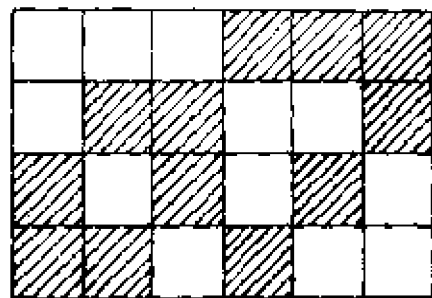


图 26.8

注: 将(1)中数字 4×7 改为 3×7, (1)中结论仍成立, 此即 1985 年匈牙利数学竞赛试题.

26.19 按自然方式把集合 M 中所有的点分为 12 个列(根据横坐标) 和 12 个行 (根据纵坐标). 144 个点中必有某一颜色的点不少于 $\frac{144}{3}=48$ 个, 其中在第 i 列上的点数记作 a_i, $i=1, 2, \cdots, 12$. 则有 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}\geqslant48$, 而且其中在第 i 列上的点构成的点对个数为 $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$, $i=1, 2, \cdots, 12$. 这样的点对总数为

$$A=\frac{1}{2}a_1(a_1-1)+\frac{1}{2}a_2(a_2-1)+\cdots+\frac{1}{2}a_{12}(a_{12}-1)$$
$$=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{12}^2)-\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{12}).$$

由平均值定理(定理 6), 有

$$A\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{12})^2}{12}-\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{12})$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{48^2}{12}-\frac{48}{2}=72.$$

同一列上每个所说的点对都可以由其中的点的纵坐标确定一个行对. 由于所有不同的行对个数为 $C_{12}^2=66$, 它小于 A, 所以必有两个所说的点对, 它们所确定的行对相同. 于是求得 4 个点, 它们便是所需的矩形的顶点.

26.20 (1) 如果 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 是三角形顶点的坐标, 则它的中线交线的坐标为

$$\left(\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right).$$

如果 x, y 被 3 除的余数分别为 r_1, r_2, 则点 (r_1, r_2) 称为点 (x, y) 的型. 存在满足题中条件的 8 个点. 这只需取如下的点即可: 两个型为 $(0, 0)$, 两个型为 $(0, 1)$, 两个型为 $(1, 0)$, 以及两个型为 $(1, 1)$ 的点. 除此之外, 其中任意三点不共线. 满足这些条件的点是存在的, 点 $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$, $(1, 1)$, $(7, 4)$ 即是一例. 现在设有 9 个点, 它们满足题中条件. 把 9 个点按型分组. 如果其中有三个同型点, 则它们组成的三角形的中线交于整点(即坐标都是整数的点), 不可能. 因此这 9 个点至少分为 5 个组. 即至少有 5 个不同型的点. 把这 5 个点按它们的横坐标被 3 除的余数分为三组. 如果某一组含有 3 个点, 则它们组成的三角形的中线交点为整点, 不可能. 因此每一组至多含有 2 个点, 即这 3 个组中有两个组各恰含两个点, 第三组恰含一个点, 不妨设这一个点的型为 $(0, 0)$, 则其他 4 点中不能有型(0,

1)和(0, 2)的点，此外也不可能同时有型(1, 1)和(2, 2)的两个点，否则它们和型为(0, 0)的点所组成的三角形中，中线交于整点．同理，这些点中也不能同时有型为(1, 2)和(2, 1)的两个点，或者同时有型为(1, 0)与(2, 0)的两个点。由此得到，包括型为(0, 0)的点，至多共有4个不同型的点。矛盾。

(2) 每个整点 (x, y, z) 都对应一组数 $g(x)$，$g(y)$，$g(z)$，它们分别是 x，y，z 被3除的余数．因为 $g(x)$ 至多可取3个值，因此37个给定的点中至少有13个点，它们所对应的值 $g(x)$ 相同．同理，这13个点中至少有5个点，它们所对应的值 $g(y)$ 相同．注意，对于顶点为 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3) 的三角形，其中线交点的坐标为

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

因此如果

$$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3),\quad g(y_1)=g(y_2)=g(y_3),$$

则 x_0 和 y_0 为整数，并且当且仅当 $z_1+z_2+z_3\equiv 0 \pmod 3$ 时 z_0 为整数．对上面的5个点，它们的 $g(x)$ 相同，$g(y)$ 也相同。如果这5个点中有3个点，它们的 $g(z)$ 分别为0，1，2，则对这3个点有，

$$z_1+z_2+z_3\equiv g(z_1)+g(z_2)+g(z_3)\equiv 0+1+2\equiv 0 \pmod 3).$$

如果不存在这样的3个点，则对上面的5个点所对应的值 $g(z)$ 至少有3个相同。因此求得3个点，它们所对应的值 $g(z)$ 相同，从而它们所决定的 z_0 为整数。

26.21 设棋盘上每个堡垒至少受到另外一个堡垒的攻击，则可以区分出某些堡垒对，使得每对中的堡垒能相互攻击，并且不受其他任意一个堡垒的攻击。而且所有不在这些对里出现的堡垒都不受堡垒的攻击。设所说的堡垒对的数目为 A，单个堡垒的个数为 B．$3n\times 3n$ 棋盘上水平线与竖直线的总数为 $6n$．每对能彼此攻击的堡垒控制三条线(两横一竖，或两竖一横)，这三条线上不能有其他堡垒。而每个单独的堡垒控制两条线(一横一竖)，由此得到，$3A+2B\leqslant 6n$．因此，堡垒个数

$$2A+B\leqslant\frac{2}{3}(3A+2B)\leqslant\frac{2}{3}\cdot 6n=4n.$$

另一方面，在棋盘上可以摆上 $4n$ 个堡垒，使得题中条件成立。图26.9所示的摆法即是一例，其中黑色方格上各摆上一个堡垒，因此所求的数为 $4n$。

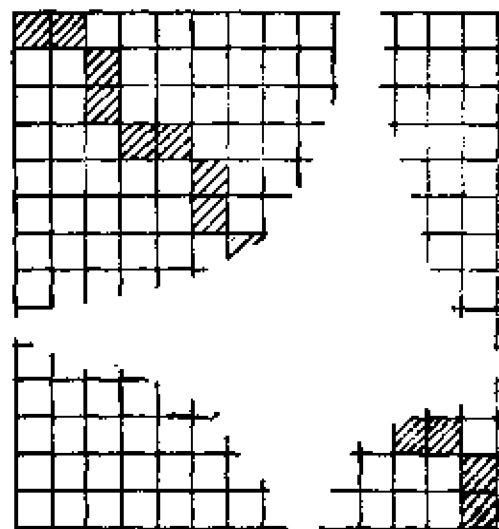


图 26.9

26.22 注意，在 $m\times m$ 棋盘上摆上 m 个堡垒，使得它们互相不受攻击的摆法恰有 $m!$ 种，这是因为第一行上堡垒有 m 种摆法，第二行上有 $m-1$ 种摆法，等等，最后一行有一种摆法。设题中结论不成立。如果棋盘已按题中要求染色，则对任意一种使堡垒不能相互攻击的摆法，必两个堡垒摆在同色方格上。因为摆在同色方格上的一对堡垒至多有 $\frac{n^2}{2}$ 种摆法，余下的 $n-2$ 个堡垒有 $(n-2)!$ 摆法，所以 n 个堡垒所有符合要求的摆法数 $n!$ 不超过 $\left(\frac{n^2}{2}\right)(n-2)!$．由此得到，$n-1\leqslant\frac{n}{2}$，即 $n\leqslant 2$，与题中条件矛盾。

26.23 设题中结论不真。则对每个 $i=1, 2, \cdots, n$，必有两个行，它们所不同的只是第 i 个元素．对每个 i，都取定这样的两个行，并构造一个图如下：表上每一行视为图的一个顶点，取定的两个行所表示的两个顶点连一条棱，于是得到的一个具有 n 个顶点和 n 条棱的图。由定理94，图中含有一个圈，它经过某些顶点(即表中的行)a_1，a_2，$\cdots$，a_k，a_1。因此，a_1 与 a_2 这两行只有第 i 个位置上的字母不同，而行 a_2 与 a_3，a_3 与 a_4，$\cdots$，a_k 与 a_1，它们在第 i 个位置上的字母都相同。于是，a_1 与 a_2 这两行在同一个位置上的字母既不同又重合，矛盾。

26.24 首先证明，集合 E 中点的染色满足题中条件的必要且充分条件是，顶点在 E 中且边平行于坐标轴的每个矩形都有偶数个红顶点。设某个矩形 π_0 的红顶点数为奇数，且等于1(等于3的情形可类似讨

论)．考虑以π_0为公共界面的两个平行六面体，π_0相对的界面是矩形π_1和π_2．于是，如果染色满足题中条件，则界面π_1和π_2各有3个红顶点．从而以π_1和π_2为界面的平行六面体具有6个红顶点数，矛盾．现在设每个矩形都有偶数个红顶点．考虑任意一个平行六面体，如果它的所有顶点都同色，则红顶点数被4整除．如果它的所有顶点不全同色，则必有一条棱，其端点不同色，而且所有与它平行的棱的端点也不同色(因为每个界面都有偶数个顶点)，因此平行六面体的红顶点数为4．这就证明了上面的结论．设给集合E中的$1+3\cdot1982$个点$(0, 0, 0)$，$(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, z)$一种染色，其中x, y, z遍历由1至1982的所有整数．下面证明，对E中其他的点，存在唯一染色方法，使得连同上述$1+3\cdot1982$个点的染色一起，满足题中条件．为此考虑函数

$$f(x, y, z)=\begin{cases}0, & \text{当点}(x, y, z)\text{为红色时，}\\ 1, & \text{当点}(x, y, z)\text{为蓝色时．}\end{cases}$$

反之由$f(x, y, z)$的值可唯一确定点(x, y, z)的颜色．定义模2加法运算$a\oplus b$如下：

$$a\oplus b=\begin{cases}0, & \text{当}a+b\text{为偶数时，}\\ 1, & \text{当}a+b\text{为奇数时．}\end{cases}$$

现在令

$$f(x, y, z)=f(x, 0, 0)\oplus f(0, y, 0)\oplus f(0, 0, z).$$

经验证，这一公式对上述$1+3\cdot1982$个点也成立．并且棱平行于坐标轴的每个矩形必有偶数个红顶点，其原因是，如果矩形的顶点为(x_1, y_1, z)，(x_2, y_1, z)，(x_1, y_2, z)，(x_2, y_2, z)，则

$$f(x_1, y_1, z)\oplus f(x_2, y_1, z)\oplus f(x_1, y_2, z)\oplus f(x_2, y_2, z)=0.$$

于是由上面证明的结论，由$f(x, y, z)$的值所确定的集合E的染色满足题中条件．现在证明染色方法的唯一性．事实上，设对E中除所说的$1+3\cdot1982$个点外其他的点另给一种染色，使得它连同给定的这$1+3\cdot1982$个点的染色一起满足题中条件，则由上面证明的结论，顶点为$(x, y, 0)$，$(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, 0)$的矩形有偶数个红的，即有

$$f(x, y, 0)=f(x, 0, 0)\oplus f(0, y, 0)\oplus f(0, 0, 0).$$

同理，

$$f(x, 0, z)=f(x, 0, 0)\oplus f(0, 0, z)\oplus f(0, 0, 0).$$

$$f(0, y, z)=f(0, y, 0)\oplus f(0, 0, z)\oplus f(0, 0, 0).$$

$$\begin{aligned}f(x, y, z)&=f(0, 0, z)\oplus f(x, 0, z)\oplus f(0, y, z)\\&=f(0, 0, z)\oplus(f(x, 0, 0)\oplus f(0, 0, z)\\&\quad\oplus f(0, 0, 0))\oplus(f(0, y, 0)\oplus f(0, 0, z)\\&\quad\oplus f(0, 0, 0))\\&=f(x, 0, 0)\oplus f(0, y, 0)\oplus f(0, 0, z).\end{aligned}$$

由于函数$f(x, y, z)$的值唯一确定点(x, y, z)的颜色，所以上面给出的E中其他的点的染色是唯一的．于是，所求染色方法数为$2^{1+3\cdot1982}=2^{5947}$种．

§27 初等概率论

27.1 设第一与第二个箱子里的球数分别为m_1与m_2，并设$m_1\leqslant m_2$，而它们所含的白球数分别为k_1与k_2．则两个取出的球都是白球的概率为$\frac{k_1}{m_1}\cdot\frac{k_2}{m_2}$．于是得到，

$$\frac{k_1k_2}{m_1m_2}=0.54=\frac{27}{50},\quad m_1+m_2=25.$$

因为$27m_1m_2=50k_1k_2$，所以m_1和m_2中必有一个被5整除．而m_1+m_2也被5整除，因此m_1和m_2都被5整除．于是只有两种可能：要么$m_1=5$，$m_2=20$，要么$m_1=10$，$m_2=15$．如果是前者，则$k_1k_2=54$，其中$0\leqslant k_1\leqslant5$，$0\leqslant k_2\leqslant20$．通过考察$k_1$的所有可能的值，求得$k_1=3$，$k_2=18$．于是在第一和第二个箱子各有两个黑球，并且取出两个黑球的概率为$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{20}=0.04$．同理，对后者，可以求得$k_1=9$，$k_2=9$．于

是第一个箱子里有1个黑球，第二个箱子里有6个黑球，而取出两个黑球的概率仍为

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{15}=0.04.$$

两种情形下答案一样。

27.2 用δ表示随机选取一位学生给出正确回答的概率，则随机选取的学生的回答与教师的回答相同的概率为他们都回答正确的概率$\alpha\delta$与回答都不正确的概率$(1-\alpha)(1-\delta)$之和。因此题中的条件可以表示为

$$\alpha\delta+(1-\alpha)(1-\delta)=\frac{1}{2},\quad 即\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\delta-\frac{1}{2}\right)=0.$$

如果$\alpha=\frac{1}{2}$，则上述条件满足，而且班上男生数与女生数之比可以是任意的。现在设$\alpha\neq\frac{1}{2}$，则$\delta=\frac{1}{2}$。用x与y表示班上男生数与女生数。于是，班上随机选取的学生回答正确的概率δ等于取到男生而且他回答正确的概率$\frac{x}{x+y}\beta$以及取到女生而且她回答正确的概率$\frac{y}{x+y}\gamma$之和。因此题中的条件可以表示为

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{x+y}\cdot\beta+\frac{y}{x+y}\gamma,\quad 即\ \left(\beta-\frac{1}{2}\right)x=\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)y.$$

所以当$\beta=\gamma=\frac{1}{2}$时，班上男生与女生的比例可以是任意的。当$\beta=\frac{1}{2}$而$\gamma\neq\frac{1}{2}$时，班上尽是男生，当$\beta\neq\frac{1}{2}$时，班上男生数与女生数之比为$(1-2\gamma):(2\beta-1)$。当然，所给的条件应使这个分数是非负的。

27.3 设两个3点组构成的两个三角形不交，则它们所含的6个顶点互不相同，反之如果6个顶点互不相同，则以它们为顶点可以构成两个不相交的三角形。于是把所含的6个顶点互不相同的两个3点组结成对子，并把所有可能的这种3点组的对子分为C_n^6个集合，当且仅当两个3点组对所含的6个顶点相同时把它们归在同一个集合。一方面，每个集合中所含的3点组对是由6个固定顶点分为两个3点组构成的，因此它含有$C_6^3=20$个3点组对。另一方面，每个集合的6个顶点恰有6种方法把它们分为满足题中条件的两个3点组。因此所求概率为$\frac{6}{20}=0.3$。

27.4 如果3点组中有两个顶点是取定的，则能够取到第三个顶点，使得到的3点组为单侧的方法种数依赖于前两个顶点之间的角距l。所谓顶点A与B之间的角距l是指$l=\angle AOB\cdot\frac{n}{\pi}$，其中$O$是$2n$边形的外接圆圆心。显然总有$l\leqslant n$，而且相邻顶点间的角距为1。如果$l<n$，则第三个顶点有

$$(l-1)+2(n-l)=2n-1-l$$

种取法；如果$l=n$，则有$2n-2$种取法。其次，当$l=1,2,\cdots,n-1$时，先取出第一个顶点，然后再取第二个顶点，使它和第一个顶点之间的角距为l的取法恰有$2n\cdot2=4n$种。当$l=n$时，这样的取法恰有$2n$种。因此这样选取3个顶点的方法总数为

$$4n\sum_{l=1}^{n-1}(2n-1-l)+2n(2n-2)=4n(2n-1)(n-1)-4n\frac{(n-1)n}{2}-4n(n-1)$$
$$=6n^2(n-1).$$

上面所求得的是在这样的条件下的单侧3点组的个数，即先取第一个顶点，再取第二、第三个顶点，亦即3点组是有序的。如果顶点是无序的，则3点组的个数应缩小6倍。而任意选取3点组的方法总数为

$$C_{2n}^3=\frac{1}{6}\cdot2n(2n-1)(2n-2).$$

因此所求概率为

$$\frac{\frac{1}{6}6n^2(n-1)}{\frac{1}{6}2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{3n}{2(2n-1)}.$$

27.5 因为在每次操作后箱子里的白球数的奇偶性不变，因此最后这只球为白球当且仅当n为奇

数。所以当 n 为奇数时，所求概率为 1，当 n 为偶数时，所求概率为 0。

27.6 设游戏者 A 与 B 分别掷出 m 与 k 个"鹰"。则所求事件 $m>k$ 的概率 p 等于事件 $(n+1)-m>n-k$ 的概率 q，即游戏者 A 掷出"字"的次数比游戏者 B 掷出的多的概率，这是因为在每次掷硬币时掷出"鹰"和"字"是等可能的。另一方面，当且仅当事件 $n-m<n-k$，即 $(n+1)-m\leqslant n-k$ 发生时事件 $m>k$ 发生。而事件 $n+1-m>n-k$ 与事件 $n+1-m\leqslant n-k$ 为对立事件，因此 $p=q$，且 $p+q=1$。所以

$$p=q=\frac{1}{2}.$$

27.7 求所有当 $k=1, 2, \cdots, n$ 时均有 $i_k\geqslant k-3$ 的排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的个数。i_n 可以取 4 个值：$n, n-1, n-2, n-3$。i_{n-1} 可以取 5 个值：$n, n-1, n-2, n-3, n-4$，但应去掉已取作为 i_n 的那个数。所以当 i_n 取定后，i_{n-1} 也只能取 4 个值。同理，$i_{n-2}, \cdots, i_4$ 也都只能取 4 个值，而 i_1, i_2, i_3 可以将 $i_n, i_{n-1}, \cdots, i_4$ 取剩下的 3 个数任意排列得到。于是，在所有 $n!$ 个排列中，合乎题中条件的排列恰有 $4^{n-3}\times 3!$ 种。因此所求概率为 $\frac{4^{n-3}\cdot 3!}{n!}$。

27.8 把所有叠牌方式配成对，使得同一对的叠牌方式是互为反序的：如果这 n 张牌按照某种顺序叠好牌，再按相反的顺序把牌叠好，则这种叠牌方法称为互为反序的。现在设在一叠牌里第二张 A 是在第 k 次取到的，则在它的反序叠牌中第二张 A 应在第 $n+1-k$ 次取到。于是对每对互为反序的叠牌方式中，k 与 $n+1-k$ 的算术平均值为 $\frac{n+1}{2}$。因此对所有叠牌方式，取到第二张 A 的取牌次数的平均值为 $\frac{n+1}{2}$。

27.9 把排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 和它的反序排列 $(i_n, i_{n-1}, \cdots, i_2, i_1)$ 配成对，于是所有排列配成 $\frac{n!}{2}$ 个对。任意两个不大于 n 的自然数 $m>k$ 恰好在每个对的一个排列中组成一个逆序。因为满足 $k<m\leqslant n$ 的自然数对 k, m 共有 $\frac{(n-1)n}{2}$ 个，所以在每个对中排列的逆序总数为 $\frac{(n-1)n}{2}$。因此对每对排列，逆序数的平均值为 $\frac{n(n-1)}{4}$。这也是所有排列的逆序数的平均值。

27.10 设排列 $\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 具有性质 P，即存在 $i\in\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$，则 x_i 与 x_{i+1} 称为排列 α 一的个相伴元。所有恰含一个相伴元的排列的集合记作 S，所有不含相伴元的排列的集合记作 T。设 $\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})\in T$，则 $|x_1-x_2|\neq n$，于是存在 $i\in\{3, 4, \cdots, 2n-1\}$，使得当 $2\leqslant j\leqslant i-1$ 时，$|x_1-x_j|\neq n$，但 $|x_1-x_i|=n$。记

$$\varphi(\alpha)=(x_2, x_3, \cdots, x_{i-1}, x_1, x_i, \cdots, x_{2n}),$$

显然 $\varphi(\alpha)\in S$。建立集合 T 到 S 的映射 φ 如下：对 $\alpha\in T$，令 $\varphi(\alpha)$ 与 α 相对应。容易看出，对集合 T 中不同的排列 α 与 β，排列 $\varphi(\alpha)$ 与 $\varphi(\beta)$ 也不同，因此集合 T 所含的排列个数不超过集合 S 所含的排列个数。后者显然小于所有具有性质 P 的排列个数。从而所有不具有性质 P 的排列个数小于所有具有性质 P 的排列个数。

27.11 首先，看到男孩的记录里至少出现一个字母 O 的概率为 1。在第一次出现字母 O 后接连出现 PO, OO, PP, OP 之一的概率相同，都为 $\frac{1}{4}$。在第一种情形下，游戏者 B 赢，在第二种情形下，游戏者 A 赢，如果出现的是第三种情形，则游戏者们都有同样的机会，这时又回到游戏的初始状态。在第四种情形下，接着出现字母 O 的概率为 $\frac{1}{2}$，而且游戏者 B 赢；而又接着出现字母 P 的概率为 $\frac{1}{2}$，这时游戏者们都有同样的机会，他们又处在开始的地位。于是 A 赢的概率为 $\frac{1}{4}$，B 赢的概率为

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

而且游戏者们回到开始的状态的概率为 $\frac{3}{8}$。因此游戏者 B 赢的机会比游戏者 A 的大。

27.12 考虑射手 A 第一次射击后所可能发生的三个事件：

(1) 击中C。则射手A在B第一次射击时被击中的概率为 1.

(2) 击中B。则射手C在第一次射击时击中A的概率为 0.5，射手A有机会进行第二次射击，并且击中C的概率为 $0.5\cdot 0.3$，射手C有机会进行第二次射击并且击中A的概率为 $0.5\cdot 0.7\cdot 0.5$，射手A有机会进行第三次射击并且击中C的概率为 $0.5\cdot 0.7\cdot 0.5\cdot 0.3$，等等。因此$A$在这场决斗中取胜的概率为

$$
\begin{aligned}
&0.5\cdot 0.3+0.5\cdot 0.7\cdot 0.5\cdot 0.3+0.5\cdot 0.7\cdot 0.5\cdot 0.7\cdot 0.5\cdot 0.3+\cdots \\
&=0.15(1+0.35+0.35^2+\cdots)=0.15\,\frac{1}{1-0.35}=\frac{15}{100}\cdot\frac{100}{65} \\
&=\frac{3}{13}.
\end{aligned}
$$

(3) 没有击中任何人，接着是B射击。因为射手C的威胁大，所以B向C射击，并击中C。于是A以概率 0.3 击中B，从而赢得这场决斗。

因此，对射手A最有利的做法是，他不击中任何人，即第一次射击时应放空枪。

27.13 注意，因为立方体中除B'和C'外任意一个顶点都有一条至多由两条棱构成的通路到达B'或C'，所以质点从立方体的任意一个顶点出发而停留在B'或C'的概率不小于$\frac{1}{9}$。因此质点在走两步后不停在B'或C'的概率不超过 $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，从而质点在走$2k$步后不停在$B'$或$C'$的概率不超过$\left(\frac{8}{9}\right)^k$，因此质点总不停在$B'$或$C'$的概率不超过$\left(\frac{8}{9}\right)^k$，$k\in N$，即为 0。于是质点最终停在$B'$或$C'$的概率为 1。其次，用$P$表示质点从顶点$A$出发最后停在顶点$B'$的概率，则质点从$A$出发最后停在$C'$的概率为$1-p$。用$q$表示质点从$B$出发最后停在$B'$的概率，则质点从$B$出发最后停在$C'$的概率为$1-q$。由对称性得到，质点从$D$出发最后停在$B'$的概率为$1-p$，从$A'$出发停在$B'$的概率为$q$，而从$C$或$D'$出发停在$B'$的概率为$1-q$。如果质点从$A$出发，则走一步后到$A'$，$D$，$B$的概率都是$\frac{1}{3}$。因此从$A$点出发最后停在$B'$的概率为

$$p=\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}q,\qquad \text{即 } 4p-2q=1.$$

同理，质点从B出发最后停在B'的概率为

$$q=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1-q)+\frac{1}{3}p,\qquad \text{即 } 4q-p=2.$$

因此 $p=\frac{4}{7}$。于是质点停在B'的概率为 $\frac{4}{7}$，停在C'的概率为 $\frac{3}{7}$。

27.14 设买回来的巧克力糖中恰有k张不同的肖像。如果再买一块巧克力，其中的肖像是过去没有遇到的，则称这块巧克力是特殊的。用M_k表示为了买到一块特殊巧克力所需要买的巧克力的平均块数。则接着买来的巧克力为特殊的概率为$\frac{n-k}{n}$，而不是特殊的概率为$\frac{k}{n}$。如果买来的这块巧克力不是特殊的，则为了买到一块特殊巧克力所需要买的巧克力的平均块数仍为M_k。由定理 100 得到，

$$M_k=\frac{n-k}{n}\cdot 1+\frac{k}{n}(1+M_k).$$

从而$M_k=\frac{n}{n-k}$。再由定理 99，所求的需要买的巧克力的平均块数为

$$\sum_{k=0}^{n-1}M_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k}=n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).$$

参 考 文 献

[1] 中学数学教师手册编写组,《中学数学教师手册》,上海教育出版社,1985年版。
[2] 王文才、施桂芬,《数学小辞典》,科学技术文献出版社,1983年版。
[3] 《代数》(高中第一册),人民教育出版社,1982年版。
[4] 《代数》(高中第二册),人民教育出版社,1984年版。
[5] 《代数》(高中第三册),人民教育出版社,1983年版。
[6] 《平面几何》(初中第一册),人民教育出版社,1984年版。
[7] 《平面几何》(初中第二册),人民教育出版社,1984年版。
[8] 《立体几何》(高中),人民教育出版社,1981年版。
[9] 《微积分初步》(高中),人民教育出版社,1983年版。
[10] 樊映川等,《高等数学讲义》,人民教育出版社,1984年版。
[11] 柯召、孙琦,《数论讲义》(上册),高等教育出版社,1986年版。
[12] 闵嗣鹤、严士健,《初等数论》,人民教育出版社,1982年版。
[13] 長澤龜之助,《几何学辞典》(下卷),上海科学技术出版社,1959年版。
[14] D. S. Mitrinovic' & P. M. Vasic',《分析不等式》中译本,赵汉宾译,广西人民出版社,1986年版。
[15] 李炯生、查建国,《线性代数》,中国科学技术大学出版社,1989年版。
[16] 张禾瑞、郝炳新,《高等代数》(上册),人民教育出版社,1979年版。
[17] 黄国勋、李炯生,《计数》,上海教育出版社,1983年版。
[18] 李慰萱,《图论》,湖南科学技术出版社,1980年版。
[19] 浙江大学数学系高等数学教研室,《概率论与数理统计》,高等教育出版社,1979年版。
[20] 沈恒范,《概率论讲义》,高等教育出版社,1982年版。